**ΜΑΘΗΜΑ 22**

Στα προηγούμενα είδαμε ότι έχοντας ένα προβολικό επίπεδο Desargues $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ορίζουμε ένα διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{R} \equiv (\mathcal{R}, +, \cdot)$.

Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε ένα διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{R}$. Όπως κάναμε για το $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, για κάθε $(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \setminus \{0\}$, θέτουμε

$$[x, y, z] = \{r(x, y, z) \mid r \in \mathcal{R}_*\}$$

και για κάθε $(a, b, c) \in \mathcal{R}^3 \setminus \{0\}$,

$$< a, b, c >= \{(x, y, x) \in \mathcal{R}^3 \setminus \{0\} \mid xa + yb + zc = 0\}.$$

Επίσης θέτουμε

$$[x, y, z] \in < a, b, c > \Leftrightarrow \ (x, y, z) \in < a, b, c > .$$

Παρατηρούμε ότι

$$[x, y, z] = [x', y', z'] \ \Leftrightarrow \ \exists\ r \in \mathcal{R}_* \ : \ r(x, y, z) = (x', y', z'),$$

ενώ πρέπει

$$< a, b, c >=< a', b', c' > \Leftrightarrow \ \exists\ r \in \mathcal{R}_* \ : \ (a, b, c)r = (a', b', c'),$$

ώστε η σχέση της σύμπτωσης να είναι καλά ορισμένη, λόγω της μη-μεταθετικότητας του πολλαλασιασμού. Συμβολίζουμε

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \{[x, y, z] \mid (x, y, z) \in \mathcal{R}^3 \setminus \{0\}\},$$
$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}} = \{< a, b, c > \ \mid (a, b, c) \in \mathcal{R}^3 \setminus \{0\}\}.$$

Θέτουμε

$$\mathbb{P}_2(\mathcal{R}) = (\mathcal{P}_{\mathcal{R}}, \mathcal{L}_{\mathcal{R}}, \in).$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 1.** *Για κάθε διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{R}$, το $\mathbb{P}_2(\mathcal{R})$ είναι προβολικό επίπεδο Desargues.*

Αφού το $\mathbb{P}_2(\mathcal{R})$ είναι επίπεδο Desargues, μπορούμε να θεωρήσουμε μια ευθεία του, να της αφαιρέσουμε ένα σημείο και να ορίσουμε στα υπόλοιπα σημεία την δομή ενός διαιρετικού δακτυλίου $\mathcal{R}'$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2.** *Αν $\mathcal{R}$ είναι ένας διαιρετικός δακτύλιος και $\mathcal{R}'$ είναι ο διαιρετικός δακτύλιος που κατασκευάζεται από το $\mathbb{P}_2(\mathcal{R})$, τότε οι $\mathcal{R}$ και $\mathcal{R}'$ είναι ισόμορφοι.*

Ας ξεκινήσουμε τώρα από ένα προβολικό επίπεδο Desargues $\mathcal{P}$. Κατασκευάζουμε τον διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{R}$ που αντιστοιχεί στο $\mathcal{P}$, και μετά κατασκευάζουμε το $\mathbb{P}_2(\mathcal{R})$. Ισχύει το επόμενο:

**ΘΕΩΡΗΜΑ 3.** *Αν $\mathcal{P}$ είναι προβολικό επίπεδο Desargues και $\mathcal{R}$ ο διαιρετικός του δακτύλιος, τότε $\mathcal{P}$ και $\mathbb{P}_2(\mathcal{R})$ είναι ισόμορφα προβολικά επίπεδα.*

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**1.** *Έστω $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ προβολικά επίπεδα Desargues και $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ οι διαιρετικοί τους δακτύλιοι. Να εξετάσετε αν κάθε ισομορφισμός προβολικών επιπέδων $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ εισάγει ένα ισομορφισμό δακτυλίων $F(f) : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ έτσι ώστε:*

*(i) Αν $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ και $f = id$, τότε $F(id) = id$.*

*(ii) Αν $\mathcal{P}_3$ επίσης προβολικό επίπεδο Desargues και $g : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ ισομορφισμός προβολικών επιπέδων, τότε $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

**2.** *Να διατυπώσετε και να εξετάσετε τα προηγούμενα ερωτήματα, αν ξεκινάμε από ισομορφισμό των δακτυλίων $\mathcal{R}_1$ και $\mathcal{R}_2$ και αναζητούμε ισομορφισμό των $\mathbb{P}_2(\mathcal{R}_1)$ και $\mathbb{P}_2(\mathcal{R}_2)$.*