ΜΑΘΗΜΑ 11

Θα μελετήσουμε την ομάδα των ομολογιών $\mathbb{H}([1,0,0], < 1,0,0 >)$. Το διάνυσμα $(1,0,0)$ έχει επιλεγεί για να διευκολυνθούν οι πράξεις.

Χρειαζόμαστε πρώτα το επόμενο

ΛΗΜΜΑ 1. *Έστω f γραμμικός ισομορφισμός του $\mathbb{R}^3$ και $\lambda \neq 0$. Τότε f και λf ορίζουν την ίδια συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν η f αντιστοιχεί στον πίνακα $M_f = (a_{ij})$, η λf αντιστοιχεί στον $\lambda \cdot M_f = (\lambda a_{ij})$. Έστω ότι η f ορίζει την (ϕ, ψ) και η λf ορίζει την $(\phi_\lambda, \psi_\lambda)$.

Έστω και $P = [x, y, z] \in \mathcal{P}$, τυχαίο. Έχουμε

$$\phi_\lambda(P) = [(x, y, z) \cdot (\lambda a_{ij})] = [\lambda(x, y, z) \cdot (a_{ij})] = [(x, y, z) \cdot (a_{ij})] = \phi(P),$$

απ' όπου προκύπτει $\phi = \phi_\lambda$ και $(\phi, \psi) = (\phi_\lambda, \psi_\lambda)$. □

Έστω (ϕ, ψ) μια συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με κέντρο $[1,0,0]$ και άξονα $< 1,0,0 >$ (ομολογία). Υποθέτουμε ότι η (ϕ, ψ) προέρχεται από ένα γραμμικό ισομορφισμό $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με πίνακα

$$M_g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα M_g:

Επειδή το κέντρο είναι σταθερό, έχουμε

$$\begin{aligned} &\phi([1,0,0]) = [1,0,0] \ \Rightarrow \\ &[(1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}] = [1,0,0] \ \Rightarrow \\ &[a_{11},\ a_{12},\ a_{13}] = [1,0,0] \end{aligned}$$

άρα υπάρχει $\lambda \neq 0$ με

$$(a_{11},\ a_{12},\ a_{13}) = \lambda(1,0,0) = (\lambda, 0, 0).$$

Επειδή $[0,1,0],[0,0,1] \in < 1,0,0 >$, σαν σημεία του άξονα μένουν σταθερά, επομένως με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\phi([0,1,0]) = [0,1,0] \ \Rightarrow \\
&[(0,1,0)\cdot\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}] = [0,1,0] \ \Rightarrow \\
&[a_{21},\ a_{22},\ a_{23}] = [0,1,0]
\end{aligned}$$

άρα υπάρχει $\mu \neq 0$ με

$$(a_{21},\ a_{22},\ a_{23}) = \mu(0,1,0) = (0,\mu,0),$$

και

$$\begin{aligned}
&\phi([0,0,1]) = [0,0,1] \ \Rightarrow \\
&[(0,0,1)\cdot\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}] = [0,0,1] \ \Rightarrow \\
&[a_{31},\ a_{32},\ a_{33}] = [0,0,1]
\end{aligned}$$

άρα υπάρχει $\nu \neq 0$ με

$$(a_{31},\ a_{32},\ a_{33}) = \nu(0,0,1) = (0,0,\nu).$$

Επομένως ο πίνακας M_g έχει την μορφή

$$M_g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Τώρα επειδή και $[0,1,1] \in < 1,0,0 >$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\phi([0,1,1]) = [0,1,1] \ \Rightarrow \\
&[(0,1,1)\cdot\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}] = [0,1,1] \ \Rightarrow \\
&[0,\ \mu,\ \nu] = [0,1,1]
\end{aligned}$$

Άρα υπάρχει $\rho \neq 0$ με $(0, \mu, \nu) = \rho(0, 1, 1) = (0, \rho, \rho)$, απ' όπου παίρνουμε $\mu = \nu = \rho$ και ο πίνακας M_g γίνεται

$$M_g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

και αντιστοιχεί στον ισομορφισμό

$$g(x, y, z) = (\lambda x, \rho y, \rho z), \qquad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Θέτουμε $s = \lambda/\rho \neq 0$. Λόγω του Λήμματος 1, ο ισομορφισμός $f = \rho^{-1} g$ με

$$f(x, y, z) = (sx, y, z), \qquad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

και με πίνακα

$$M_f = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ορίζει την ίδια (ϕ, ψ).

Επομένως έχουμε αποδείξει το επόμενο:

ΛΗΜΜΑ 2. *Αν $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, προέρχεται από ισομορφισμό, τότε αυτός μπορεί να πάρει την μορφή (1), επομένως και ο πίνακας του παίρνει την μορφή (2).*

Ισχύει και το αντίστροφο:

ΛΗΜΜΑ 3. *Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισομορφισμός με πίνακα M_f της μορφής (2), όπου $s \neq 0$. Τότε η συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) που ορίζεται από την f είναι στοιχείο της ομάδας $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $M_f = M_f^t$ και

$$M_f^{-1} = (M_f^t)^{-1} = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Το $[1, 0, 0]$ είναι κέντρο: αν μια ευθεία $k =< a, b, c >$ περνά από το $[1, 0, 0]$, αυτή μένει αναλλοίωτη. Πράγματι,

$$k =< a, b, c > \in J([1, 0, 0]) \ \Rightarrow\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c = 0 \ \Rightarrow\ a = 0 \ \Rightarrow$$
$$k =< 0, b, c >$$

(με $(b, c) \neq (0, 0)$), οπότε

$$\psi(k) = < (0, b, c) \cdot (M_f^t)^{-1} > = < 0, b, c > = k.$$

Η $< 1, 0, 0 >$ είναι άξονας: αν ένα σημείο $[x, y, z]$ ανήκει στην $< 1, 0, 0 >$, αυτό μένει αναλλοίωτο. Πράγματι,

$$P = [x, y, z] \in < 1, 0, 0 > \Rightarrow \ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \ \Rightarrow \ x = 0 \ \Rightarrow \\ P = [0, y, z]$$

(με $(y, z) \neq (0, 0)$), οπότε

$$\phi(P) = [(0, y, z) \cdot M_f] = [0, y, z] = P. \qquad \square$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η απαίτηση μας η (ϕ, ψ) να προέρχεται από κάποια f μπορεί να παραληφθεί.

ΛΗΜΜΑ 4. *Έστω $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$. Τότε υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός f του $\mathbb{R}^3$, που ορίζει την (ϕ, ψ).*

Απόδειξη. Αφού γνωρίζουμε κέντρο και άξονα, η (ϕ, ψ) ορίζεται πλήρως από μια τετράδα της μορφής $([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >, P, \phi(P))$, όπου $P \neq [1, 0, 0]$ και $P \notin < 1, 0, 0 >$. Το $P = [1, 1, 0]$ είναι ένα τέτοιο σημείο. Έστω $\phi(P) = [p, q, r]$. Τότε $\phi(P) \neq [1, 0, 0]$ και $\phi(P) \notin < 1, 0, 0 >$. Τότε:

$$[p, q, r] \neq [1, 0, 0] \ \Rightarrow \ (q, r) \neq (0, 0)$$
$$[p, q, r] \notin < 1, 0, 0 > \Rightarrow \ p \neq 0$$
$$[1, 0, 0], P, \phi(P) \text{ συγγραμμικά } \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ p & q & r \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow r = 0.$$

Συνδυάζοντας το πρώτο με το τρίτο αποτέλεσμα παίρνουμε $q \neq 0$. Επομένως $pq \neq 0$. Θέτουμε $s = p/q$, οπότε

$$\phi(P) = [p, q, 0] = [p/q, 1, 0] = [s, 1, 0]$$

και η (ϕ, ψ) είναι η μοναδική συγγραμμικότητα που ορίζεται από την τετράδα

$$([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >, [1, 1, 0], [s, 1, 0]).$$

Θεωρούμε τώρα τον γραμμικό ισομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$ με πίνακα τον

$$M_f = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο f ορίζει συγγραμμικότητα $(\overline{\phi}, \overline{\psi})$ με

$$\overline{\phi}(P) = [(1,1,0) \cdot \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}] = [s,1,0] = \phi(P).$$

Άρα (βλ. Θεώρ. του Μαθ. 8) $(\phi, \psi) = (\overline{\phi}, \overline{\psi})$ και η (ϕ, ψ) ορίζεται από την f. □

Συνδυάζοντας τα προηγούνενα Λήμματα παίρνουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Έστω (ϕ, ψ) μια συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Τότε η (ϕ, ψ) είναι στοιχείο της ομάδας $\mathbb{H}([1,0,0], < 1,0,0 >)$ αν και μόνον αν η (ϕ, ψ) ορίζεται από γραμμικό ισομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$, του οποίου ο πίνακας είναι της μορφής (2), με $s \neq 0$.*

Συμβολίζουμε με $\widetilde{\mathcal{M}}$ το σύνολο των 3×3 πινάκων της μορφής (2). Με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων, το $\widetilde{\mathcal{M}}$ είναι αβελιανή (: μεταθετική) υποομάδα των 3×3 αντιστρέψιμων πινάκων. Πράγματι, για κάθε $s_1, s_2 \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathcal{M}} \tag{3}$$

ενώ, για κάθε $s \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, με πράξη τον πολλαπλασιασμό είναι αβελιανή ομάδα. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$F_1 : \mathbb{R}_* \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}} : s \longmapsto F_1(s) = M_s = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

είναι ισομορφισμός ομάδων: είναι 1-1 και επί και

$$F_1(s_1 s_2) = \begin{pmatrix} s_1 s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F_1(s_1) \cdot F_1(s_2).$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι για κάθε $s \neq 0$, ο αντίστοιχος πίνακας $F_1(s) = M_s \in \widetilde{\mathcal{M}}$, ορίζει ένα γραμμικό ισομορφισμό f_s με

$$f_s(x, y, z) = (sx, y, z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

που με την σειρά του ορίζει μια συγγραμμικότητα

$$(\phi_s, \psi_s) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >).$$

Θέτουμε

$$F_2 : \widetilde{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >) : M_s \longmapsto F_2(M_s) = (\phi_s, \psi_s). \tag{5}$$

ΛΗΜΜΑ 5. *Η απεικόνιση (5) είναι ισομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη. Η F_2 είναι 1-1: Έστω $M_{s_i} \in \widetilde{\mathcal{M}}$, $i = 1, 2$, με

$$F_2(M_{s_1}) = (\phi_{s_1}, \psi_{s_1}) = (\phi_{s_2}, \psi_{s_2}) = F_2(M_{s_2}).$$

Αφού $\phi_{s_1} = \phi_{s_2}$, για το σημείο $P = [1, 1, 0]$, έχουμε

$$\begin{aligned} \phi_{s_1}(P) = \phi_{s_2}(P) &\Rightarrow [(1, 1, 0) \cdot M_{s_1}] = [(1, 1, 0) \cdot M_{s_2}] \\ &\Rightarrow [s_1, 1, 0] = [s_2, 1, 0] \\ &\Rightarrow \exists\, \lambda \neq 0 \ : \ (s_1, 1, 0) = \lambda(s_2, 1, 0) \\ &\Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{και} \quad s_1 = s_2 \\ &\Rightarrow M_{s_1} = M_{s_2}. \end{aligned}$$

Η F_2 είναι επί: προκύπτει από το Λήμμα 3.

Η F_2 είναι μορφισμός ομάδων: Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα (3) παίρνουμε

$$F_2(M_{s_2} \cdot M_{s_1}) = F_2(M_{s_2 s_1}) = (\phi_{s_2 s_1}, \psi_{s_2 s_1})$$
$$F_2(M_{s_2}) \circ F(M_{s_1}) = (\phi_{s_2}, \psi_{s_2}) \circ (\phi_{s_1}, \psi_{s_1}) = (\phi_{s_2} \circ \phi_{s_1}, \psi_{s_2} \circ \psi_{s_1})$$

ενώ για το σημείο $P = [1, 1, 0]$ έχουμε

$$\begin{aligned} (\phi_{s_2} \circ \phi_{s_1})([1, 1, 0]) &= [((1, 1, 0) \cdot M_{s_1}) \cdot M_{s_2}] = [(s_1, 1, 0) \cdot M_2] \\ &= [s_2 s_1, 1, 0] = \phi_{s_2 s_1}([1, 1, 0]) \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$F_2(M_{s_2} \cdot M_{s_1}) = F_2(M_{s_2}) \circ F(M_{s_1})$$

και η F_2 είναι μορφισμός ομάδων.

Έχουμε καταλήξει επομένως στο επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Οι μη-μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί με πράξη τον πολλαπλασιασμό, οι πίνακες του συνόλου $\widetilde{\mathcal{M}}$ με τον πολλαπλασιασμό πινάκων και οι ομολογίες $\mathbb{H}([1,0,0],<1,0,0>)$ με την πράξη της σύνθεσης αποτελούν ισόμορφες αβελιανές ομάδες:*

$$(\mathbb{R}_*,\cdot) \cong (\widetilde{\mathcal{M}},\cdot) \cong (\mathbb{H}([1,0,0],<1,0,0>),\circ).$$