ΜΑΘΗΜΑ 19

Στο προηγούμενο μάθημα αποδείξαμε ότι ισχύει η ισότητα (2) της επιμεριστικής ιδιότητας. Όπως φαίνεται στην απόδειξη, όταν όλοι οι παράγοντες που εμφανίζονται είναι διάφοροι του O, αυτό το πετύχαμε γιατί η ζητούμενη ισότητα ισοδυναμεί με μια ισότητα όπου το ένα από τα σημεία – το R – εμφανίζεται σαν μεταβλητή σε δύο απεικονίσεις και απαλείφεται. Για να δείξουμε την ισότητα (3) της επιμεριστικής ιδιότητας, η προηγούμενη μέθοδος δεν λειτουργεί. Πράγματι, έχουμε τις ισοδυναμίες

$$\begin{aligned}(P+Q)\cdot R = P\cdot R + Q\cdot R &\Leftrightarrow\ h_{P+Q}(R) = \mathcal{E}_{P\cdot R}(Q\cdot R)\\ &\Leftrightarrow\ h_{P+Q}(R) = \mathcal{E}_{P\cdot R}\circ h_Q(R)\end{aligned}$$

όπου το R δεν μπορεί να απαλειφθεί, γιατί εκτός από τις μεταβλητές εμφανίζεται και στον δείκτη της $\mathcal{E}_{P\cdot R}$.

Για να ξεπεράσουμε αυτή την δυσκολία θεωρούμε μια ευθεία $\ell_o \in J(O)$, $\ell_o \neq k$. Τότε $S \notin \ell_o$, επομένως υπάρχει η ομάδα $\mathbb{H}(S,\ell_o)$. Επίσης, κάθε $P \in \mathcal{R}_*$ αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε μια προσδιοριστική τετράδα (S,ℓ_o,I,P) που με την σειρά της αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε μια ομολογία της $\mathbb{H}(S,\ell_o)$. Συμβολίζουμε αυτή την ομολογία με h^P. Δηλ. έχουμε τις ταυτήσεις

(1) $$h^P \equiv (S,\ell_o,I,P)$$

(2) $$h_P \equiv (O,\ell,I,P).$$

Δείχνουμε τώρα ότι τα στοιχεία των $\mathbb{H}(O,\ell)$ και $\mathbb{H}(S,\ell_o)$ μετατίθενται μεταξύ τους:

ΛΗΜΜΑ 1. *Για κάθε $X, Y \in \mathcal{R}_*$,*

(3) $$h^X \circ h_Y = h_Y \circ h^X.$$

Απόδειξη. Αρκεί νδο

$$h := (h_Y \circ h^X)^{-1} \circ h^X \circ h_Y = (h^X)^{-1} \circ (h_Y)^{-1} \circ h^X \circ h_Y = id.$$

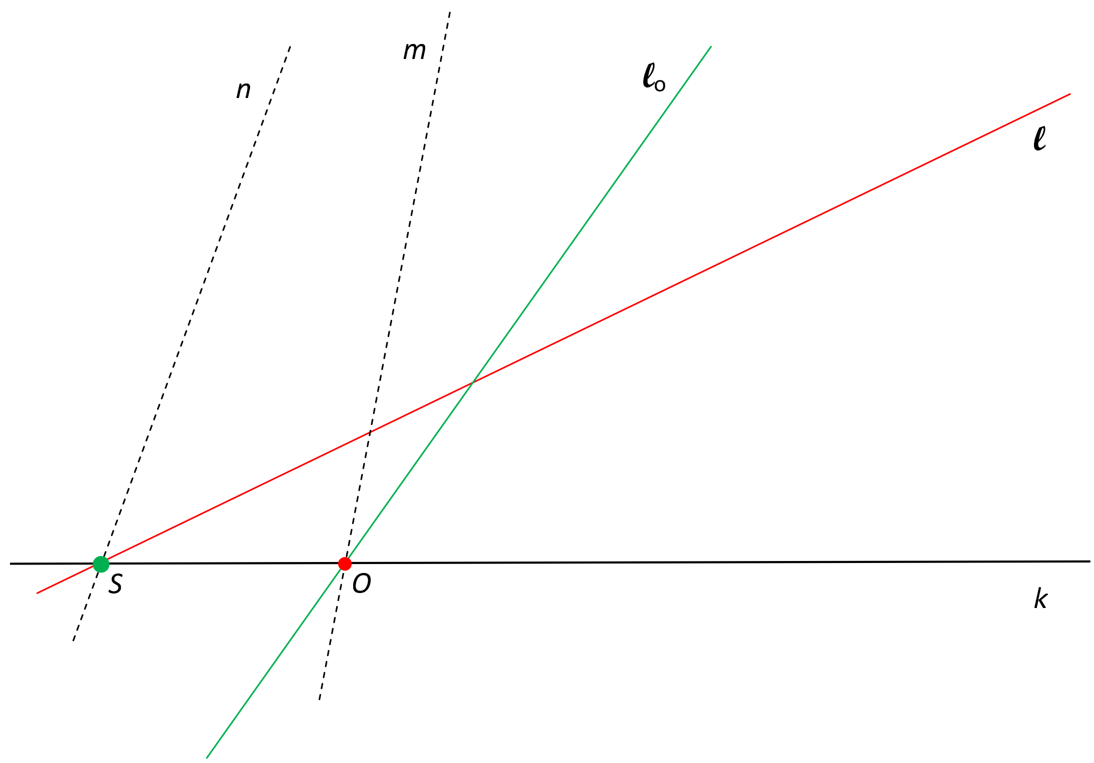
Θεωρούμε μια ευθεία $m \in J(O)$. Παρατηρούμε ότι το O είναι κέντρο της h_Y, άρα $h_Y(m) = m$. Επίσης, το O είναι σημείο του άξονα ℓ_o της h^X, άρα $h^X(O) = O$ και

$$O \in m \ \Rightarrow\ h^X(O) = O \in h^X(m),$$

οπότε

$$\begin{aligned} h(m) &= (h^X)^{-1} \circ (h_Y)^{-1} \circ h^X \circ h_Y(m) \\ &= (h^X)^{-1} \circ (h_Y)^{-1} \circ h^X(m) \\ &= (h^X)^{-1} \circ h^X(m) = m \end{aligned}$$

και το O είναι κέντρο της h.



Θεωρούμε τώρα μια ευθεία $n \in J(S)$. Παρατηρούμε ότι το S είναι σημείο του άξονα ℓ της h_Y, άρα $h_Y(S) = S$ και

$$S \in n \;\Rightarrow\; h_Y(S) = S \in h_Y(n).$$

Επειδή το S είναι κέντρο της h^X, $h^X(h_Y(n)) = h_Y(n)$, οπότε

$$\begin{aligned} h(n) &= (h^X)^{-1} \circ (h_Y)^{-1} \circ h^X \circ h_Y(n) \\ &= (h^X)^{-1} \circ (h_Y)^{-1} \circ h_Y(n) \\ &= (h^X)^{-1}(n) = n \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι η n περνά από το κέντρο S της h^X. Άρα το S είναι κέντρο της h.

Επειδή η h έχει δύο κέντρα, τα O και S, προκύπτει $h = id$. □

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Για κάθε $X, Y \in \mathcal{R}_*$, ισχύει*

$$h^X(Y) = h_Y(X) = Y \cdot X. \tag{4}$$

Απόδειξη. Από τις ταυτίσεις (5) και (6) προκύπτει ότι για κάθε $P \in \mathcal{R}_*$ είναι

$$h^P(I) = h_P(I) = P.$$

Άρα

$$Y \cdot X = h_Y(X) = h_Y(h^X(I)) = h^X(h_Y(I)) = h^X(Y). \qquad \square$$

ΛΗΜΜΑ 2. *Για κάθε $X, Y \in \mathcal{R}_*$ ισχύει*

$$\varepsilon_{X \cdot Y} = h^Y \circ \varepsilon_X \circ (h^Y)^{-1}.$$

Απόδειξη. Επειδή $h^Y, (h^Y)^{-1} \in \mathbb{H}(S, \ell_o)$ και $\varepsilon_X \in \mathcal{E}(S, \ell)$, και οι τρεις συγγραμμικότητες h^Y, $(h^Y)^{-1}$ και ε_X έχουν κέντρο S, άρα και η σύνθεση τους έχει κέντρο S.

Δείχνουμε ότι η ℓ είναι άξονας της σύνθεσης: Έστω $P \in \ell$. Επειδή η ℓ περνά από το κέντρο S της $(h^Y)^{-1}$, είναι $(h^Y)^{-1}(\ell) = \ell$ και

$$P \in \ell \;\Rightarrow\; (h^Y)^{-1}(P) \in (h^Y)^{-1}(\ell) = \ell.$$

Επειδή η ℓ είναι άξονας της ε_X και $(h^Y)^{-1}(P) \in \ell$,

$$\varepsilon_X((h^Y)^{-1}(P)) = (h^Y)^{-1}(P).$$

Οπότε

$$h^Y \circ \varepsilon_X \circ (h^Y)^{-1}(P) = h^Y \circ h^Y)^{-1}(P) = P$$

και η ℓ είναι άξονας της σύνθεσης. Άρα

$$h^Y \circ \mathcal{E}_X \circ (h^Y)^{-1} = \mathcal{E}_A \in \mathbb{E}(S, \ell),$$

για ένα A που προσδιορίζεται από την σχέση

$$A = \mathcal{E}_A(O) = h^Y \circ \mathcal{E}_X \circ (h^Y)^{-1}(O).$$

Επειδή το O είναι σημείο του άξονα ℓ_o της $(h^Y)^{-1}$, μένει αναλλοίωτο από αυτήν, άρα

$$A = h^Y \circ \mathcal{E}_X \circ (h^Y)^{-1}(O) = h^Y \circ \mathcal{E}_X(O) = h^Y(X) = X \cdot Y$$

και

$$\mathcal{E}_A = h^Y \circ \mathcal{E}_X \circ (h^Y)^{-1} = \mathcal{E}_{X \cdot Y}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Για κάθε $P, Q, R \in \mathcal{R}$, ισχύει*

$$(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι κανένας παράγοντας δεν είναι ίσος με το O. Δηλ. $P, Q, R \in \mathcal{R}_*$ και $P + Q \neq O$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R &\Leftrightarrow\ h^R(P + Q) = \mathcal{E}_{P \cdot R}(Q \cdot R) \\
&\Leftrightarrow\ h^R \circ \mathcal{E}_P(Q) = \mathcal{E}_{P \cdot R} \circ h^R(Q), \quad \forall\, Q \in \mathcal{R}_* \\
&\Leftrightarrow\ h^R \circ \mathcal{E}_P = \mathcal{E}_{P \cdot R} \circ h^R \\
&\Leftrightarrow\ h^R \circ \mathcal{E}_P \circ (h^R)^{-1} = \mathcal{E}_{P \cdot R},
\end{aligned}$$

που ισχύει, από το Λήμμα 2.

Εξετάζουμε ιδιαιτέρως τις περιπτώσεις που κάποιος παράγοντας ισούται με O:

Αν $P = O$, η ζητούμενη ισότητα γίνεται $(O+Q) \cdot R = O \cdot R + Q \cdot R$, δηλ. $Q \cdot R = O + Q \cdot R$, που ισχύει.

Παρόμοια, αν $Q = O$, η ζητούμενη ισότητα γίνεται $(P + O) \cdot R = P \cdot R + O \cdot R$, δηλ. $P \cdot R = P \cdot R + O$, που ισχύει. Αν $R = O$, η ζητούμενη ισότητα γίνεται $(P + Q) \cdot O = P \cdot O + Q \cdot O$, που ισχύει.

Αν $P + Q = O$, τότε $Q = -P$ και η ζητούμενη ισότητα ισοδυναμεί τώρα με

$$\begin{aligned}
(P+Q)\cdot R = P\cdot R + Q\cdot \Leftrightarrow\ & O\cdot R = P\cdot R + (-P)\cdot R \\
\Leftrightarrow\ & -(P\cdot R) = (-P)\cdot R \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{E}_{P\cdot R}^{-1}(O) = h^R(\mathcal{E}_P^{-1}(O)) \\
\Leftrightarrow\ & (h^R \circ \mathcal{E}_P \circ (h^R)^{-1})^{-1}(O) = h^R \circ \mathcal{E}_P^{-1}(O) \\
\Leftrightarrow\ & h^R \circ \mathcal{E}_P^{-1} \circ (h^R)^{-1}(O) = h^R \circ \mathcal{E}_P^{-1}(O) \\
\Leftrightarrow\ & (h^R)^{-1}(O) = O,
\end{aligned}$$

πράγμα που ισχύει, αφού το O ανήκει στον άξονα της $(h^R)^{-1}$. $\square$