ΜΑΘΗΜΑ 15

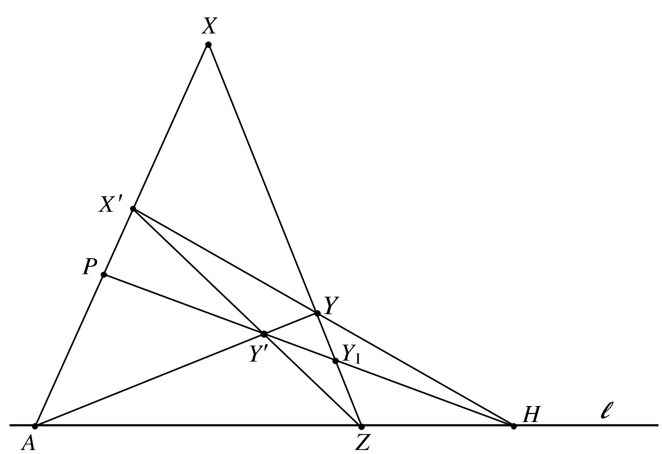
Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι σε ένα προβολικό επίπεδο Desargues για κάθε προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') με $A \notin \ell$, υπάρχει η αντίστοιχη ομολογία. Εκφράζουμε αυτή την κατάσταση λέγοντας ότι "*σε ένα επίπεδο Desargues υπάρχουν όλες οι ομολογίες*". Θα δείξουμε τώρα ότι σε αυτά τα επίπεδα "*υπάρχουν και όλες οι επάρσεις*".

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ένα επίπεδο Desargues. Τότε για κάθε προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') με $A \in \ell$, υπάρχει η αντίστοιχη έπαρση.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι στο προβολικό επίπεδο των 7 σημείων υπάρχουν όλες οι επάρσεις (Μάθημα 14, Άσκηση 2(2)). Στην απόδειξη που ακολουθεί θεωρούμε ότι οι ευθείες έχουν τουλάχιστον 4 σημεία. Έστω (A, ℓ, X, X') μια προσδιοριστική τετράδα με $A \in \ell$. Θεωρούμε ένα σημείο $Y \in \mathcal{P}$, με $X \notin \ell$ και $Y \notin A \vee X$. Με την βοήθεια του ζεύγους (X, X') μπορούμε να βρούμε γραφικά το σημείο Y' που *θα ήταν* εικόνα του Y, *αν υπήρχε* μια έπαρση (ϕ, ψ) που αντιστοιχεί στην δεδομένη τετράδα. Δηλ.:

(1) Φέρουμε την $A \vee Y$. Το Y' ανήκει στην $A \vee Y$, αφού A, Y, Y' είναι συγγραμμικά.

(2) Φέρουμε την $X \vee Y$ και τέμνουμε με την ℓ στο Z. Το Y' βρίσκεται πάνω στην $X' \vee Z$, αφού $X \vee Y$, $X' \vee Y'$ και ℓ συντρέχουν.



Άρα, όπως εξάλλου γνωρίζουμε,

$$Y' = (A \vee Y) \wedge (X' \vee Z) = (A \vee Y) \wedge (X' \vee ((X \vee Y) \wedge \ell)).$$

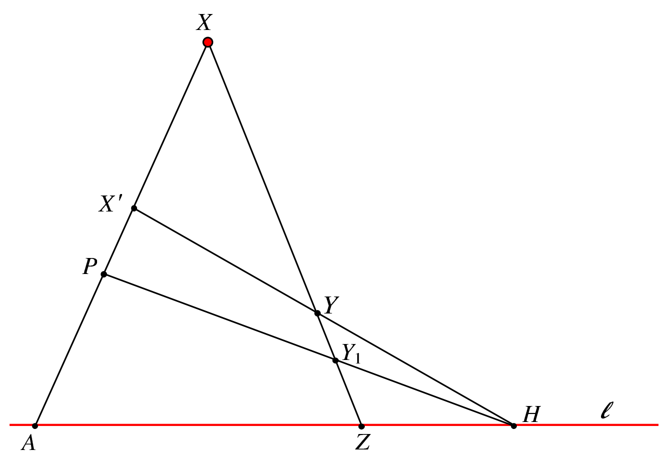
Κατόπιν θέτουμε $H = (X' \vee Y) \wedge \ell$, θεωρούμε την ευθεία $H \vee Y'$ και τα σημεία $Y_1 = (H \vee Y') \wedge (X \vee Y)$ και $P = (H \vee Y') \wedge (A \vee X)$.

Παρατηρούμε τώρα ότι (X, ℓ, X', P) είναι προσδιοριστική τετράδα μιάς ομολογίας $(\phi_1, \psi_1) \in \mathbb{H}(X, \ell)$, που *υπάρχει*, αφού το επίπεδο είναι Desargues. Για αυτή την ομολογία ισχύει

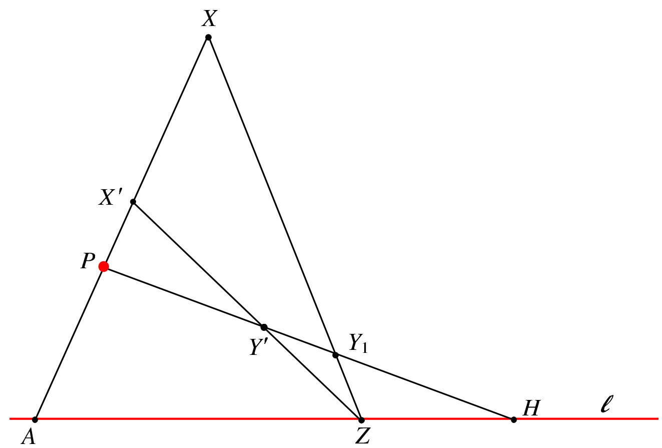
$$\phi_1(X) = X,$$

αφού το X είναι κέντρο, ενώ η γεωμετρική κατασκευή των εικόνων μας δίνει

$$\phi_1(Y) = Y_1.$$



Επίσης παρατηρούμε ότι (P, ℓ, X, X') είναι προσδιοριστική τετράδα μιάς ομολογίας $(\phi_2, \psi_2) \in \mathbb{H}(P, \ell)$, που *υπάρχει*, για τον ίδιο λόγο.



Για την δεύτερη ομολογία παρατηρούμε ότι

$$\phi_2(X) = X'$$

όπως προκύπτει από την προσδιοριστική τετράδα (P, ℓ, X, X'), ενώ κατασκευάζοντας γεωμετρικά την εικόνα του Y_1 βρίσκουμε

$$\phi_2(Y_1) = Y'.$$

Θέτουμε

$$(\phi, \psi) = (\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1).$$

Η ανωτέρω σύνθεση είναι συγγραμμικότητα, σαν σύνθεση τέτοιων. Επίσης η ℓ είναι άξονας της σύνθεσης, αφού είναι άξονας και της (ϕ_1, ψ_1) και της (ϕ_2, ψ_2). Υπολογίζοντας τις εικόνες των X, Y μέσω της σύνθεσης παίρνουμε

$$\phi_2(\phi_1(X)) = \phi_2(X) = X',$$
$$\phi_2(\phi_1(Y)) = \phi_2(Y_1) = Y'.$$

Επειδή η σύνθεση έχει άξονα, έχει και κέντρο, έστω O. Τότε τα σημεία O, X, X' είναι συγγραμμικά. Ομοίως τα O, Y, Y' είναι συγγραμμικά. Άρα

$$O = (X \vee X') \wedge (Y \vee Y') = A.$$

Καταλήγουμε ότι η σύνθεση (ϕ, ψ) είναι συγγραμμικότητα με κέντρο A, άξονα ℓ (άρα είναι έπαρση), και στέλνει το X στο X', δηλ. είναι η μοναδική έπαρση που αντιστοιχεί στην προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X'). $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ένα επίπεδο Desargues, που οι ευθείες του έχουν τουλάχιστον 4 σημεία. Έστω $A \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$ με $A \in \ell$. Τότε κάθε έπαρση $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}(A, \ell)$ είναι σύνθεση δύο ομολογιών με τον ίδιο άξονα ℓ.*

Απόδειξη. Έστω μια προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') με $A \notin \ell$. Θεωρούμε ένα σημείο $Y \in \mathcal{P}$ με $Y \notin \ell$ και $Y \notin A \vee X$ και προσδιορίζουμε τα σημεία H, Y', Z, Y_1 και P όπως στην προηγούμενη απόδειξη. Οι προσδιοριστικές τετράδες (X, ℓ, X', P) και (P, ℓ, X, X') αντιστοιχούν σε ομολογίες, των οποίων η σύνθεση συμπίπτει με την (ϕ, ψ). $\square$

Στις προηγούμενες αποδείξεις συνθέσαμε δύο ομολογίες με τον ίδιο άξονα ℓ και καταλήξαμε σε μια έπαρση με τον ίδιο άξονα. Άραγε μπορούμε να συνθέσουμε δύο επάρσεις με άξονα ℓ και να πάρουμε ομολογία; Η απάντηση είναι *όχι*. Πιο συγκεκριμμένα, έστω $\mathbb{E}(\ell)$ το σύνολο των επάρσεων με άξονα ℓ. Ισχύει η επόμενη

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ένα επίπεδο Desargues και $\ell \in \mathcal{L}$. Το σύνολο $\mathbb{E}(\ell)$ είναι κλειστό ως προς την σύνθεση συγγραμμικοτήτων. Ιδιαιτέρως, είναι αβελιανή υποομάδα της $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$.*

Η απόδειξη παραλείπεται.

ΑΣΚΗΣΗ. (α) Γιατί το επίπεδο των 7 σημείων παραλείπεται στην Πρόταση 1;

(β) Να ελέγξετε αν η Πρόταση 2 ισχύει στο επίπεδο των 7 σημείων.