Κεφάλαιο 1

Συμμετρικοποίηση και γεωμετρικές ανισότητες

1.1 Απόσταση Hausdorff

Ορισμός 1.1.1 (απόσταση Hausdorff)**.** Έστω K και L δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Η *απόσταση Hausdorff* των K και L ορίζεται ως εξής:

$$d(K,L) := \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq L + \lambda B_2^n \textit{ και } L \subseteq K + \lambda B_2^n\}. \tag{1.1.1}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η d ορίζεται καλά και είναι μετρική στην κλάση $\mathcal{C}_n$ των μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

(i) Γιά κάθε $K, L \in \mathcal{C}_n$ ισχύει $d(K,L) \geq 0$, και αν $d(K,L) = 0$ τότε $K \subseteq L + 0B_2^n = L + \{0\} = L$ και όμοια $L \subseteq K$. Δηλαδή, $K = L$.

(ii) Η (1.1.1) είναι συμμετρική ως προς K και L, συνεπώς $d(K,L) = d(L,K)$.

(iii) Γιά κάθε K, L και $M \in \mathcal{C}_n$ έχουμε $d(K,L) \leq d(K,M) + d(M,L)$: Έστω $a = d(K,M)$ και $b = d(M,L)$. Τότε, ισχύουν οι

$$K \subseteq M + aB_2^n, \;\; M \subseteq K + aB_2^n, \;\; M \subseteq L + bB_2^n, \;\; L \subseteq M + bB_2^n.$$

Έπεται ότι

$$K \subseteq M + aB_2^n \subseteq L + bB_2^n + aB_2^n = L + (b+a)B_2^n$$

και

$$L \subseteq M + bB_2^n \subseteq K + aB_2^n + bB_2^n = K + (a+b)B_2^n,$$

δηλαδή $d(K,L) \leq a + b$.

Το πρώτο μας λήμμα δείχνει ότι αν πάρουμε κυρτές θήκες τότε η απόσταση Hausdorff μικραίνει.

Λήμμα 1.1.2. Έστω $K, L \in \mathcal{C}_n$. Τότε,

$$d(\mathrm{conv}(K), \mathrm{conv}(L)) \leq d(K, L). \tag{1.1.2}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $a = d(K, L)$. Τότε, $K \subseteq L + aB_2^n$ και $L \subseteq K + aB_2^n$.

Έστω $x \in \mathrm{conv}(K)$. Υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ με $\sum \lambda_i = 1$ ώστε $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$. Αφού $K \subseteq L + aB_2^n$, για κάθε $i = 1, \ldots, m$ μπορούμε να βρούμε $y_i \in L$ ώστε $\|x_i - y_i\|_2 \leq a$. Τότε, $y = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m \in \mathrm{conv}(L)$ και

$$\|x - y\|_2 \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|x_i - y_i\|_2 \leq a \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = a. \tag{1.1.3}$$

Έπεται ότι $\mathrm{conv}(K) \subseteq \mathrm{conv}(L) + aB_2^n$. Με ανάλογο τρόπο βλέπουμε ότι $\mathrm{conv}(L) \subseteq \mathrm{conv}(K) + aB_2^n$, δηλαδή $d(\mathrm{conv}(K), \mathrm{conv}(L)) \leq a = d(K, L)$. □

Παράδειγμα. Θεωρούμε έναν δίσκο K ακτίνας $R > 0$ και θέτουμε L την περιφέρεια του. Τότε $\mathrm{conv}(K) = K = \mathrm{conv}(L)$, άρα $d(\mathrm{conv}(K), \mathrm{conv}(L)) = 0$. Από την άλλη πλευρά, $d(K, L) = R$.

Ορισμός 1.1.3. Έστω $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ ακολουθία μη κενών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η $\{K_m\}$ συγκλίνει σε κάποιο συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^n$, και γράφουμε $K_m \to K$, αν $d(K_m, K) \to 0$.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω $\{K_m\}$ ακολουθία μη κενών, κυρτών και συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές ώστε $K_m \to K$. Τότε, το K είναι κυρτό.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $d(K_m, K) < \varepsilon$. Όμως, το K_m είναι κυρτό άρα $K_m = \mathrm{conv}(K_m)$ και από το Λήμμα 1.1.2 βλέπουμε ότι

$$d(K_m, \mathrm{conv}(K)) = d(\mathrm{conv}(K_m), \mathrm{conv}(K)) \leq d(K_m, K) < \varepsilon. \tag{1.1.4}$$

Η τριγωνική ανισότητα γιά την d δίνει

$$d(K, \mathrm{conv}(K)) \leq d(K_m, K) + d(K_m, \mathrm{conv}(K)) < 2\varepsilon, \tag{1.1.5}$$

και αφού το ε ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι $d(K, \mathrm{conv}(K)) = 0$, δηλαδή $K = \mathrm{conv}(K)$. Έπεται ότι το K είναι κυρτό. □

1.2 Το Θεώρημα επιλογής του Blaschke

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το *θεώρημα επιλογής του Blaschke*, σύμφωνα με το οποίο τα συμπαγή κυρτά υποσύνολα οποιασδήποτε μπάλας σχηματίζουν συμπαγή μετρικό χώρο με τη μετρική Hausdorff:

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω $R > 0$ και $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μη κενών, συμπαγών κυρτών υποσυνόλων της RB_2^n. Τότε, υπάρχουν υπακολουθία $\{K_{l_m}\}$ της $\{K_m\}$ και κυρτό συμπαγές $K \subseteq RB_2^n$ ώστε $K_{l_m} \to K$.*

Η απόδειξη θα βασιστεί στο εξής λήμμα.

Λήμμα 1.2.2. *Έστω $\varepsilon > 0$. Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος, μπορούμε να επιλέξουμε υπακολουθία δεικτών $l_1 < l_2 < \cdots < l_m < \cdots$ με την ιδιότητα*

$$d(K_{l_i}, K_{l_j}) \leq \varepsilon \tag{1.2.1}$$

για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Η μπάλα RB_2^n είναι συμπαγής. Άρα, για το δοσμένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $x_1, \dots, x_N \in RB_2^n$ ώστε

$$RB_2^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \left(x_i + \frac{\varepsilon}{2}B_2^n\right). \tag{1.2.2}$$

Ορίζουμε $E = \{x_1, \dots, x_N\}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_m = E \cap \left(K_m + \frac{\varepsilon}{2}B_2^n\right)$. Κάθε E_m είναι πεπερασμένο σύνολο, άρα συμπαγές.

Θα δείξουμε ότι $d(K_m, E_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Από τον ορισμό του E_m είναι φανερό ότι $E_m \subseteq K_m + \frac{\varepsilon}{2}B_2^n$. Έστω $x \in K_m$. Τότε $x \in RB_2^n$, συνεπώς υπάρχει $i \leq N$ ώστε $\|x - x_i\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$x_i \in x + \frac{\varepsilon}{2}B_2^n \subseteq K_m + \frac{\varepsilon}{2}B_2^n, \tag{1.2.3}$$

δηλαδή $x_i \in E_m$. Από την άλλη πλευρά,

$$x \in x_i + \frac{\varepsilon}{2}B_2^n \subseteq E_m + \frac{\varepsilon}{2}B_2^n. \tag{1.2.4}$$

Άρα, $K_m \subseteq E_m + \frac{\varepsilon}{2}B_2^n$, και $d(K_m, E_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Γιά κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε βρεί $E_m \subseteq E$ με την ιδιότητα $d(K_m, E_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ομως το E είναι πεπερασμένο σύνολο, άρα έχει πεπερασμένα το πλήθος υποσύνολα. Έπεται ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος δείκτες $l_1 < l_2 < \cdots < l_m < \cdots$ και μοναδικό $E^* \subseteq E$ ώστε $d(K_{l_j}, E^*) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Αν τώρα $i \neq j$, η τριγωνική ανισότητα δίνει

$$d(K_{l_i}, K_{l_j}) \leq d(K_{l_i}, E^*) + d(E^*, K_{l_j}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1.2.5}$$ □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1. Εφαρμόζουμε διαδοχικά το Λήμμα 1.2.2 με $\varepsilon = \frac{1}{m}$: Γιά $\varepsilon = 1$ μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $K_{11}, K_{12}, \dots, K_{1j}, \dots$ της $\{K_m\}$ ώστε αν $i \neq j$ να ισχύει

$$d(K_{1i}, K_{1j}) \leq 1. \tag{1.2.6}$$

Παίρνουμε τώρα $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βρίσκουμε υπακολουθία $K_{21}, K_{22}, \dots, K_{2j}, \dots$ της $\{K_{1j}\}$ ώστε αν $i \neq j$ να ισχύει

$$d(K_{2i}, K_{2j}) \leq \frac{1}{2}. \tag{1.2.7}$$

Συνεχίζοντας έτσι ορίζουμε (για κάθε m) υπακολουθία $\{K_{mj}\}$ της $\{K_{(m-1),j}\}$ έτσι ώστε για την m-οστή υπακολουθία $\{K_{mj}\}$ να ισχύει

$$d(K_{mi}, K_{mj}) \leq \frac{1}{m} \tag{1.2.8}$$

για κάθε $i \neq j$. Θεωρούμε τώρα τη διαγώνια υπακολουθία $K_m^* = K_{mm}$. Αυτή είναι υπακολουθία της $\{K_m\}$ και ικανοποιεί το εξής: Αν $l, s \in \mathbb{N}$ και $l < s$, τότε οι K_l^*, K_s^* είναι όροι της $\{K_{lj}\}$, συνεπώς

$$d(K_l^*, K_s^*) \leq \frac{1}{l}. \tag{1.2.9}$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$K = \bigcap_{l=1}^{\infty} \left(K_l^* + \frac{1}{l} B_2^n \right), \tag{1.2.10}$$

και θα δείξουμε ότι $K_m^* \to K$. Ακριβέστερα, θα δείξουμε ότι $d(K_m^*, K) \leq \frac{1}{m}$ γιά κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Από τον ορισμό του K είναι φανερό ότι $K \subseteq K_m^* + \frac{1}{m} B_2^n$. Έστω $x \in K_m^*$. Από την (1.2.9), για κάθε $s > m$ μπορούμε να βρούμε $x_s \in K_s^*$ ώστε $\|x - x_s\|_2 \leq \frac{1}{m}$. Εχουμε $x_s \in RB_2^n$ γιά κάθε s, άρα υπάρχουν υπακολουθία $\{x_{r_s}\}$ της $\{x_s\}$ και $y \in RB_2^n$ ώστε $x_{r_s} \to y$. Αφού $\|x - x_{r_s}\|_2 \leq 1/m$, βλέπουμε ότι

$$\|x - y\|_2 \leq \frac{1}{m}. \tag{1.2.11}$$

Θα δείξουμε ότι $y \in K$. Πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι $y \in K_l^* + \frac{1}{l} B_2^n$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Όμως, τελικά έχουμε $r_s > l$ και από την (1.2.9) βλέπουμε ότι αν $r_s > l$ τότε

$$x_{r_s} \in K_{r_s}^* \subseteq K_l^* + \frac{1}{l} B_2^n. \tag{1.2.12}$$

Περνώντας στο όριο, συμπεραίνουμε ότι $y \in K_l^* + \frac{1}{l} B_2^n$, και επειδή το l ήταν τυχόν έχουμε $y \in K$. Τότε, η (1.2.11) μας δίνει

$$x \in y + \frac{1}{m} B_2^n \subseteq K + \frac{1}{m} B_2^n, \tag{1.2.13}$$

και αφού το $x \in K_m^*$ ήταν τυχόν, $K_m^* \subseteq K + \frac{1}{m} B_2^n$. Άρα, $d(K_m^*, K) \leq \frac{1}{m}$, δηλαδή $K_m^* \to K$. Από την (1.2.10) βλέπουμε ότι το K είναι συμπαγές και κυρτό. Το ότι το K είναι μη κενό έπεται από την απόδειξη (το σημείο y ανήκει στο K). $\square$

1.3 Συμμετρικοποίηση κατά Steiner

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε μια διαδικασία με την οποία ξεκινώντας από τυχόν κυρτό σώμα K οδηγούμαστε με ομαλό τρόπο σε όλο και πιό συμμετρικά κυρτά σώματα. Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται πολύ συχνά όταν θέλουμε να δείξουμε ότι η μπάλα είναι λύση ενός προβλήματος μεγίστου-ελαχίστου.

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ως συνήθως, με θ συμβολίζουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα (διεύθυνση) και με $\theta^\perp$ τον $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο που είναι κάθετος στο θ:

$$\theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\}. \tag{1.3.1}$$

Η *προβολή* $P_\theta(K)$ του K στη διεύθυνση του θ είναι το σύνολο

$$P_\theta(K) = \{x \in \theta^\perp \mid \exists t \in \mathbb{R} : x + t\theta \in K\}. \tag{1.3.2}$$

Λήμμα 1.3.1. *Για κάθε κυρτό σώμα K και κάθε $\theta \in S^{n-1}$, το $P_\theta(K)$ είναι κυρτό σώμα.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι το $P_\theta(K)$ είναι κυρτό. Έστω $x, y \in P_\theta(K)$ και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί t και s ώστε $x + t\theta \in K$ και $y + s\theta \in K$. Αφού το K είναι κυρτό, έχουμε

$$(1-\lambda)(x+t\theta) + \lambda(y+s\theta) = [(1-\lambda)x + \lambda y] + [(1-\lambda)t + \lambda s]\theta \in K, \tag{1.3.3}$$

οπότε η (1.3.2) δείχνει ότι $(1-\lambda)x + \lambda y \in P_\theta(K)$. Αρα, το $P_\theta(K)$ είναι κυρτό.

Θα δείξουμε ότι το $P_\theta(K)$ είναι κλειστό: Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία σημείων του $P_\theta(K)$ και ας υποθέσουμε ότι $x_n \to x$. Υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{t_n\}$ ώστε $x_n + t_n\theta \in K$. Αφού το K είναι φραγμένο, η $\{t_n\}$ είναι φραγμένη. Άρα, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{t_{k_n}\}$. Αν $t_{k_n} \to t$, έχουμε $x_{k_n} + t_{k_n}\theta \to x + t\theta$, και αφού το K είναι κλειστό έπεται ότι $x + t\theta \in K$. Συνεπώς $x \in P_\theta(K)$ και το $P_\theta(K)$ είναι κλειστό.

Το ότι το $P_\theta(K)$ είναι φραγμένο και έχει μη κενό εσωτερικό είναι προφανές: το K περιέχεται σε μια μπάλα με κέντρο το 0, άρα το $P_\theta(K)$ θα περιέχεται σε μπάλα του $\theta^\perp$ της ίδιας ακτίνας. Επίσης, το K είναι σώμα άρα περιέχει μπάλα κάποιας θετικής ακτίνας. Το ίδιο θα συμβαίνει με οποιαδήποτε $(n-1)$-διάστατη προβολή του (η προβολή μπάλας είναι μπάλα με την ίδια ακτίνα). □

Γιά να ορίσουμε την Steiner συμμετρικοποίηση του K στη διεύθυνση του θ, θα χρειαστεί να γράψουμε το K σε μια πιο βολική μορφή:

Λήμμα 1.3.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta \in S^{n-1}$. Ορίζουμε δύο συναρτήσεις $f, g : P_\theta(K) \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \min\{t \in \mathbb{R} : x + t\theta \in K\} \quad \text{και} \quad g(x) = \max\{t \in \mathbb{R} : x + t\theta \in K\}. \tag{1.3.4}$$

Τότε, η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη.

Απόδειξη. Από τη συμπάγεια του K έπεται ότι οι f και g ορίζονται καλά: το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : x + t\theta \in K\}$ είναι κλειστό διάστημα. Θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή. Αρκεί να δείξουμε ότι γιά κάθε $x, y \in P_\theta(K)$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Ας υποθέσουμε ότι $f(x) = t$ και $f(y) = s$. Τότε, $x + t\theta \in K$ και $y + s\theta \in K$. Αφού το K είναι κυρτό, παίρνουμε

$$(1-\lambda)(x + t\theta) + \lambda(y + s\theta) = ((1-\lambda)x + \lambda y) + ((1-\lambda)t + \lambda s)\theta \in K. \tag{1.3.5}$$

Από τον ορισμό της f έπεται ότι

$$f\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) \leq (1-\lambda)t + \lambda s = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \tag{1.3.6}$$

Άρα, η f είναι κυρτή, και με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η g είναι κοίλη. $\square$

Σύμφωνα με το Λήμμα 1.3.2, μπορούμε να γράψουμε το κυρτό σώμα K στη μορφή

$$K = \{x + t\theta : x \in P_\theta(K),\ f(x) \leq t \leq g(x)\}. \tag{1.3.7}$$

Αντίστροφα, αν ένα χωρίο K στον $\mathbb{R}^n$ έχει σαν προβολή στον $\theta^\perp$ ένα κυρτό σώμα $P_\theta(K)$ και γράφεται στη μορφή (1.3.7), όπου f κυρτή, g κοίλη και $f \leq g$ στο $P_\theta(K)$, τότε το K είναι κυρτό.

Ορίζουμε τώρα την Steiner συμμετρικοποίηση του K στη διεύθυνση του θ ως εξής:

$$S_\theta(K) = \left\{x + t\theta : x \in P_\theta(K),\ |t| \leq \frac{g(x) - f(x)}{2}\right\}. \tag{1.3.8}$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in P_\theta(K)$ θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο θ με μήκος $g(x) - f(x)$ και μέσο το x, και παίρνουμε σαν $S_\theta(K)$ την ένωση όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων.

Είναι φανερό ότι το $S_\theta(K)$ είναι συμμετρικό ως προς $\theta^\perp$ (αυτή η παρατήρηση δικαιολογεί τον όρο «συμμετρικοποίηση»). Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού S_θ περιγράφονται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 1.3.3. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta \in S^{n-1}$. Τότε, το $S_\theta(K)$ είναι κυρτό σώμα, και $|S_\theta(K)| = |K|$.*

Απόδειξη. Έστω $x + t\theta, y + s\theta \in S_\theta(K)$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε, $x, y \in P_\theta(K)$ και αφού το $P_\theta(K)$ είναι κυρτό έχουμε $(1-\lambda)x + \lambda y \in P_\theta(K)$. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}
|(1-\lambda)t + \lambda s| &\leq (1-\lambda)|t| + \lambda|s| \\
&\leq (1-\lambda)\frac{g(x) - f(x)}{2} + \lambda\frac{g(y) - f(y)}{2} \\
&\leq \frac{1}{2}[g((1-\lambda)x + \lambda y) - f((1-\lambda)x + \lambda y)],
\end{aligned}$$

διότι η $g-f$ είναι κοίλη. Συνεπώς, $(1-\lambda)(x+t\theta)+\lambda(y+s\theta)\in S_\theta(K)$ και το $S_\theta(K)$ είναι κυρτό.

Γιά τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}|S_\theta(K)| &= \int_{P_\theta(K)}\left(\frac{(g-f)(x)}{2}-\left(-\frac{(g-f)(x)}{2}\right)\right)dx\\ &= \int_{P_\theta(K)}[g(x)-f(x)]dx=|K|.\end{aligned}$$

Δηλαδή, η συμμετρικοποίηση διατηρεί τον όγκο. □

Σκοπός μας είναι να χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία της συμμετρικοποίησης για την απόδειξη γεωμετρικών ανισοτήτων. Ένα βασικό βήμα σε αυτή την κατεύθυνση είναι να εξασφαλίσουμε τη «μονοτονία» κάποιων παραμέτρων ως προς την Steiner συμμετρικοποίηση. Για παράδειγμα, στο υπόλοιπο αυτής της Παραγράφου θα δείξουμε ότι με κάθε συμμετρικοποίηση Steiner η επιφάνεια και η διάμετρος οποιουδήποτε κυρτού σώματος μικραίνουν. Θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 1.3.4. *Έστω K και L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta\in S^{n-1}$. Τότε,*

$$S_\theta(K)+S_\theta(L)\subseteq S_\theta(K+L). \tag{1.3.9}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της συμμετρικοποίησης έχουμε

$$S_\theta(K)=\left\{x+t\theta : x\in P_\theta(K), |t|\leq \frac{(g_K-f_K)(x)}{2}\right\} \tag{1.3.10}$$

και

$$S_\theta(L)=\left\{y+s\theta : y\in P_\theta(L), |s|\leq \frac{(g_L-f_L)(y)}{2}\right\}. \tag{1.3.11}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$S_\theta(K+L)=\left\{z+\rho\theta : z\in P_\theta(K+L), |\rho|\leq \frac{(g_{K+L}-f_{K+L})(z)}{2}\right\}. \tag{1.3.12}$$

Έστω $x+t\theta\in S_\theta(K)$ και $y+s\theta\in S_\theta(L)$. Τότε, $x\in P_\theta(K)$ και $y\in P_\theta(L)$ άρα υπάρχουν $t_1,s_1\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x+t_1\theta\in K$ και $y+s_1\theta\in L$. Έπεται ότι $x+y+(t_1+s_1)\theta\in K+L$, συνεπώς $x+y\in P_\theta(K+L)$. Επίσης,

$$\begin{aligned}|t+s|\leq|t|+|s| &\leq \frac{g_K(x)-f_K(x)}{2}+\frac{g_L(y)-f_L(y)}{2}\\ &= \frac{(g_K(x)+g_L(y))-(f_K(x)+f_L(y))}{2},\end{aligned}$$

οπότε, για να δείξουμε ότι $(x+t\theta)+(y+s\theta)\in S_\theta(K+L)$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$g_K(x)+g_L(y)\leq g_{K+L}(x+y) \quad \text{και} \quad f_K(x)+f_L(y)\geq f_{K+L}(x+y). \tag{1.3.13}$$

Θα δείξουμε την πρώτη από τις δύο ανισότητες: Έχουμε $x+g_K(x)\theta\in K$ και $y+g_L(y)\theta\in L$, επομένως $x+y+(g_K(x)+g_L(y))\theta\in K+L$. Από τον ορισμό της g_{K+L} συμπεραίνουμε ότι $g_K(x)+g_L(y)\leq g_{K+L}(x+y)$. □

Θεώρημα 1.3.5. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta\in S^{n-1}$. Τότε,*

$$\partial(S_\theta(K))\leq \partial(K). \tag{1.3.14}$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Εύκολα βλέπουμε ότι $S_\theta(\varepsilon B_2^n)=\varepsilon B_2^n$ και το Λήμμα 1.3.4 μας εξασφαλίζει ότι

$$S_\theta(K)+\varepsilon B_2^n = S_\theta(K)+S_\theta(\varepsilon B_2^n)\subseteq S_\theta(K+\varepsilon B_2^n). \tag{1.3.15}$$

Η συμμετρικοποίηση κατά Steiner διατηρεί τους όγκους, συνεπώς $|S_\theta(K)|=|K|$ και $|S_\theta(K+\varepsilon B_2^n)|=|K+\varepsilon B_2^n|$ Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\frac{|S_\theta(K)+\varepsilon B_2^n|-|S_\theta(K)|}{\varepsilon} &\leq \frac{|S_\theta(K+\varepsilon B_2^n)|-|S_\theta(K)|}{\varepsilon}\\ &= \frac{|K+\varepsilon B_2^n|-|K|}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Παίρνοντας όρια καθώς το $\varepsilon\to 0^+$ βλέπουμε ότι $\partial(S_\theta(K))\leq\partial(K)$. □

Το δεύτερο παράδειγμα που θα δώσουμε αφορά την *διάμετρο*: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\mathrm{diam}(K)=\max\{\|z_1-z_2\|_2 : z_1,z_2\in K\}. \tag{1.3.16}$$

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι η διάμετρος μικραίνει αν εφαρμόσουμε συμμετρικοποίηση κατά Steiner.

Πρόταση 1.3.6. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta\in S^{n-1}$. Τότε,*

$$\mathrm{diam}(S_\theta(K))\leq\mathrm{diam}(K). \tag{1.3.17}$$

Απόδειξη. Έστω $z_1,z_2\in S_\theta(K)$, για τα οποία $\|z_1-z_2\|_2=\mathrm{diam}(S_\theta(K))$. Εύκολα βλέπουμε ότι τα z_1,z_2 πρέπει να είναι της μορφής

$$z_1=x_1+\frac{g(x_1)-f(x_1)}{2}\theta \quad \text{και} \quad z_2=x_2-\frac{g(x_2)-f(x_2)}{2}\theta \tag{1.3.18}$$

για κάποια $x_1,x_2\in P_\theta(K)$. Γράφουμε $g_i=g(x_i)$ και $f_i=f(x_i)$, και θεωρούμε τα σημεία

$$w_i=x_i+g_i\theta \quad \text{και} \quad v_i=x_i+f_i\theta, \qquad (i=1,2). \tag{1.3.19}$$

Τα τέσσερα αυτά σημεία ανήκουν στο K. Χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα και απλές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\|w_1 - v_2\|_2^2 + \|w_2 - v_1\|_2^2 - 2\|z_1 - z_2\|_2^2 &= |g_1 - f_2|^2 + |g_2 - f_1|^2 \\ &\quad -2\left|\frac{g_1 - f_1}{2} + \frac{g_2 - f_2}{2}\right|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Αφού $\|w_1 - v_2\|_2, \|w_2 - v_1\|_2 \leq \mathrm{diam}(K)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{diam}(S_\theta(K)) = \|z_1 - z_2\|_2 \leq \max\{\|w_1 - v_2\|_2, \|w_2 - v_1\|_2\} \leq \mathrm{diam}(K). \tag{1.3.20}$$

□

1.4 Προβλήματα μεγίστου και ελαχίστου

Πρώτος μας στόχος σε αυτή την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι ξεκινώντας από οποιοδήποτε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ μπορούμε με πεπερασμένες το πλήθος διαδοχικές Steiner συμμετρικοποιήσεις να το «φέρουμε οσοδήποτε κοντά» σε μιά μπάλα. Κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος θα δώσουμε μια απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας και της ανισότητας Brunn-Minkowski.

Λήμμα 1.4.1. *Έστω $\{K_m\}$ μια ακολουθία κυρτών σωμάτων που συγκλίνει (με την Hausdorff μετρική) σε ένα κυρτό σώμα K με $r_1B_2^n \subseteq K \subseteq s_1B_2^n$, $0 < r_1 < s_1$. Τότε, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,*

$$S_\theta(K_m) \to S_\theta(K). \tag{1.4.1}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι: υπάρχουν $0 < r < r_1$, $s > s_1$ και $m_1 \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$rB_2^n \subseteq K_m \subseteq sB_2^n \tag{1.4.2}$$

για κάθε $m \geq m_1$. Πράγματι, αν σταθεροποιήσουμε $0 < \eta < r_1$, μπορούμε να βρούμε m_1 ώστε $d(K_m, K) < \eta$ για κάθε $m \geq m_1$. Τότε, $K_m \subseteq K + \eta B_2^n \subseteq (s_1 + \eta)B_2^n$. Επίσης, από την $r_1B_2^n \subseteq K \subseteq K_m + \eta B_2^n$, θεωρώντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις στήριξης, παίρνουμε

$$h_{r_1B_2^n} \leq h_K \leq h_{K_m + \eta B_2^n} = h_{K_m} + h_{\eta B_2^n}, \tag{1.4.3}$$

δηλαδή

$$h_{K_m} \geq h_{r_1B_2^n} - h_{\eta B_2^n} = h_{(r_1 - \eta)B_2^n}. \tag{1.4.4}$$

Συνεπώς, $K_m \supseteq (r_1 - \eta)B_2^n$. Έχουμε λοιπόν την (1.4.2) με $r = r_1 - \eta$ και $s = s_1 + \eta$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε $m_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $d(S_\theta(K_m), S_\theta(K)) < \varepsilon$, δηλαδή

$$S_\theta(K_m) \subseteq S_\theta(K) + \varepsilon B_2^n \quad \text{και} \quad S_\theta(K) \subseteq S_\theta(K_m) + \varepsilon B_2^n \tag{1.4.5}$$

για κάθε $m \geq m_0$. Θέτουμε $\varepsilon' = \frac{r}{s}\varepsilon$. Αφού $K_m \to K$, μπορούμε να βρούμε $m_2 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$K_m \subseteq K + \frac{r}{s}\varepsilon B_2^n \quad \text{και} \quad K \subseteq K_m + \frac{r}{s}\varepsilon B_2^n \tag{1.4.6}$$

για κάθε $m \geq m_2$. Επιλέγουμε $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Αν $m \geq m_0$, τότε

$$K_m \subseteq K + \frac{r}{s}\varepsilon B_2^n \subseteq K + \frac{\varepsilon}{s}K = \left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right)K \tag{1.4.7}$$

και

$$K \subseteq K_m + \frac{r}{s}\varepsilon B_2^n \subseteq K_m + \frac{\varepsilon}{s}K_m = \left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right)K_m. \tag{1.4.8}$$

Από την (1.4.7) έπεται ότι

$$\begin{aligned} S_\theta(K_m) &\subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right)S_\theta(K) = S_\theta(K) + \varepsilon S_\theta((1/s)K) \\ &\subseteq S_\theta(K) + \varepsilon S_\theta(B_2^n) = S_\theta(K) + \varepsilon B_2^n. \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο (χρησιμοποιώντας την (1.4.8)) δείχνουμε ότι $S_\theta(K) \subseteq S_\theta(K_m) + \varepsilon B_2^n$. Άρα, $d(S_\theta(K), S_\theta(K_m)) \leq \varepsilon$ γιά κάθε $m \geq m_0$. Δηλαδή, $S_\theta(K_m) \to S_\theta(K)$. □

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Θεωρούμε την κλάση όλων των «πεπερασμένων Steiner συμμετρικοποιήσεων» του K*

$$\mathcal{S}(K) = \{(S_{\theta_l} \circ \cdots \circ S_{\theta_1})(K) : \theta_i \in S^{n-1}, l \in \mathbb{N}\}. \tag{1.4.9}$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $C \in \mathcal{S}(K)$ που ικανοποιεί την $d(C, B) < \varepsilon$, όπου B η μπάλα με κέντρο το 0 και όγκο $|B| = |K|$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\rho = \inf\{r > 0 \mid \exists C \in \mathcal{S}(K) : C \subseteq rB_2^n\}. \tag{1.4.10}$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $C_\varepsilon \in \mathcal{S}(K)$ ώστε $C_\varepsilon \subseteq (\rho + \varepsilon)B_2^n$. Παίρνοντας $\varepsilon = 1/m$ ($m \in \mathbb{N}$), βρίσκουμε ακολουθία $\{C_m\}$ κυρτών σωμάτων με $C_m \in \mathcal{S}(K)$ και $C_m \subseteq (\rho + \frac{1}{m})B_2^n$.

Κάθε C_m περιέχεται στην $(\rho + 1)B_2^n$, επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα επιλογής του Blaschke: υπάρχει υπακολουθία $\{C_{k_m}\}$ της $\{C_m\}$ με την ιδιότητα $C_{k_m} \to C$, για κάποιο συμπαγές κυρτό σύνολο C.

Θα δείξουμε ότι $C = \rho B_2^n$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $C \subseteq \rho B_2^n$: για τυχόν $\varepsilon > 0$, αν το m είναι αρκετά μεγάλο έχουμε

$$C \subseteq C_{k_m} + \varepsilon B_2^n \subseteq \left(\rho + \frac{1}{k_m}\right)B_2^n + \varepsilon B_2^n = \left(\rho + \frac{1}{k_m} + \varepsilon\right)B_2^n. \tag{1.4.11}$$

Αφού $1/k_m \to 0$ και το ε ήταν τυχόν, $C \subseteq \rho B_2^n$.

Υποθέτουμε ότι το C είναι γνήσιο υποσύνολο της ρB_2^n. Υπάρχει δηλαδή $x_0 \in \rho S^{n-1}$ με $x_0 \notin C$. Το C είναι κλειστό, επομένως υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $[x_0 + \delta B_2^n] \cap C = \emptyset$.

Μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος σημεία $x_1, \ldots, x_N \in \rho S^{n-1}$ ώστε

$$\rho S^{n-1} \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} [x_i + \delta B_2^n] \cap \rho S^{n-1}. \tag{1.4.12}$$

Θεωρούμε μοναδιαίο διάνυσμα ξ_1 στη διεύθυνση του ευθύγραμμου τμήματος $[x_0 x_1]$, και συμμετρικοποιούμε το C στη διεύθυνση του ξ_1. Τότε (άσκηση),

$$\left(\bigcup_{i=0}^{1} [x_i + \delta B_2^n] \cap \rho S^{n-1} \right) \cap S_{\xi_1} C = \emptyset. \tag{1.4.13}$$

Συνεχίζουμε συμμετρικοποιώντας το $S_{\xi_1} C$ στη διεύθυνση ενός μοναδιαίου διανύσματος ξ_2 παράλληλου προς το ευθύγραμμο τμήμα $[x_0 x_2]$. Όπως πριν,

$$\left(\bigcup_{i=0}^{2} [x_i + \delta B_2^n] \cap \rho S^{n-1} \right) \cap (S_{\xi_2} \circ S_{\xi_1})(C) = \emptyset. \tag{1.4.14}$$

Μετά από N βήματα, καταλήγουμε σε ένα κυρτό σώμα $C_1 = (S_{\xi_N} \circ \cdots \circ S_{\xi_1})(C)$, το οποίο λόγω της (1.4.12) έχει την ιδιότητα

$$C_1 \cap (\rho S^{n-1}) = \emptyset. \tag{1.4.15}$$

Λόγω συμπάγειας συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$C_1 \subseteq (\rho - \varepsilon) B_2^n. \tag{1.4.16}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $C_{k_m} \to C$, με διαδοχικές εφαρμογές του Λήμματος 1.4.1 βλέπουμε ότι

$$(S_{\xi_N} \circ \cdots \circ S_{\xi_1})(C_{k_m}) \to C_1. \tag{1.4.17}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$(S_{\xi_N} \circ \cdots \circ S_{\xi_1})(C_{k_m}) \subseteq C_1 + \frac{\varepsilon}{2} B_2^n \subseteq \left(\rho - \frac{\varepsilon}{2} \right) B_2^n. \tag{1.4.18}$$

Όμως $C_{k_m} \in \mathcal{S}(K)$, άρα $(S_{\xi_N} \circ \cdots \circ S_{\xi_1})(C_{k_m}) \in \mathcal{S}(K)$, οπότε έχουμε καταλήξει σε άτοπο (από τον ορισμό του ρ).

Δείξαμε ότι $C = \rho B_2^n$. Αφού $C_{k_m} \to \rho B_2^n$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $C \in \mathcal{S}(K)$ ώστε $d(C, \rho B_2^n) < \varepsilon$. Η $|\rho B_2^n| = |K|$ προκύπτει από το γεγονός ότι η συμμετρικοποίηση κατά Steiner διατηρεί τους όγκους: κάθε $C \in \mathcal{S}(K)$ έχει όγκο $|C| = |K|$, άρα $|\rho B_2^n| =$

$\lim_{m\to\infty} |C_{k_m}| = |K|$ (το γεγονός ότι $|C_{k_m}| \to |\rho B_2^n|$ είναι απλή συνέπεια της $C_{k_m} \to \rho B_2^n$).
$\square$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3.4 και το Θεώρημα 1.4.2 μπορούμε να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γιά κυρτά σώματα.

Θεώρημα 1.4.3. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω B η μπάλα με κέντρο το 0 και όγκο $|B| = |K|$. Τότε,*

$$\partial(K) \geq \partial(B). \tag{1.4.19}$$

Απόδειξη. Η επιφάνεια είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο του K. Έστω $C \in \mathcal{S}(K)$. Υπάρχουν $\theta_1, \ldots, \theta_m \in S^{n-1}$ ώστε $C = (S_{\theta_m} \circ \cdots \circ S_{\theta_1})(K)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3.4 βλέπουμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$|K + \varepsilon B_2^n| \geq |S_{\theta_1}(K) + \varepsilon B_2^n| \geq \cdots \geq |C + \varepsilon B_2^n|. \tag{1.4.20}$$

Από την άλλη πλευρά, το Θεώρημα 1.4.2 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει ακολουθία $\{C_s\}$ στοιχείων της $\mathcal{S}(K)$ ώστε $C_s \to B$.

Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$. Από την $C_s \to B$ και την $|B| = |C_s| = |K|$ ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\frac{|B + \varepsilon B_2^n| - |B|}{\varepsilon} = \lim_{s\to\infty} \frac{|C_s + \varepsilon B_2^n| - |C_s|}{\varepsilon} \leq \frac{|K + \varepsilon B_2^n| - |K|}{\varepsilon}. \tag{1.4.21}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ συμπεραίνουμε ότι $\partial(B) \leq \partial(K)$. $\square$

Με εφαρμογή της Steiner συμμετρικοποίησης μπορούμε επίσης να αποδείξουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski για κυρτά σώματα.

Θεώρημα 1.4.4. *Έστω K και T δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{1.4.22}$$

Απόδειξη. Ο όγκος είναι αναλλοίωτος ως προς μεταφορές, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο των K και T. Θεωρούμε τις μπάλες rB_2^n και sB_2^n που έχουν όγκο $|rB_2^n| = |K|$ και $|sB_2^n| = |T|$ αντίστοιχα.

Έστω $0 < \varepsilon < \min\{r, s\}$. Μπορούμε να βρούμε $C_1 = (S_{\theta_N} \circ \cdots \circ S_{\theta_1})(K) \in \mathcal{S}(K)$ ώστε $C_1 \supseteq (r - \varepsilon)B_2^n$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3.4 βλέπουμε ότι

$$|K + T| = |S_{\theta_1}(K + T)| \geq |S_{\theta_1}(K) + S_{\theta_1}(T)|, \tag{1.4.23}$$

και, μετά από N βήματα,

$$|K + T| \geq |C_1 + (S_{\theta_N} \circ \cdots \circ S_{\theta_1})(T)|. \tag{1.4.24}$$

Θέτουμε $T_1 = (S_{\theta_N} \circ \cdots \circ S_{\theta_1})(T)$. Αφού $|T_1| = |T| = |sB_2^n|$, μπορούμε να βρούμε $C_2 = (S_{\xi_m} \circ \cdots \circ S_{\xi_1})(T_1) \in \mathcal{S}(T_1)$ ώστε $C_2 \supseteq (s-\varepsilon)B_2^n$. Χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 1.3.4 βλέπουμε ότι

$$|C_1 + T_1| \geq |(S_{\xi_m} \circ \cdots \circ S_{\xi_1})(C_1) + C_2|. \tag{1.4.25}$$

Όμως, από την $C_1 \supseteq (r-\varepsilon)B_2^n$ έπεται ότι $(S_{\xi_m} \circ \cdots \circ S_{\xi_1})(C_1) \supseteq (r-\varepsilon)B_2^n$. Άρα,

$$(S_{\xi_m} \circ \cdots \circ S_{\xi_1})(C_1) + C_2 \supseteq (r-\varepsilon)B_2^n + (s-\varepsilon)B_2^n. \tag{1.4.26}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$|K+T|^{1/n} \geq |(r+s-2\varepsilon)B_2^n|^{1/n} = (r+s-2\varepsilon)|B_2^n|^{1/n}. \tag{1.4.27}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$, παίρνουμε

$$|K+T|^{1/n} \geq (r+s)|B_2^n|^{1/n} = |rB_2^n|^{1/n} + |sB_2^n|^{1/n}. \tag{1.4.28}$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Με ανάλογο τρόπο, αποδεικνύεται η «ισοδιαμετρική ανισότητα»: από όλα τα κυρτά σώματα που έχουν δεδομένο όγκο, η μπάλα έχει τη μικρότερη διάμετρο. Η απόδειξη βασίζεται στην Steiner συμμετρικοποίηση και στην Πρόταση 1.3.6.

Θεώρημα 1.4.5. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{diam}(K) \geq 2\left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}. \tag{1.4.29}$$

Απόδειξη. Η διάμετρος είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο του K. Έστω $C \in \mathcal{S}(K)$. Υπάρχουν $\theta_1, \ldots, \theta_m \in S^{n-1}$ ώστε $C = (S_{\theta_m} \circ \cdots \circ S_{\theta_1})(K)$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.3.6 βλέπουμε ότι

$$\mathrm{diam}(K) \geq \mathrm{diam}(C). \tag{1.4.30}$$

Από το Θεώρημα 1.4.2, υπάρχει ακολουθία $\{C_s\}$ στοιχείων της $\mathcal{S}(K)$ ώστε $C_s \to B$, όπου $B = rB_2^n$ η μπάλα που έχει τον ίδιο όγκο με το K. Από τον ορισμό της απόστασης Hausdorff ελέγχουμε ότι

$$\liminf_{s\to\infty} \mathrm{diam}(C_s) \geq \mathrm{diam}(rB_2^n), \tag{1.4.31}$$

άρα $\mathrm{diam}(K) \geq 2r$. Αφού $|K| = |rB_2^n| = r^n|B_2^n|$, έπεται το συμπέρασμα. □