Κεφάλαιο 3

Ισοπεριμετρικές ανισότητες και συγκέντρωση του μέτρου

3.1 Μετρικοί χώροι πιθανότητας

3.1α΄ Ορισμός και παραδείγματα

Ορισμός 3.1.1 (μετρικός χώρος πιθανότητας)**.** Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνόλων του (X, d), τότε η τριάδα (X, d, μ) λέγεται μετρικός χώρος πιθανότητας.

Παραδείγματα 3.1.2. 1. *Η σφαίρα* S^{n-1}. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\} \tag{3.1.1}$$

στον $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένη με την γεωδαισιακή μετρική ρ: η απόσταση $\rho(x, y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y. Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο σ: για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma(A) := \frac{|C(A)|}{|B_2^n|}, \tag{3.1.2}$$

όπου B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα,

$$C(A) := \{sx : x \in A \text{ και } 0 \leqslant s \leqslant 1\}, \tag{3.1.3}$$

και $|Q|$ είναι το n-διάστατο μέτρο Lebesgue του Q. Η ρ είναι όντως μετρική στην S^{n-1} (άσκηση). Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x, y) = \theta$ τότε

$$\|x - y\|_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2}, \tag{3.1.4}$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x, y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leqslant \|x-y\|_2 \leqslant \rho(x,y). \tag{3.1.5}$$

2. *Ο χώρος του Gauss.* Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική $\|\cdot\|_2$ και το μέτρο πιθανότητας γ_n που έχει πυκνότητα την συνάρτηση

$$g_n(x) = (2\pi)^{-n/2}e^{-\|x\|_2^2/2}. \tag{3.1.6}$$

Δηλαδή, αν A είναι ένα σύνολο Borel στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\gamma_n(A) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_A e^{-\|x\|_2^2/2}dx. \tag{3.1.7}$$

Το γ_n είναι το n-διάστατο *μέτρο του Gauss* και ο χώρος πιθανότητας $\Gamma_n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$ είναι ο n-διάστατος *χώρος του Gauss*.

Το μέτρο του Gauss έχει δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες: από την μία πλευρά είναι μέτρο γινόμενο, πιό συγκεκριμένα $\gamma_n = \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_1$. Από την άλλη πλευρά είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς: αν $U \in O(n)$ και A είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned}\gamma_n(U(A)) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{U(A)} e^{-\|x\|_2^2/2}dx = \frac{|\det U|}{(2\pi)^{n/2}}\int_A e^{-\|Uy\|_2^2/2}dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_A e^{-\|y\|_2^2/2}dy = \gamma_n(A).\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

3. *Ο διακριτός κύβος.* Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1,1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1,1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στον E_2^n ορίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n που δίνει μάζα 2^{-n} σε κάθε σημείο. Δηλαδή, αν A είναι ένα υποσύνολο του E_2^n, τότε

$$\mu_n(A) = \frac{|A|}{2^n}, \tag{3.1.9}$$

όπου με $|A|$ (αλλά και με $\text{card}(A)$) συμβολίζουμε τον πληθάριθμο ενός πεπερασμένου συνόλου.

Ο E_2^n γίνεται μετρικός χώρος με απόσταση την

$$d_n(x,y) = \frac{1}{n}\text{card}\{i \leqslant n : x_i \neq y_i\} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \tag{3.1.10}$$

3.1β′ Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα

Ορισμός 3.1.3 (t-περιοχή)**.** Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Για κάθε μη κενό $A\in\mathcal{B}(X)$ και για κάθε $t>0$ ορίζουμε την *t-περιοχή* του A ως εξής:

$$A_t=\{x\in X:\, d(x,A)\leqslant t\}. \tag{3.1.11}$$

Ορισμός 3.1.4 (επιφάνεια κατά Minkowski)**.** *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω μ ένα (όχι αναγκαστικά πεπερασμένο) μέτρο στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$. Η επιφάνεια ενός Borel υποσυνόλου A του X ορίζεται ως εξής:*

$$\partial(A)=\liminf_{t\to 0^+}\frac{\mu(A_t\setminus A)}{t}, \tag{3.1.12}$$

όπου A_t είναι η t-περιοχή του A. Αν $\mu(A)<\infty$ (το οποίο φυσικά ισχύει αν ο (X,d,μ) είναι μετρικός χώρος πιθανότητας) τότε

$$\partial(A)=\liminf_{t\to 0^+}\frac{\mu(A_t)-\mu(A)}{t}. \tag{3.1.13}$$

Σε κάθε μετρικό χώρο πιθανότητας μπορούμε να διατυπώσουμε το **ισοπεριμετρικό πρόβλημα**:

> Για δοσμένο $0<\alpha<1$, να βρεθεί το
>
> $$\inf\{\partial(A):A\in\mathcal{B}(X),\mu(A)\geqslant\alpha\} \tag{3.1.14}$$
>
> και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σύνολα A για τα οποία πιάνεται αυτό το infimum.

Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε αντίστοιχο πρόβλημα για το μέτρο των t-περιοχών, σταθεροποιώντας $t>0$:

> Για δοσμένα $0<\alpha<1$ και $t>0$, να βρεθεί το
>
> $$\inf\{\mu(A_t):A\in\mathcal{B}(X),\mu(A)\geqslant\alpha\} \tag{3.1.15}$$
>
> και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σύνολα A για τα οποία πιάνεται αυτό το infimum.

Το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα $A\in\mathcal{B}(X)$ για τα οποία $\mu(A)\geqslant\alpha$ (και όχι $\mu(A)=\alpha$) για καθαρά τεχνικούς λόγους: στο γενικό πλαίσιο που συζητάμε, μπορεί, για κάποια τιμή του α, να μην υπάρχουν σύνολα $A\in\mathcal{B}(X)$ ώστε $\mu(A)=\alpha$.

Οι λύσεις του δεύτερου προβλήματος μπορεί να είναι διαφορετικές για διαφορετικές τιμές του t. Στα κλασικά όμως παραδείγματα δεν εξαρτώνται από το t και αυτό σημαίνει ότι είναι και λύσεις του πρώτου προβλήματος. Είναι μάλιστα, όπως θα δούμε, πολύ «συμμετρικά υποσύνολα» του X, το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε σχετικά εύκολα να υπολογίσουμε το μέτρο της t-περιοχής τους και την επιφάνειά τους.

3.2 Κλασικές ισοπεριμετρικές ανισότητες

Σε αυτήν την παράγραφο θα συζητήσουμε το ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τα κλασικά παραδείγματα μετρικών χώρων πιθανότητας που ορίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο: την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}, τον χώρο του Gauss Γ_n και τον διακριτό κύβο E_2^n.

3.2α΄ Ισοπεριμετρική ανισότητα στην σφαίρα

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στην σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

> Δίνονται $\alpha \in (0,1)$ και $t > 0$. Ανάμεσα σε όλα τα Borel υποσύνολα A της σφαίρας για τα οποία $\sigma(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα για τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_t)$ της t-περιοχής του A.

Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.1 (ισοπεριμετρική ανισότητα στην σφαίρα). *Έστω $\alpha \in (0,1)$ και έστω*

$$B(x,r) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x,y) \leqslant r\}$$

μια μπάλα στην S^{n-1} με ακτίνα $r > 0$ που επιλέγεται ώστε $\sigma(B(x,r)) = \alpha$. Τότε, για κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \alpha$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\sigma(A_t) \geqslant \sigma\big(B(x,r)_t\big) = \sigma\big(B(x,r+t)\big). \tag{3.2.1}$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α και οποιοδήποτε $t > 0$ οι γεωδαισιακές μπάλες μέτρου α δίνουν την λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς την διάσταση (μια περιγραφή του επιχειρήματος δίνεται στο παράρτημα). Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $\alpha = 1/2$. Αν $\sigma(A) = 1/2$ και $t > 0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του A_t χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_t) \geqslant \sigma\left(B\big(x, \frac{\pi}{2} + t\big)\right) \tag{3.2.2}$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in S^{n-1}$. Εκτιμώντας από κάτω το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας οδηγούμαστε στο εξής:

Θεώρημα 3.2.2. *Εστω $A \subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ και έστω $t > 0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geqslant 1 - \sqrt{\pi/8}\exp(-t^2 n/2). \tag{3.2.3}$$

Απόδειξη. Λόγω της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας, αρκεί να φράξουμε από κάτω το $\sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + t))$. Παρατηρήστε ότι

$$\sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + t)) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}+t} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta}, \tag{3.2.4}$$

οπότε θέτοντας $h(t,n) = 1 - \sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + t))$, ζητάμε άνω φράγμα γιά την

$$h(t,n) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}+t}^{\pi} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta} = \frac{\int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \phi d\phi}{2I_n}, \tag{3.2.5}$$

όπου

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \phi d\phi. \tag{3.2.6}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \phi\sqrt{n}$ παίρνουμε

$$h(t,n) = \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \cos^n(s/\sqrt{n}) ds. \tag{3.2.7}$$

Συγκρίνοντας τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $\cos s$ και $\exp(-s^2/2)$ βλέπουμε οτι

$$\cos s \leqslant \exp(-s^2/2) \tag{3.2.8}$$

στο $[0, \pi/2]$, επομένως

$$\begin{aligned} h(t,n) &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^{(\frac{\pi}{2}-t)\sqrt{n}} \exp(-(s+t\sqrt{n})^2/2) ds \\ &\leqslant \frac{\exp(-t^2 n/2)}{2\sqrt{n}I_n} \int_0^{\infty} \exp(-s^2/2) ds \\ &= \frac{\sqrt{\pi/8}}{\sqrt{n}I_n} \exp(-t^2 n/2). \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Γιά την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί λοιπόν να δείξουμε οτι $\sqrt{n}I_n \geqslant 1$ γιά κάθε $n \geqslant 1$. Γιά τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι από την αναδρομική σχέση $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ έπεται ότι

$$\sqrt{n+2}I_{n+2} = \sqrt{n+2}\frac{n+1}{n+2} I_n = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}} I_n \geqslant \sqrt{n}I_n, \tag{3.2.10}$$

το οποίο σημαίνει οτι αρκεί να ελέγξουμε τις

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos\phi \, d\phi = 1 \geqslant 1 \tag{3.2.11}$$

και

$$\sqrt{2}I_2 = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi \, d\phi = \sqrt{2}\frac{\pi}{4} \geqslant 1. \tag{3.2.12}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση. Αυτό που έχει σημασία σε σχέση με την εκτίμηση του θεωρήματος 3.2.2 είναι ότι, όσο μικρό $t > 0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-t^2 n/2)$ τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$ και μάλιστα με πολύ γρήγορο ρυθμό (εκθετικά ως προς n). Συνεπώς, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την t-περιοχή οποιουδήποτε υποσυνόλου A της S^{n+1} με $\sigma(A) = 1/2$ είναι «σχεδόν μηδενικό» αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη.

3.2β′ Ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss είναι η εξής.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $\alpha \in (0,1)$, $\theta \in S^{n-1}$, και $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta\rangle \leqslant \lambda\}$ ένας ημίχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(H) = \alpha$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ και για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \alpha$ ισχύει*

$$\gamma_n(A_t) \geqslant \gamma_n(H_t). \tag{3.2.13}$$

Στο παράρτημα περιγράφεται μια απόδειξη που βασίζεται στην «παρατήρηση του Poincaré» και ουσιαστικά ανάγει το πρόβλημα στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για την σφαίρα. Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι η παρακάτω ανισότητα, η οποία είναι συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.3.

Θεώρημα 3.2.4. *Αν $\gamma_n(A) \geqslant 1/2$, τότε για κάθε $t > 0$*

$$1 - \gamma_n(A_t) \leqslant \frac{1}{2}\exp(-t^2/2). \tag{3.2.14}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.2.3 γνωρίζουμε ότι

$$1 - \gamma_n(A_t) \leqslant 1 - \gamma_n(H_t) \tag{3.2.15}$$

όπου H ημίχωρος μέτρου $1/2$. Αφού το γ_n είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leqslant 0\}$, οπότε ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς $x_2, \dots, x_n$ βλέπουμε ότι

$$1 - \gamma_n(H_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds. \tag{3.2.16}$$

Παραγωγίζοντας δείχνουμε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-s^2/2} ds \tag{3.2.17}$$

είναι φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Από την $F(t) \leqslant F(0)$ προκύπτει το συμπέρασμα. □

3.2γ΄ Η ισοπεριμετρική ανισότητα στον E_2^n

Η t-περιοχή ενός $A \subseteq E_2^n$ είναι ως συνήθως το σύνολο $A_t = \{x \in E_2^n : d_n(x, A) \leqslant t\}$. Οι τιμές που μπορεί να πάρει η d_n είναι πεπερασμένες το πλήθος: $0, 1/n, 2/n, \ldots, 1$. Επομένως, αυτές είναι οι τιμές του t γιά τις οποίες η t-περιοχή του A παρουσιάζει ενδιαφέρον, με την έννοια ότι το A_t παραμένει αμετάβλητο όταν το t παίρνει τιμές σε ένα διάστημα της μορφής $[k/n, (k+1)/n)$.

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα είναι λοιπόν το εξής. Μας δίνουν έναν φυσικό $m = 1, 2, \ldots, 2^n$ και κάποιο $t = k/n$, $k = 1, \ldots, n$. Γιά ποιό σύνολο A με πλήθος στοιχείων m είναι η k/n-περιοχή του A η μικρότερη δυνατή; Η απάντηση είναι ότι το A θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν «λιγότερα κενά». Αν περιέχει μιά n-άδα $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε θα πρέπει να περιέχει κατά σειρά προτεραιότητας και τις «γειτονικές» της n-άδες, αυτές δηλαδή που διαφέρουν από την x σε μία συντεταγμένη, δύο συντεταγμένες, κ.ο.κ. (εφόσον το πλήθος των στοιχείων του A επαρκεί). Αυτό, γιατί η παραμικρή επέκταση του A θα τις συμπεριλάβει ούτως ή άλλως. Τα πιό οικονομικά σύνολα είναι οι d_n-μπάλες (οι λεγόμενες Hamming μπάλες του E_2^n). Αποδεικνύεται η ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον E_2^n.

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $m = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}$ στοιχεία. Τότε, γιά κάθε $s = 1, \ldots, n-l$, έχουμε*

$$\mu_n(A_{s/n}) \geqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{l+s} \binom{n}{k} = \mu_n(B(x, l/n)_{s/n}) = \mu_n(B(x, (l+s)/n)), \tag{3.2.18}$$

όπου x τυχόν στοιχείο του E_2^n. □

Η ισοπεριμετρική αυτή ανισότητα οδηγεί σε μια προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για τον E_2^n.

Θεώρημα 3.2.6. *Αν $\mu_n(A) \geqslant 1/2$ και $t > 0$, τότε*

$$\mu_n(A_t^c) \leqslant \frac{1}{2} \exp(-2t^2 n).$$

Το Θεώρημα 3.2.6 ερμηνεύεται ως εξής: για να εκτιμήσουμε το $\mu_n(A_t)$ αρκεί να θέσουμε $l = n/2$ και $s = tn$ στο θεώρημα 3.2.5. Τότε βλέπουμε ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{j=(\frac{1}{2}+t)n}^{n} \binom{n}{j}, \tag{3.2.19}$$

το οποίο φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς $n \to \infty$, γιατί οι «ακραίοι» διωνυμικοί συντελεστές είναι πολύ μικροί σε σύγκριση με τους «μεσαίους» όταν το n είναι μεγάλο.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.5 είναι συνδυαστική και γίνεται με επαγωγή ως προς n (περιγράφεται στο παράρτημα).

3.3 Συνάρτηση συγκέντρωσης

Ορισμός 3.3.1 (συνάρτηση συγκέντρωσης)**.** *Έστω (X,d,μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Η συνάρτηση συγκέντρωσης του (X,d,μ) ορίζεται στο $(0,\infty)$ από την*

$$\alpha_\mu(t) := \sup\{1-\mu(A_t) : \mu(A) \geqslant 1/2\}. \tag{3.3.1}$$

Η συνάρτηση α_μ είναι προφανώς φθίνουσα και, όπως δείχνει η επόμενη πρόταση, $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha_\mu(t) = 0$.

Πρόταση 3.3.2. *Σε κάθε μετρικό χώρο πιθανότητας (X,d,μ) ισχύει*

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_\mu(t) = 0. \tag{3.3.2}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $x \in X$ και $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$. Από το γεγονός ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x,n)$ έπεται ότι υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu(B(x,r)) > 1-\varepsilon. \tag{3.3.3}$$

Τότε, για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ με $\mu(A) \geqslant 1/2$ έχουμε $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$, απ' όπου έπεται ότι $B(x,r) \subseteq A_{2r}$. [Πράγματι, υπάρχει $a \in A$ ώστε $d(x,a) \leqslant r$ και τότε, για κάθε $y \in B(x,r)$ έχουμε $d(y,a) \leqslant d(y,x) + d(x,a) \leqslant 2r$, δηλαδή $y \in A_{2r}$]. Τότε, για κάθε $t \geqslant 2r$ έχουμε

$$1-\mu(A_t) \leqslant 1-\mu(A_{2r}) \leqslant 1-\mu(B(x,r)) < \varepsilon, \tag{3.3.4}$$

άρα $\alpha_\mu(t) \leqslant \varepsilon$. □

Ορισμός 3.3.3 (συγκέντρωση του μέτρου)**.** Λέμε ότι υπάρχει «συγκέντρωση του μέτρου» στον μετρικό χώρο πιθανότητας (X,d,μ) αν η $\alpha_\mu(t)$ φθίνει γρήγορα καθώς το $t \to \infty$. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Λέμε ότι το μ έχει *κανονική συγκέντρωση* στον (X,d) αν υπάρχουν σταθερές $C,c>0$ ώστε, για κάθε $t>0$,

$$\alpha_\mu(t) \leqslant Ce^{-ct^2}. \tag{3.3.5}$$

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου (πιο συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από τις λύσεις των αντίστοιχων ισοπεριμετρικών προβλημάτων) δείχνουν ότι αυτό ισχύει για την σφαίρα, για τον διακριτό κύβο και για τον χώρο του Gauss. Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.3.1 της συνάρτησης συγκέντρωσης, σε αυτούς τους χώρους έχουμε:

(i) Για την σφαίρα (S^{n-1},ρ,σ) ισχύει

$$\alpha_\sigma(t) \leqslant \sqrt{\pi/8}\exp(-t^2n/2).$$

(ii) Για τον χώρο του Gauss $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$ ισχύει

$$\alpha_{\gamma_n}(t) \leqslant \frac{1}{2}\exp(-t^2/2).$$

(iii) Για τον διακριτό κύβο (E_2^m, d_n, μ_n) ισχύει

$$\alpha_{\mu_n}(t) \leqslant \frac{1}{2}\exp(-2t^2 n).$$

(α) Λέμε ότι το μ έχει *εκθετική συγκέντρωση* στον (X,d) αν υπάρχουν σταθερές $C,c>0$ ώστε, για κάθε $t>0$,

$$\alpha_\mu(t) \leqslant Ce^{-ct}. \tag{3.3.6}$$

Πολλές από τις εφαρμογές της συγκέντρωσης του μέτρου βασίζονται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1, δηλαδή αν $|f(x)-f(y)| \leqslant d(x,y)$ για κάθε $x,y\in X$, τότε*

$$\mu\left(\{x\in X : |f(x)-\mathrm{med}(f)|>t\}\right) \leqslant 2\alpha_\mu(t), \tag{3.3.7}$$

όπου $\mathrm{med}(f)$ είναι ο μέσος Lévy της f.

Σημείωση. Μέσος Lévy $\mathrm{med}(f)$ της f είναι ένας αριθμός για τον οποίο

$$\mu(\{f\geqslant \mathrm{med}(f)\}) \geqslant 1/2 \text{ και } \mu(\{f\leqslant \mathrm{med}(f)\}) \geqslant 1/2. \tag{3.3.8}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.4. Θέτουμε $A=\{x : f(x)\geqslant \mathrm{med}(f)\}$ και $B=\{x : f(x)\leqslant \mathrm{med}(f)\}$. Αν $y\in A_t$ τότε υπάρχει $x\in A$ με $d(x,y)\leqslant t$, οπότε

$$f(y)=f(y)-f(x)+f(x)\geqslant -d(y,x)+\mathrm{med}(f)\geqslant \mathrm{med}(f)-t \tag{3.3.9}$$

αφού η f είναι 1-Lipschitz. Ομοίως, αν $y\in B_t$ τότε υπάρχει $x\in B$ με $d(x,y)\leqslant t$, οπότε

$$f(y)=f(y)-f(x)+f(x)\leqslant d(y,x)+\mathrm{med}(f)\leqslant \mathrm{med}(f)+t. \tag{3.3.10}$$

Δηλαδή, αν $y\in A_t\cap B_t$ τότε $|f(x)-\mathrm{med}(f)|\leqslant t$. Με άλλα λόγια,

$$\{x\in X : |f(x)-\mathrm{med}(f)|>t\}\subseteq (A_t\cap B_t)^c = A_t^c\cup B_t^c. \tag{3.3.11}$$

Όμως, από τον ορισμό της συνάρτησης συγκέντρωσης έχουμε $\mu(A_t)\geqslant 1-\alpha_\mu(t)$ και $\mu(B_t)\geqslant 1-\alpha_\mu(t)$. Έπεται ότι

$$\mu\left(\{|f-\mathrm{med}(f)|>t\}\right)\leqslant (1-\mu(A_t))+(1-\mu(B_t))\leqslant 2\alpha_\mu(t). \tag{3.3.12}$$

Πόρισμα 3.3.5. *Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f: X \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$, δηλαδή αν $|f(x)-f(y)| \leqslant \|f\|_{\mathrm{Lip}} d(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$, τότε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leqslant 2\alpha_\mu(t/\|f\|_{\mathrm{Lip}}), \tag{3.3.13}$$

όπου $\mathrm{med}(f)$ είναι μέσος Lévy της f.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση συγκέντρωσης φθίνει πολύ γρήγορα, το Θεώρημα 3.3.4 δείχνει ότι οι 1-Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις είναι «σχεδόν σταθερές» σε «σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Ισχύει μάλιστα και το αντίστροφο.

Θεώρημα 3.3.6. *Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν για κάποιο $\eta > 0$ και κάποιο $t > 0$ ισχύει*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leqslant \eta \tag{3.3.14}$$

για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, τότε $\alpha_\mu(t) \leqslant \eta$.

Απόδειξη. Έστω A Borel υποσύνολο του X με $\mu(A) \geqslant 1/2$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = d(x,A)$. Η f είναι 1-Lipschitz και $\mathrm{med}(f) = 0$ γιατί η f παίρνει μη αρνητικές τιμές και $\mu(\{x : f(x) = 0\}) \geqslant 1/2$. Από την υπόθεση παίρνουμε

$$\mu(\{x \in X : d(x,A) > t\}) \leqslant \eta, \tag{3.3.15}$$

δηλαδή $1 - \mu(A_t) \leqslant \eta$. Έπεται ότι $\alpha_\mu(t) \leqslant \eta$. □

3.4 Προσεγγιστικές ισοπεριμετρικές ανισότητες

3.4α΄ Η συνάρτηση συγκέντρωσης της σφαίρας

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2 βασίζεται πολύ ισχυρά στην σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Για τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νού μας είναι αρκετή μια ανισότητα της μορφής

$$\sigma(A_t) \geqslant 1 - c_1 \exp(-c_2 t^2 n) \tag{3.4.1}$$

και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος. Θα δώσουμε μια απλή απόδειξη εκτίμησης «αυτού του τύπου» χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski.

Λήμμα 3.4.1. *Θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Δηλαδή, $\mu(A) = |A|/|B_2^n|$ για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq B_2^n$. Αν $A, C \subseteq B_2^n$ είναι Borel σύνολα και*

$$d(A,C) := \min\{\|a-c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0, \tag{3.4.2}$$

τότε

$$\min\{\mu(A), \mu(C)\} \leqslant \exp(-\rho^2 n/8). \tag{3.4.3}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+C}{2}$. Από την ανισότητα Brunn–Minkowski παίρνουμε $\left|\frac{A+C}{2}\right| \geqslant \min\{|A|, |C|\}$. Συνεπώς,

$$\mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \geqslant \min\{\mu(A), \mu(C)\}. \tag{3.4.4}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \in A$ και $c \in C$, ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει

$$\|a+c\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|c\|_2^2 - \|a-c\|_2^2 \leqslant 4 - \rho^2, \tag{3.4.5}$$

επομένως

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}} B_2^n. \tag{3.4.6}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\min\big\{\mu(A), \mu(C)\big\} \leqslant \mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \leqslant \left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leqslant \exp(-\rho^2 n/8). \tag{3.4.7}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2: Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Θέτουμε $C = S^{n-1} \setminus A_t$ και θεωρούμε τα υποσύνολα

$$A_1 = \{\rho a : a \in A, 1/2 \leqslant \rho \leqslant 1\} \text{ και } C_1 = \{\rho a : a \in C, 1/2 \leqslant \rho \leqslant 1\} \tag{3.4.8}$$

της B_2^n. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$d(A_1, C_1) \geqslant \sin\frac{t}{2} \geqslant \frac{t}{\pi}. \tag{3.4.9}$$

Από το Λήμμα 3.4.1 συμπεραίνουμε ότι

$$|C_1| \leqslant \exp(-d^2 n/8)|B_2^n| \leqslant \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right)|B_2^n|. \tag{3.4.10}$$

Όμως, από τον ορισμό του σ έχουμε $|B_2^n|\sigma(C) = |\tilde{C}|$ και $|C_1| = (1-2^{-n})|\tilde{C}|$. Έπεται ότι

$$\sigma(A_t^c) = \sigma(C) \leqslant \frac{1}{1-2^{-n}} \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right). \tag{3.4.11}$$

Δηλαδή,

$$\sigma(A_t) \geqslant 1 - c_1 \exp(-c_2 t^2 n) \tag{3.4.12}$$

όπου $c_1 = 2$ και $c_2 = 1/(8\pi^2)$. Αυτή είναι η ανισότητα του Θεωρήματος 3.2.2 αν εξαιρέσουμε τις ακριβείς τιμές των σταθερών c_1 και c_2. □

3.4β′ Η συνάρτηση συγκέντρωσης του χώρου του Gauss

Όπως και στην περίπτωση της σφαίρας, η απόδειξη της προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας του πορίσματος 3.2.4 χρησιμοποιεί ισχυρά την ισοπεριμετρική ανισότητα του θεωρήματος 3.2.3. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε απευθείας την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά το χώρο του Gauss.

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω A μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} d\gamma_n(x) \leqslant \frac{1}{\gamma_n(A)}, \tag{3.4.13}$$

όπου $d(x,A) = \inf\{\|x-y\|_2 : y \in A\}$. Επομένως, αν $\gamma_n(A) = 1/2$ τότε

$$1 - \gamma_n(A_t) \leqslant 2\exp(-t^2/4) \tag{3.4.14}$$

γιά κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $g_n(x)$ την συνάρτηση $(2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|_2^2/2)$, και θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = e^{d(x,A)^2/4} g_n(x) \;\;,\;\; g(x) = \chi_A(x) g_n(x) \;\;,\;\; m(x) = g_n(x). \tag{3.4.15}$$

Γιά κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned} (2\pi)^n f(x)g(y) &= e^{d(x,A)^2/4} e^{-\|x\|_2^2/2} e^{-\|y\|_2^2/2} \\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|x-y\|_2^2}{4} - \frac{\|x\|_2^2}{2} - \frac{\|y\|_2^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\|x+y\|_2^2}{4}\right) \\ &= \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2^2\right)\right)^2 \\ &= (2\pi)^n \left(m\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2, \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου και την $d(x,A) \leqslant \|x-y\|_2$. Παρατηρώντας ότι $g(y) = 0$ αν $y \notin A$, βλέπουμε ότι οι f, g, m ικανοποιούν τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa-Leindler με $\lambda = 1/2$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το Θεώρημα **;;** και έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} g_n(dx)\right)\gamma_n(A) &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\gamma_n(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)d\gamma_n(x)\right) \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} m(x)d\gamma_n(x)\right)^2 = 1. \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό του θεωρήματος. Γιά τον δεύτερο, παρατηρούμε ότι αν $\gamma_n(A) = 1/2$ τότε

$$e^{t^2/4}\gamma_n(x : d(x, A) > t) \leqslant \int e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(dx) \leqslant \frac{1}{\gamma_n(A)} = 2. \tag{3.4.18}$$

Δηλαδή, $\gamma_n(A_t^c) \leqslant 2\exp(-t^2/4)$. □

3.4γ΄ Η συνάρτηση συγκέντρωσης του διακριτού κύβου

Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1, 1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1, 1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στο E_2^n ορίζουμε το κανονικό μέτρο πιθανότητας μ_n που δίνει μάζα 2^{-n} σε κάθε σημείο. Για κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ θέτουμε

$$\phi_A(x) = \inf\{\|x - y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A)\}. \tag{3.4.19}$$

Το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου είναι το εξής.

Θεώρημα 3.4.3. *Για κάθε $A \subseteq E_2^n$,*

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}. \tag{3.4.20}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς το πλήθος των σημείων του A. Αν $\mathrm{card}(A) = 1$ δηλαδή $A = \{y\}$, τότε

$$\phi_A(x) = \inf\{\|x - z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A) = \{y\}\} = \|x - y\|_2. \tag{3.4.21}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) &= \mathbb{E}\left(e^{\|x-y\|_2^2/8}\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{x\in E_2^n} e^{\|x-y\|_2^2/8}. \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

Κάθε $x \in E_2^n$ διαφέρει από το y σε i θέσεις, $i = 0, 1, \ldots, n$. Το πλήθος των $x \in E_2^n$ που διαφέρουν σε i θέσεις από το y είναι $\binom{n}{i}$. Παρατηρούμε ότι $\|x - y\|_2^2 = 4i$ όταν το x διαφέρει απο το y σε i θέσεις. Άρα,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\|x-y\|_2^2/8} &= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}e^{i/2} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(1 + e^{1/2}\right)^n = \left(\frac{1 + e^{1/2}}{2}\right)^n \\ &\leqslant 2^n = \frac{1}{\mu_n(A)}, \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

αφού $e^{1/2} \leqslant e \leqslant 3$.

Έστω τώρα ότι $\mathrm{card}(A) \geqslant 2$. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $n = 1$. Αναγκαστικά έχουμε $A = E_1$, επομένως $\phi_A(x) = 0$ για κάθε $x \in E_1$. Άρα,

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) = \mathbb{E}e^0 = 1 = 1/\mu_1(A). \tag{3.4.24}$$

Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε $A \subseteq E_{n+1}$ με $\mathrm{card}(A) \geqslant 2$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$A = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_{-1} \times \{-1\}) \tag{3.4.25}$$

όπου $A_1, A_{-1} \neq \emptyset$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\mathrm{card}(A_{-1}) \leqslant \mathrm{card}(A_1)$.

Λήμμα 3.4.4. *Για κάθε $x \in E_2^n$,*

$$\phi_A((x,1)) \leqslant \phi_{A_1}(x). \tag{3.4.26}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\|x-y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A_1)\} \subseteq \{\|(x,1)-z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A)\}. \tag{3.4.27}$$

Έστω $y \in \mathrm{conv}(A_1)$. Τότε, $y = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ όπου $t_i \geqslant 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ και $x_i \in A_1$. Τότε όμως $(x_i, 1) \in A$ και

$$\sum_{i=1}^m t_i(x_i,1) = \Big(\sum_{i=1}^m t_i x_i, \sum_{i=1}^m t_i\Big) = (y,1), \tag{3.4.28}$$

δηλαδή $(y,1) \in \mathrm{conv}(A)$. Αφού $\|x-y\|_2 = \|(x,1)-(y,1)\|_2$ και

$$\|(x,1)-(y,1)\|_2 \in \{\|(x,1)-z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A)\}, \tag{3.4.29}$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 3.4.5. *Για κάθε $x \in E_2^n$ και για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$,*

$$\phi_A^2((x,-1)) \leqslant 4a^2 + a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x). \tag{3.4.30}$$

Απόδειξη. Έστω $z_i \in \mathrm{conv}(A_i)$ $(i = 1, -1)$. Τότε, όπως προηγουμένως, $(z_i, i) \in \mathrm{conv}(A)$. Το $\mathrm{conv}(A)$ είναι κυρτό, άρα

$$z := a(z_1,1) + (1-a)(z_{-1},-1) = (az_1 + (1-a)z_{-1}, 2a-1) \in \mathrm{conv}(A). \tag{3.4.31}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \|(x,-1)-z\|_2^2 &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, -2a)\|_2^2 \\ &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, 0)\|_2^2 + \|(0,-2a)\|_2^2 \\ &\leqslant (a\|x-z_1\|_2 + (1-a)\|x-z_{-1}\|_2)^2 + 4a^2 \\ &\leqslant a\|x-z_1\|_2^2 + (1-a)\|x-z_{-1}\|_2^2 + 4a^2. \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

Αφού τα $z_i \in \mathrm{conv}(A_i)$ ήταν τυχόντα, έπεται ότι

$$\phi_A^2(x,-1) \leqslant a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x) + 4a^2. \qquad \square \tag{3.4.33}$$

Χρησιμοποιώντας τα δύο Λήμματα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x\in E_{n+1}} e^{\phi_A^2(x)/8} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x\in E_n} e^{\phi_A^2((x,1))/8} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x\in E_n} e^{\phi_A^2((x,-1))/8} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x\in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} + \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \sum_{x\in E_n} e^{a\phi_{A_1}^2(x)/8+(1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x)/8} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x\in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} \\ &+ \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \left(\sum_{x\in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8}\right)^a \left(\sum_{x\in E_n} e^{\phi_{A_{-1}}^2(x)/8}\right)^{1-a} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8}) + \frac{1}{2}e^{a^2/2}\left(\mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8})\right)^a \left(\mathbb{E}(e^{\phi_{A_{-1}}^2/8})\right)^{1-a}.\end{aligned} \tag{3.4.34}$$

Θέτουμε

$$u_1 = \mathbb{E}\left(e^{\phi_{A_1}^2/8}\right) \quad , \quad v_1 = \frac{1}{\mu_n(A_1)} \tag{3.4.35}$$

και

$$u_{-1} = \mathbb{E}\left(e^{\phi_{A_{-1}}^2/8}\right) \quad , \quad v_{-1} = \frac{1}{\mu_n(A_{-1})}. \tag{3.4.36}$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $u_1 \leqslant v_1$ και $u_{-1} \leqslant v_{-1}$. (επίσης, η $\mathrm{card}(A_{-1}) \leqslant \mathrm{card}(A_1)$ γράφεται $v_1 \leqslant v_{-1}$). Άρα η προηγούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &\leqslant \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(u_1)^a(u_{-1})^{1-a} \\ &\leqslant \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(v_1)^a(v_{-1})^{1-a} \\ &\leqslant \frac{v_1}{2}[1 + e^{a^2/2}(v_1/v_{-1})^{a-1}].\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

Η τελευταία ποσότητα γίνεται ελάχιστη για $a = -\ln(v_1/v_{-1})$. Η τιμή $-\ln(v_1/v_{-1})$ είναι περίπου ίση με $1-v_1/v_{-1}$. Επιλέγουμε $a_0 = 1-v_1/v_{-1}$. Αφού $v_1 \leqslant v_{-1}$ έχουμε $0 \leqslant a_0 \leqslant 1$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \leqslant \frac{v_1}{2}[1 + e^{a_0^2/2}(1-a_0)^{a_0-1}]. \tag{3.4.38}$$

Λήμμα 3.4.6. *Για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$ έχουμε*

$$1 + e^{a^2/2}(1-a)^{a-1} \leqslant \frac{4}{2-a}. \tag{3.4.39}$$

Απόδειξη. Απλές πράξεις δείχνουν ότι η ανισότητα που ζητάμε είναι ισοδύναμη με την

$$g(a) = \ln(2+a) - \ln(2-a) - a^2/2 - (a-1)\ln(1-a) \geqslant 0. \tag{3.4.40}$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $g'' \geqslant 0$ και $g'(0) = 0$. Άρα η g είναι αύξουσα στο $[0,1]$. Αφού $g(0) = 0$, έπεται το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.4.6 έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) &\leqslant \frac{v_1}{2}\frac{4}{2-a_0} = \frac{2v_1}{1+v_1/v_{-1}} \\ &= \frac{2}{1/v_1 + 1/v_{-1}} = \frac{2}{\mu_n(A_1)+\mu_n(A_{-1})} \\ &= \frac{1}{\mu_{n+1}(A)}. \end{aligned} \tag{3.4.41}$$

Η τελευταία ισότητα είναι φανερή αφού $\mu_{n+1}(A_i \times \{i\}) = \mu_n(A_i)/2$, $i = \pm 1$. Έτσι ολοκληρώνονται το επαγωγικό βήμα και η απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.3. □

Πόρισμα 3.4.7. *Για όλα τα $t > 0$, έχουμε*

$$\mu_n(\phi_A \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8}. \tag{3.4.42}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.4.3 έχουμε $\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}$. Άρα,

$$\begin{aligned} e^{t^2/8}\mu_n(\phi_A \geqslant t) &\leqslant \int_{\{\phi_A \geqslant t\}} e^{t^2/8} \leqslant \int_{\{\phi_A \geqslant t\}} e^{\phi_A^2/8} \\ &\leqslant \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}. \end{aligned} \tag{3.4.43}$$

Έστω A μη κενό υποσύνολο του E_2^n. Η συνάρτηση ϕ_A του Θεωρήματος 3.4.3 και η συνάρτηση απόστασης από το A

$$d_n(x,A) = \min\left\{ \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| : y \in A \right\} \tag{3.4.44}$$

συγκρίνονται σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.4.8. *Γιά κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ έχουμε*

$$2\sqrt{n}d_n(x,A) \leqslant \phi_A(x) \quad , \quad x \in E_2^n. \tag{3.4.45}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in E_2^n$. Γιά κάθε $y \in A$ ισχύει

$$\langle x-y, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i(x_i-y_i) = 2nd_n(x,y) \geqslant 2nd_n(x,A). \tag{3.4.46}$$

Από την (3.4.46) έπεται ότι γιά κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$

$$\sqrt{n}\|x-y\|_2 \geqslant \langle x-y, x\rangle \geqslant 2nd_n(x,A). \tag{3.4.47}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.4.45). □

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα δείχνουμε την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον E_2^n:

Θεώρημα 3.4.9. *Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $\mu_n(A) = 1/2$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(A_t) \geqslant 1 - 2\exp(-t^2 n/2). \tag{3.4.48}$$

Απόδειξη. Αν $x \notin A_t$, τότε $d_n(x,A) \geqslant t$ και το Λήμμα 3.4.8 δείχνει ότι $\phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}$.

Ομως, από το Θεώρημα 3.4.3 έχουμε

$$e^{t^2n/2}\mu_n(x : \phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}) \leqslant \int_{E_2^n} \exp(\phi_A^2(x)/8)d\mu_n(x) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} = 2, \tag{3.4.49}$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leqslant \mu_n(x : \phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}) \leqslant 2\exp(-t^2n/2). \quad \square \tag{3.4.50}$$

Το Θεώρημα 3.4.9 έχει σαν συνέπεια την συγκέντρωση των κυρτών Lipschitz συναρτήσεων γύρω από τον μέσο Lévy τους.

Θεώρημα 3.4.10. *Θεωρούμε μια κυρτή Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με σταθερά Lipschitz σ. Έστω M ένας μέσος Lévy της f στον E_2^n. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(\{|f-M| \geqslant t\}) \leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{3.4.51}$$

Απόδειξη. Για τον M ισχύουν οι $\mu_n(\{f \geqslant M\}) \geqslant 1/2$ και $\mu_n(\{f \leqslant M\}) \geqslant 1/2$.

Θέτουμε $A = \{f \leqslant M\}$. Αφού η f είναι κυρτή, για κάθε $y \in \mathrm{conv}A$ έχουμε $f(y) \leqslant M$. Αν λοιπόν $f(x) \geqslant M + t$ για κάποιο $x \in E_2^n$, τότε

$$f(x) \geqslant M + t \geqslant f(y) + t \tag{3.4.52}$$

για κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$. Άρα, $\sigma\|x-y\|_2 \geqslant |f(x)-f(y)| \geqslant t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\phi_A(x) \geqslant t/\sigma. \tag{3.4.53}$$

Από το Πόρισμα 3.4.7 και από την $\mu_n(A) \geqslant 1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f \geqslant M+t\}) &\leqslant \mu_n(\{\phi_A \geqslant t/\sigma\}) \\ &\leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8\sigma^2} \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned} \tag{3.4.54}$$

Έστω $t > 0$ και $B = \{f \leqslant M - t\}$. Αν $u < t$, όπως πριν ελέγχουμε ότι

$$f(x) \geqslant M - t + u \implies \phi_B(x) \geqslant u/\sigma \tag{3.4.55}$$

και με χρήση του Πορίσματος 3.4.7 έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f(x) \geqslant M\}) &\leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M - t + u\}) \\ &\leqslant \mu_n(\{\phi_B \geqslant u/\sigma\}) \leqslant \frac{1}{\mu_n(B)} e^{-u^2/8\sigma^2} \end{aligned} \tag{3.4.56}$$

Όμως $1/2 \leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M\})$, άρα

$$\mu_n(B) \leqslant 2e^{-u^2/8\sigma^2}. \tag{3.4.57}$$

Αφήνοντας το u να τείνει στο t παίρνουμε

$$\mu_n(B) \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{3.4.58}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_n(\{|f-M| > t\}) &= \mu_n(\{f \geqslant M+t\}) + \mu_n(\{f \leqslant M-t\}) \\ &\leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2} + 2e^{-t^2/8\sigma^2} \\ &= 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned} \tag{3.4.59}$$

3.5 Ανισότητα Kahane-Khintchine

Η ανισότητα Kahane-Khintchine γενικεύει την ανισότητα του Khintchine.

Θεώρημα 3.5.1. *Υπάρχει σταθερά K ώστε για κάθε χώρο με νόρμα X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$ και για κάθε $p \geqslant 1$,*

$$\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i\leqslant n} \varepsilon_i x_i\Big\|^p\right)^{1/p} \leqslant 2\mathbb{E}\Big\|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\Big\| + K\sigma\sqrt{p}, \tag{3.5.1}$$

όπου

$$\sigma^2 = \sup\Big\{\sum_{i\leqslant n}|x^*(x_i)|^2 : x^*\in X^*, \|x^*\|\leqslant 1\Big\}. \tag{3.5.2}$$

Η απόδειξη θα βασιστεί στο θεώρημα του Talagrand για τον διακριτό κύβο:

Για κάθε $A\subseteq E_2^n$,

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8)\leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}$$

όπου

$$\phi_A(x) = \inf\{\|x-y\|_2 : y\in \mathrm{conv}(A)\}.$$

Συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι η συγκέντρωση των κυρτών Lipschitz συναρτήσεων γύρω από τον μέσο Lévy τους.

Θεώρημα 3.5.2. *Θεωρούμε μια κυρτή Lipschitz συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με σταθερά Lipschitz σ. Έστω M ένας μέσος Lévy της f στο E_n. Τότε, για κάθε $t>0$ έχουμε*

$$\mu_n(\{|f-M|\geqslant t\})\leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{3.5.3}$$

Απόδειξη. Για τον M ισχύουν οι $\mu_n(\{f\geqslant M\})\geqslant 1/2$ και $\mu_n(\{f\leqslant M\})\geqslant 1/2$.

Θέτουμε $A=\{f\leqslant M\}$. Αφού η f είναι κυρτή, για κάθε $y\in\mathrm{conv}(A)$ έχουμε $f(y)\leqslant M$. Αν λοιπόν $f(x)\geqslant M+t$ για κάποιο $x\in E_2^n$, τότε $f(x)\geqslant M+t\geqslant f(y)+t$ για κάθε $y\in\mathrm{conv}(A)$. Άρα, $\sigma\|x-y\|_2\geqslant |f(x)-f(y)|\geqslant t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\phi_A(x)\geqslant t/\sigma. \tag{3.5.4}$$

Από το προηγούμενο πόρισμα και από την $\mu_n(A)\geqslant 1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mu_n(\{f\geqslant M+t\}) &\leqslant \mu_n(\{f_A\geqslant t/\sigma\})\leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}e^{-t^2/8\sigma^2}\\ &\leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}.\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Έστω $t>0$ και $B=\{f\leqslant M-t\}$. Αν $u<t$, όπως πριν ελέγχουμε ότι

$$f(x)\geqslant M-t+u \implies \phi_B(x)\geqslant u/\sigma, \tag{3.5.6}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mu_n(\{f(x)\geqslant M\}) &\leqslant \mu_n(\{f(x)\geqslant M-t+u\})\leqslant \mu_n(\{\phi_B\geqslant u/\sigma\})\\ &\leqslant \frac{1}{\mu_n(B)}e^{-u^2/8\sigma^2}.\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Όμως $1/2 \leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M\})$, άρα $\mu_n(B) \leqslant 2e^{-u^2/8\sigma^2}$. Αφήνοντας το u να τείνει στο t παίρνουμε

$$\mu_n(B) \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{3.5.8}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_n(\{|f-M|>t\}) &= \mu_n(\{f \geqslant M+t\}) + \mu_n(\{f \leqslant M-t\}) \\ &\leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2} + 2e^{-t^2/8\sigma^2} \\ &= 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

□

Πόρισμα 3.5.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και $(x_i)_{i\leqslant n}$ ακολουθία διανυσμάτων στον X. Θέτουμε*

$$\sigma^2 = \sup\Big\{\sum_{i\leqslant n} |x^*(x_i)|^2 : x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1\Big\}. \tag{3.5.10}$$

Αν M είναι μέσος Lévy της $\|\sum_{i\leqslant n} \varepsilon_i x_i\|$ στον E_2^n τότε, για κάθε $t \geqslant 0$,

$$\mu_n\left(\{|\ \|\sum_{i\leqslant n}\varepsilon_i x_i\| - M\ | \geqslant t\}\right) \leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{3.5.11}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $f(u) = \|\sum_{i\leqslant n} u_i x_i\|$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της νόρμας ελέγχουμε εύκολα ότι η f είναι κυρτή συνάρτηση. Έστω $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \leqslant 1$ και $u, v \in \mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} \left|x^*\left(\sum_{i\leqslant n} u_i x_i - \sum_{i\leqslant n} v_i x_i\right)\right| &= \left|\sum_{i\leqslant n} u_i x^*(x_i) - \sum_{i\leqslant n} v_i x^*(x_i)\right| \\ &= \left|\sum_{i\leqslant n} (u_i - v_i) x^*(x_i)\right| \\ &\leqslant \left(\sum_{i\leqslant n} |x^*(x_i)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i\leqslant n} (u_i - v_i)^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sigma\|u-v\|_2. \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach συμπεραίνουμε ότι

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \left\|\sum_{i\leqslant n} u_i x_i - \sum_{i\leqslant n} v_i x_i\right\| \leqslant \sigma\|u-v\|_2, \tag{3.5.13}$$

επομένως η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά σ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.5.2 για την f έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία απόδειξη της ανισότητας Khintchine-Kahane με βέλτιστη εξάρτηση από το p.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.5.1. Θεωρούμε την $f : E_2^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \Big| \, \| \sum_{i \leqslant n} \varepsilon_i x_i \| - M \, \Big|. \tag{3.5.14}$$

Από το Πόρισμα 3.5.3, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = t^2/8\sigma^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{E_2^n} \Big| \, \| \sum_{i \leqslant n} \varepsilon_i x_i \| - M \, \Big|^p d\mu_n(\varepsilon) &= p \int_0^\infty t^{p-1} \mu_n(\varepsilon : | \| \sum_{i \leqslant n} \varepsilon_i x_i \| - M | \geqslant t) dt \\ &\leqslant 4 \int_0^\infty p t^{p-1} e^{-t^2/8\sigma^2} dt \\ &= 2^{p+1} p (\sqrt{2}\sigma)^p \int_0^\infty e^{-x} x^{p/2-1} dx \leqslant (K\sigma\sqrt{p})^p. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\left(\int | \, \| \sum_{i \leqslant n} \varepsilon_i x_i \| - M |^p d\mu_n(\varepsilon) \right)^{1/p} \leqslant K\sigma\sqrt{p}. \tag{3.5.15}$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i \leqslant n} \varepsilon_i x_i \|^p d\mu_n(\varepsilon) \right)^{1/p} \leqslant M + K_1 \sigma p^{1/2} \tag{3.5.16}$$

για κάθε $p \geqslant 1$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $M \leqslant 2\mathbb{E} \, \| \sum_{i \leqslant n} \varepsilon_i x_i \|$ από την ανισότητα του Markov. $\square$

3.6 Deviation inequalities for Lipschitz functions on classical metric probability spaces

A direct consequence of our estimate for the concentration function of the sphere is the next deviation inequality for Lipschitz functions $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$.

Je'wrhma 3.6.1. *Let $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ be a Lipschitz continuous function with constant b. Then, for every $t > 0$,*

$$\sigma \left(\{ x \in S^{n-1} : |f(x) - L_f| \geqslant bt \} \right) \leqslant 2 \exp(-c_1 t^2 n).$$

where L_f is the Lévy mean of f and $c_1 > 0$ is an absolute constant.

A very useful observation is that one can replace the Lévy mean of f by the expectation of f in Theorem 3.6.1.

Je'wrhma 3.6.2. *Let $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ be a Lipschitz continuous function with constant b. Then, for every $t > 0$,*

$$\sigma\left(\{x \in S^{n-1} : |f(x) - \mathbb{E}(f)| \geqslant bt\}\right) \leqslant 4\exp(-c_1 t^2 n),$$

where $\mathbb{E}(f)$ is the expectation of f and $c_1 > 0$ is an absolute constant.

One can give a direct proof of Theorem 3.6.2 starting from the corresponding result in Gauss space that will be described next. However, there is also a general argument which relates deviation from the expectation to deviation from the Lévy mean, and allows us to deduce Theorem 3.6.2 from Theorem 3.6.1.

Proof of Theorem 3.6.2. We may clearly assume that $b = 1$. Let $\tilde{f}$ be an independent copy of f on S^{n-1}. Note that

$$\begin{aligned}(\sigma\otimes\sigma)(\{(x,y) : |f(x) - \tilde{f}(y)| \geqslant t\}) &\leqslant \sigma(\{x : |f(x) - L_f| \geqslant t/2\}) \\ &\quad + \sigma(\{y : |\tilde{f}(y) - L_f| \geqslant t/2\}) \\ &\leqslant 4\exp(-c_1 t^2 n/4)\end{aligned}$$

for every $t > 0$. Then, we may write

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\sigma\otimes\sigma}\big(\exp(\lambda^2|f - \tilde{f}|^2)\big) &= 2\int_0^\infty \lambda^2 t e^{\lambda^2 t^2}(\sigma\otimes\sigma)(\{(x,y) : |f(x) - \tilde{f}(y)| \geqslant t\})\,dt \\ &\leqslant 8\lambda^2 \int_0^\infty t e^{\lambda^2 t^2 - c_2 t^2 n} dt\end{aligned}$$

for any $\lambda > 0$, where $c_2 = c_1/4$. Choosing $\lambda = \sqrt{c_2 n/2}$ we get

$$\mathbb{E}_{\sigma\otimes\sigma}\big(\exp(c_3 n|f - \tilde{f}|^2)\big) \leqslant 4.$$

Since $t \mapsto \exp(c_3 n t^2)$ is a convex function, Jensen's inequality implies that

$$\mathbb{E}_{\sigma}\big(\exp(c_3 n|f - \mathbb{E}(f)|^2)\big) \leqslant 4.$$

Then, Markov's inequality gives

$$\begin{aligned}\sigma(\{x : |f(x) - \mathbb{E}(f)| \geqslant t\}) &\leqslant e^{-c_3 t^2 n}\mathbb{E}_{\sigma}\big(\exp(c_3 n|f - \mathbb{E}(f)|^2)\big) \\ &\leqslant 4e^{-c_3 t^2 n}\end{aligned}$$

for every $t > 0$. □

A simple proof of the corresponding result in Gauss space may be given by introducing infimum convolution and property (τ) that will be discussed in more detail in Chapter 11.

Orism'os 3.6.3 (infimum convolution)**.** Let f and g be (Borel) measurable functions on $\mathbb{R}^n$. We denote by $f\Box g$ the *infimum convolutioninfimum convolution* of f and g, defined by

$$(f\Box g)(x) = \inf\{f(x-y)+g(y):\ y\in\mathbb{R}^n\}.$$

If μ is a probability measure on $\mathbb{R}^n$ and φ is a non-negative measurable function on $\mathbb{R}^n$, we say that the pair (μ,φ) has *property* (τ)*property* $(\tau)(\tau)$*-property* if for every bounded measurable function f on $\mathbb{R}^n$ we have

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\Box\varphi}d\mu\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f}d\mu\right)\leqslant 1.$$

Je'wrhma 3.6.4 (Maurey)**.** *The pair $(\gamma_n,\|x\|_2^2/4)$ has property (τ).*

Proof. A simple proof can be given using the Prékopa-Leindler inequality. Let f be a bounded measurable function on $\mathbb{R}^n$. We define $\varphi(y)=\|y\|_2^2/4$ and $\psi=f\Box\varphi$. If

$$m(x)=f(x)+\frac{\|x\|_2^2}{2}\ ,g(y)=-\psi(y)+\frac{\|y\|_2^2}{2}\ \text{and}\ h(z)=\frac{\|z\|_2^2}{2},$$

then we easily check that

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{m(x)+g(y)}{2}.$$

So,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-m(x)}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-g(x)}dx\right)\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-h(x)}dx\right)^2.$$

In other words,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f}d\gamma_n\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\Box\varphi}d\gamma_n\right)\leqslant 1$$

which proves the theorem. □

As an application, we give a proof of a result of Pisier on the concentration of Lipschitz functions with respect to the measure γ_n.

Je'wrhma 3.6.5. *Let $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ be a Lipschitz function with constant 1 with respect to the Euclidean norm. Then, for every $t>0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(t(f(x)-f(y))\right)d\gamma_n(x)\,d\gamma_n(y)\leqslant e^{t^2}.$$

Proof. We fix $t>0$, consider the function $\varphi(y)=\|y\|_2^2/4$ and define

$$\psi_t=(tf)\Box\varphi.$$

Let $x \in \mathbb{R}^n$ and $y = y(x,t) \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\psi_t(x) = tf(y) + \frac{\|x-y\|_2^2}{4}.$$

Since $\|f\|_{\rm Lip} \leqslant 1$, we get

$$\psi_t(x) \geqslant tf(x) - t\|x-y\|_2 + \frac{\|x-y\|_2^2}{4} \geqslant tf(x) - t^2. \tag{3.6.1}$$

From Theorem 3.6.4,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\psi_t} d\gamma_n\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-tf} d\gamma_n\right) \leqslant 1.$$

Using (3.6.1) we get

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{tf} d\gamma_n \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-tf} d\gamma_n \leqslant e^{t^2},$$

or equivalently,

$$\iint \exp\left(t(f(x) - f(y))\right) d\gamma_n(x)\, d\gamma_n(y) \leqslant e^{t^2}$$

as claimed. □

P'orisma 3.6.6. *Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a Lipschitz function with $\|f\|_{\rm Lip} \leqslant 1$. Then,*

$$\gamma_n\left(\left\{x : \left|f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n\right| \geqslant s\right\}\right) \leqslant 2e^{-s^2/4}$$

for every $s > 0$.

Proof. Let $s > 0$. From Theorem 3.6.5 and Jensen's inequality we obtain

$$\mathbb{E}\Big(\exp\Big(t(f - \mathbb{E}(f))\Big)\Big) \leqslant e^{t^2}.$$

for every $t > 0$. This shows that

$$\gamma_n\left(x : f(x) - \mathbb{E}f \geqslant s\right) \leqslant \exp\left(t^2 - ts\right)$$

for every $t > 0$. Minimizing with respect to t and applying the same argument to $-f$, we conclude the proof. □