Μάθημα 7ο

Αριθμοί Stirling : n κουτιά } διακεκρ. $n!\,S(r,n)$
r μπάλες }

• Σύνολο με r στοιχεία $\{1,2,\dots,r\}$, να βρεθεί ο αριθμός των διαμερίσεών του σε n υποσύνολα.
Απάντηση: $S(r,n)$

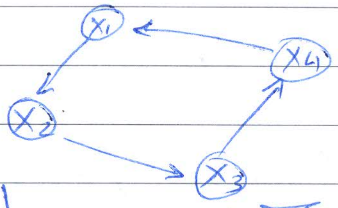
Αναγωγικός τύπος (Αναδρομικοί)

$$S(r+1,n+1) = (n+1)\,S(r,n+1) + S(r,n)$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Διωνυμικοί $\binom{n}{k}$, $S(r,n) = \left\{ {r \atop n} \right\}$

• k αντικείμενα (χάντρες) (κυκλική αντιμετάθεση)



σύνολο με r χάντρες θα κατασκευάσω n περιδέραια

$\{1,2,3\}$ 3 χάντρες, 2 περιδέραια $\rightsquigarrow$ 3 τρόποι.

$s(r,n)$ = αριθμός των τρόπων κατασκευής n περιδεραίων που μπορούν να κατασκευαστούν από r χάντρες = αριθμός τρόπων ένα σύνολο (r στοιχείων) να γραφεί ως γινόμενο n κυκλικών αντιμεταθέσεων.

$$s(r+1, n+1) = r \cdot s(r, n+1) + s(r,n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s(r,n) = r!$$

Bell

Ο αριθμός των διαμερίσεων ενός συνόλου με r στοιχεία

B_r

Θα βρούμε τη ΓΣ.

$$B_r = \sum_{n=1}^{\infty} S(r,n)$$

ΓΣ ως προς r.

$(e^x - 1)^n / n!$

Άρα ΓΣ των $(B_r)_{r=1,2,\dots}$ είναι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^x-1)^n}{n!} = e^{e^x-1} - 1$

Αναδρομικές Σχέσεις 3ο Κεφ.

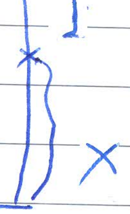
Αριθμοί Fibonacci

$f(n)$

$f_0 = 1$ $f_3 = 3$

$f_1 = 1$

$f_2 = 2$ $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$



Χρυσούς Λόγος

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$$

- $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

'Έχουμε $\quad f_{n+2}x^{n+2} = f_{n+1}x^{n+2} + f_n x^{n+2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2}$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

'Άρα $\quad F(x) - x - 1 = x(F(x) - 1) + x^2 F(x) \Rightarrow$

$$F(x) = \frac{-1}{x^2+x-1}.$$

Μάθημα 8ο

Συμβολισμός $[x^n]F(x) \longleftrightarrow$ ο συντελεστής του x^n όταν το $F(x)$ γραφεί ως δυναμοσειρά.

Π.χ. • $[x^n]\frac{1}{1-x} = 1$

• $[x^n]\, e^x = 1/n!$

• $[x^n]\frac{1}{x+\alpha} \quad \left(\frac{1}{\alpha(1+\frac{x}{\alpha})} = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^n} x^n \right)$

$\parallel$

$\frac{(-1)^n}{\alpha^{n+1}}$

$$f_{n+2}\,x^{n+2} = f_{n+1}\,x^{n+2} + f_n\,x^{n+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}\,x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}\,x^{n+2} + \sum_{n=0} f_n\,x^{n+1} \Rightarrow$$

$$F(x) - x - 1 = x\left(f(x) - 1\right) + x^2 f(x) \Rightarrow$$

$$F(x) = \frac{-1}{x^2+x-1} = \frac{-1}{(x+\phi)(x+\psi)} = \frac{A}{x+\phi} + \frac{B}{x+\psi}$$

$$A = \frac{-1}{\psi-\phi} = \frac{1}{\psi-\phi} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$B = \frac{1}{\phi-\psi} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Άρα $F(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}\frac{1}{x+\phi} - \frac{\sqrt{5}}{5}\frac{1}{x+\psi}$.

$$[x^n]\,F(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{(-1)^n}{\phi^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{\psi^{n+1}}\right) = (-1)^{n+1}$$

Αριθμοί Catalan

$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ θεωρώ n αριστερές παρενθέσεις (
« « δεξιές «)

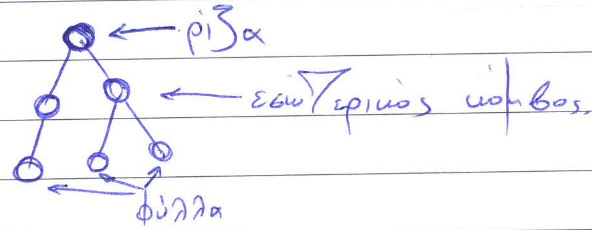
(i)))) (((όχι "νόμιμος τρόπος"
(ii) (()()) νόμιμος
(iii) ((())) «

Πόσοι τρόποι (νόμιμοι) υπάρχουν για να τοποθετήσω n αριστερές κ n δεξιές παρενθέσεις.

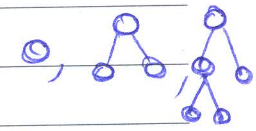
$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Δυαδικό δέντρο

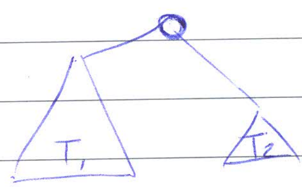
Πλήρες δυαδικό δέντρο



Κάθε κόμβος έχει 0 ή δύο παιδιά. π.χ

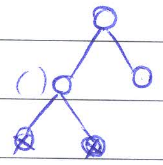


Θεώρημα: Σε οποιοδήποτε δυαδικό πλήρες δέντρο τα φύλλα είναι ένα περισσότερο από τους εσωτερικούς κόμβους.



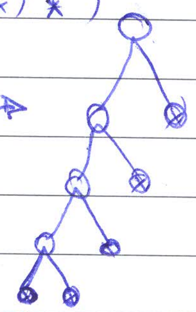
Όπου T_1, T_2 π.δ.δ.

Έστω ότι γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των πλήρων δυαδικών δέντρων είναι T_n με n εσωτερικούς κόμβους.



$(xx) \rightsquigarrow ((xx)x)$

Π.χ. $((((xx)x)x)x) \rightsquigarrow$



T_n αριθμός πλήρων δυαδικών δέντρων με n εσωτερικούς κόμβους

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} T_{k-1}\cdot T_{n-k}$$

Ασκήσεις: 1. ΝΔΟ $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1}{k}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{n-1}{k-1}x^k \to x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1}{k}x^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1}{k}x^k + x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1}{k}x^k \Leftrightarrow (1+x)^k = (1+x)^{k-1} + x(1+x)^{k-1}$$

$$= (1+x)^{k-1}(1+x)$$

$$(1+x)^{2k} = (1+x)^k(1+x)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\boxed{\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{\ell}\binom{n}{k-\ell}}x^k$$

• Να αποδείξετε με τη μέθοδο των γεννητριών συναρτήσεων ότι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2n}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{n}{k-\ell}$$

• $$A(x) = \frac{2+3x-6x^2}{1+2x} = \frac{-3x-6x^2+3x+3x+1+2-1}{1+2x} =$$

$$\frac{-3x(1+2x)+3(1+2x)-1}{1+2x} = 3-3x-\frac{1}{1+2x} = 3-3x-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(2x)^k$$

$$= 3-3x-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^k x^k$$

$x^0 = 2$

$x^1 = -1$ δηλαδή $2, -1, +2^2, -2^3, +2^4, -2^5, \dots$