ΜΑΘΗΜΑ 14, ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Μπορούν οι τρεις ευθείες στον ορισμό του τριγώνου να συντρέχουν;

Απάντηση. Έστω A, B, C οι κορυφές του τριγώνου. Αυτά είναι τρία μη συγγραμμικά σημεία. Έστω ότι οι πλευρές συντρέχουν, δηλ. υπάρχει $D \in \mathcal{P}$ με

$$D \in A \vee B, \qquad D \in B \vee C \qquad D \in C \vee A.$$

Οι $A \vee B$ και $B \vee C$, έχουν ένα κοινό σημείο, το B. Αν $D \neq B$, τότε οι $A \vee B$ και $B \vee C$ έχουν δύο διαφορετικά κοινά σημεία, άρα συμπίπτουν. Οπότε

$$A \vee B = C \vee B$$

και τα A, B, C είναι συγγραμμικά, άτοπο. Άρα $D = B$. Τότε, $B = D \in A \vee C$, οπότε A, B, C είναι συγγραμμικά, άτοπο.

2. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ το προβολικό επίπεδο των 7 σημείων, $A \in \mathcal{P}$, $\ell \in \mathcal{L}$.
(1) Αν $A \notin \ell$, να υπολογίσετε την ομάδα $\mathbb{H}(A, \ell)$.
(2) Αν $A \in \ell$, να υπολογίσετε την ομάδα $\mathbb{E}(A, \ell)$.
(3) Να εξετάσετε αν το $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ είναι επίπεδο Desargues.

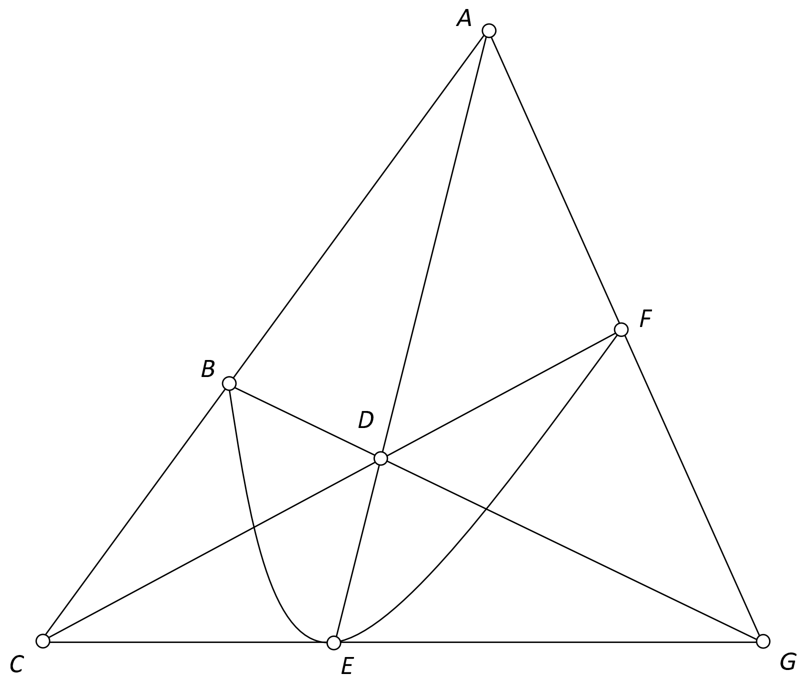
Απάντηση. Θεωρούμε το προβολικό επίπεδο των 7 σημείων με

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\},$$
$$\mathcal{L} = \{ABC, ADE, AFG, BDG, CDF, CEG, BEF\}$$

όπως στο σχήμα της επόμενης σελίδας.

(1) Ας υποθέσουμε ότι $\ell = CEG$, και ζητείται η ομάδα $\mathbb{H}(A, \ell)$. Έστω $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$. Το κέντρο A και τα σημεία C, E και G του άξονα είναι σταθερά. Αναζητούμε τις εικόνες των B, E και F. Επειδή το κέντρο A, το B και το $\phi(B)$ είναι συγγραμμικά, παίρνουμε $\phi(B) \in A \vee B = ABC$, άρα $\phi(B) = A$ ή $\phi(B) = B$ ή $\phi(B) = C$. Η πρώτη και η τρίτη ισότητα αποκλείονται, άρα $\phi(B) = B$. Οπότε η (ϕ, ψ) ορίζεται πλήρως από την προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, B, B), δηλ. $(\phi, \psi) = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$ και

$$\mathbb{H}(A, \ell) = \{(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})\}.$$



(2) Έστω τώρα ότι $\ell = ABC$. Για οποιαδήποτε $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}(A, \ell)$, τα σημεία A, B και C μένουν σταθερά. Ενδιαφέρουν οι εικόνες των D, E, F και G. Επειδή η εικόνα $\phi(D)$ είναι πάνω στην ευθεία $A \vee D = ADE$ και δεν είναι το κέντρο A, είναι $\phi(D) = D$ ή $\phi(D) = E$. Αν $\phi(D) = D$, τότε η (ϕ, ψ) ορίζεται πλήρως από την προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, D, D), δηλ. $(\phi, \psi) = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$. Αν $\phi(D) \neq D$, τότε $(\phi, \psi) \neq (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$ και για κάθε άλλο σημείο X από τα E, F και G πρέπει επίσης να είναι $\phi(X) \neq X$. Διότι, αν για ένα από αυτά είναι $\phi(X) = X$, τότε η (A, ℓ, X, X) είναι προσδιοριστική τετράδα της (ϕ, ψ), άρα $(\phi, \psi) = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$, άτοπο. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψιν ότι A, X και $\phi(X)$ είναι συγγραμμικά, παίρνουμε:

$$\begin{gathered} \phi(A) = A, \qquad \phi(B) = B, \qquad \phi(C) = C \\ \phi(D) = E, \qquad \phi(E) = D, \qquad \phi(F) = G, \qquad \phi(G) = F. \end{gathered} \tag{1}$$

Άρα

$$\mathbb{E}(A, \ell) = \{(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}}), (\phi, \psi)\},$$

όπου η δεύτερη συγγραμμικότητα προσδιορίζεται από τις ισότητες (1).

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για την δεύτερη συγγραμμικότητα ισχύει $(\phi, \psi)^{-1} = (\phi, \psi)$, ή, ισοδύναμα, $(\phi, \psi) \circ (\phi, \psi) = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$.

(3) Το προβολικό επίπεδο των 7 σημείων είναι επίπεδο Desargues, αν για κάθε προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X'), με $A \notin \ell$, υπάρχει η αντίστοιχη ομολογία. Θεωρούμε το σημείο A και την $\ell = CEG$. Τότε $X \in \{B, D, E\}$ και $X' \in A \vee X$ με $X' \neq A, C, E, G$. Αρα οι προσδιοριστικές τετράδες που δημιουργούνται είναι οι (A, ℓ, B, B), (A, ℓ, D, D) και (A, ℓ, F, F), και για όλες υπάρχει η αντίστοιχη ομολογία $(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$.

3. Έστω $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ένα προβολικό επίπεδο Desargues. Να εξετάσετε αν το δυϊκό του είναι επίπεδο Desargues.

Απάντηση. Έστω $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ένα προβολικό επίπεδο Desargues και $\mathcal{P}^* \equiv (\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ το δυϊκό του. Παρατηρούμε ότι αν $\mathcal{I} \equiv \in$, τότε $\mathcal{I}^* \equiv \ni$. Χρησιμοποιούμε για ευκολία τα δεύτερα σύμβολα. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$P \in \mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; P \in \mathcal{L}^*$$
$$\ell \in \mathcal{L} \;\Leftrightarrow\; \ell \in \mathcal{P}^*$$

και θα χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα: κεφαλαία γράμματα για τα σημεία του $\mathcal{P}$ και για τις ευθείες του $\mathcal{L}^* = \mathcal{P}$, μικρά γράμματα για τις ευθείες του $\mathcal{L}$ και τα σημεία του $\mathcal{P}^* = \mathcal{L}$. Τέλος παρατηρούμε ότι

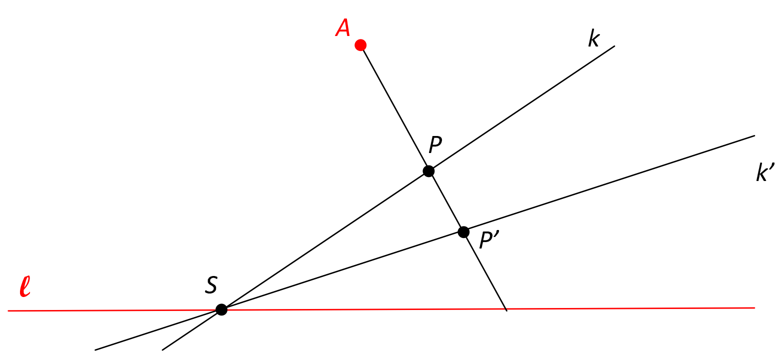
$$(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P}) \;\Leftrightarrow\; (\psi, \phi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P}^*)$$

και ιδιαιτέρως,

$$(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell) \;\Leftrightarrow\; (\psi, \phi) \in \mathbb{L}^*(\ell, A),$$

όπου $\mathbb{L}(A, \ell)$ οι συγγραμμικότητες με κέντρο A και άξονα ℓ του $\mathcal{P}$ και $\mathbb{L}^*(\ell, A)$ οι συγγραμμικότητες με κέντρο ℓ και άξονα A του $\mathcal{P}^*$.

Λύση 1: Αλγεβρική. Έστω μια προσδιοριστική τετράδα (ℓ, A, k, k') του $\mathcal{P}^*$, με $\ell \not\ni A$. Δηλ. $\ell \in \mathcal{P}^* = \mathcal{L}$, $A \in \mathcal{L}^* = \mathcal{P}$ με $\ell \not\ni A$, $k, k' \in \mathcal{P}^* = \mathcal{L}$, με $k, k' \neq \ell$, $k, k' \not\ni \ell$ και ℓ, k, k' συγγραμμικά στο $\mathcal{P}^*$ (δηλ. ℓ, k, k' συντρέχουσες στο $\mathcal{P}$). Πρέπει νδο υπάρχει η αντίστοιχη ομολογία (ψ, ϕ) του $\mathcal{P}^*$. Δηλ. πρέπει νδο υπάρχει ομολογία (ϕ, ψ) του $\mathcal{P}$, με κέντρο A και άξονα ℓ, που στέλνει την ευθεία k στην k'.



Έστω $S = k \wedge k' = k \wedge \ell = k' \wedge \ell$. Θεωρούμε ένα $P \in k$, $P \neq S$. Τότε $P \neq A$, άρα υπάρχει η ευθεία $A \vee P \neq k'$. Θέτουμε $P' = (A \vee P) \wedge k'$. Τότε $P, P' \neq A$, $P, P' \notin \ell$ και A, P, P' συγγραμμικά, άρα (A, ℓ, P, P') είναι προσδιοριστική τετράδα (στο $\mathcal{P}$) μιας ομολογίας (ϕ, ψ) που *υπάρχει*, αφου το $\mathcal{P}$ είναι π.ε. Desargues. Επομένως $(\psi, \phi) \in \mathbb{H}^*(\ell, A)$. Δείχνουμε ότι η (ψ, ϕ) είναι η ζητούμενη, δηλ. $\psi(k) = k'$. Πράγματι,

$$\psi(k) = \psi(P \vee S) = \phi(P) \vee \phi(S) = P' \vee S = k'.$$

Λύση 2: Γεωμετρική. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η έννοια του τριγώνου είναι αυτοδυϊκή, δηλ. το δυϊκό ενός τριγώνο του $\mathcal{P}$ είναι τρίγωνο του $\mathcal{P}$ και ότι η συνθήκη (D) είναι επίσης αυτοδυϊκή, δηλ. $(D^*) = (D)$. Άρα, έστω δύο τρίγωνα του $\mathcal{P}^*$. Τότε

είναι τρίγωνα του $\mathcal{P}^*$ προοπτικά ως προς κέντρο $\Leftrightarrow$

είναι τρίγωνα του $\mathcal{P}$ προοπτικά ως προς άξονα $\overset{(D)}{\Leftrightarrow}$

είναι τρίγωνα του $\mathcal{P}$ προοπτικά ως προς κέντρο $\Leftrightarrow$

είναι τρίγωνα του $\mathcal{P}^*$ προοπτικά ως προς άξονα