ΜΑΘΗΜΑ 13

Θα μελετήσουμε τώρα την ομάδα των επάρσεων $\mathbb{E}([0,0,1], <1,0,0>)$. Η όλη μελέτη γίνεται παρόμοια με αυτήν της ομάδας $\mathbb{H}([1,0,0], <1,0,0>)$, γι' αυτό και θα συντομέψουμε τις αποδείξεις.

Έστω (ϕ, ψ) μια συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με κέντρο $[0,0,1]$ και άξονα $<1,0,0>$ (έπαρση). Υποθέτουμε ότι η (ϕ, ψ) προέρχεται από ένα γραμμικό ισομορφισμό $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με πίνακα

$$M_g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

τον οποίο υπολογίζουμε:

Επειδή το κέντρο $[0,0,1]$ και το σημείο $[0,1,0] \in <1,0,0>$ είναι σταθερά, έχουμε

$$\phi([0,0,1]) = [0,0,1] \ \Rightarrow \ (a_{31}, a_{32}, a_{33}) = (0,0,\lambda), \quad \lambda \neq 0$$
$$\phi([0,1,0]) = [0,1,0] \ \Rightarrow \ (a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (0,\mu,0), \quad \mu \neq 0,$$

και ο πίνακας M_g παίρνει τη μορφή

$$M_g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Επειδή και $[0,1,1] \in <1,0,0>$,

$$\phi([0,1,1]) = [0,\mu,\lambda] = [0,1,1] \ \Rightarrow \ \lambda = \mu$$

Θεωρούμε τώρα και τα σημεία $[1,0,0]$ και $[1,1,0]$, που δεν συμπίπτουν με το κέντρο και δεν ανήκουν στον άξονα. Τότε: τα $[0,0,1]$, $[1,0,0]$ και $\phi([1,0,0]) = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ είναι συνευθειακά, άρα

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ a_{12} = 0.$$

Επίσης, και τα $[0,0,1]$, $[1,1,0]$ και $\phi([1,1,0]) = [a_{11}, \lambda, a_{13}]$ είναι συνευθειακά, άρα

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a_{11} & \lambda & a_{13} \end{pmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ a_{11} = \lambda.$$

Δηλ. τελικά ο πίνακας M_g είναι της μορφής

$$M_g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Όπως γνωρίζουμε, κάθε (μη-μηδενικό) αριθμητικό πολλαπλάσιο της g ορίζει την ίδια συγγραμμικότητα, μεταξύ των οποίων είναι και η $f = \lambda^{-1} g$, που ορίζεται από τον πίνακα

$$M_f = \lambda^{-1} M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

όπου $t = \lambda^{-1} a_{13} \in \mathbb{R}$. Οπότε

$$f(x, y, z) = (x, y, tx + z), \qquad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Επομένως έχουμε αποδείξει το επόμενο:

ΛΗΜΜΑ 1. *Αν $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$ προέρχεται από γραμμικό ισομορφισμό f, τότε αυτός μπορεί να πάρει την μορφή (2), επομένως και ο πίνακας του παίρνει την μορφή (1), με $t \in \mathbb{R}$.*

Ισχύει και το αντίστροφο:

ΛΗΜΜΑ 2. *Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ισομορφισμός με πίνακα M_f της μορφής (1), όπου $t \in \mathbb{R}$. Τότε η συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) που ορίζεται από την f είναι στοιχείο της ομάδας $\mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$.*

Απόδειξη. Πρώτα υπολογίζουμε τον πίνακα

$$(M_f^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Το $[0, 0, 1]$ είναι κέντρο: αν μια ευθεία $k =< a, b, c >$ περνά από το $[0, 0, 1]$, αυτή μένει αναλλοίωτη. Πράγματι,

$$k =< a, b, c > \in J([0, 0, 1]) \ \Rightarrow\ c = 0 \ \Rightarrow\ k =< a, b, 0 >$$

(με $(a, b) \neq (0, 0)$), οπότε

$$\psi(k) = < (a, b, 0) \cdot (M_f^t)^{-1} > = < a, b, 0 > = k.$$

Η $< 1, 0, 0 >$ είναι άξονας: αν ένα σημείο $[x, y, z]$ ανήκει στην $< 1, 0, 0 >$, αυτό μένει αναλλοίωτο. Πράγματι,

$$P = [x, y, z] \in < 1, 0, 0 > \Rightarrow \; x = 0 \; \Rightarrow \; P = [0, y, z]$$

(με $(y, z) \neq (0, 0)$), οπότε

$$\phi(P) = [(0, y, z) \cdot M_f] = [0, y, z] = P. \qquad \square$$

Όπως και στις ομολογίες, η απαίτηση μας η (ϕ, ψ) να προέρχεται από κάποια f μπορεί να παραληφθεί.

ΛΗΜΜΑ 3. *Έστω $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$. Τότε υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός f του $\mathbb{R}^3$, που ορίζει την (ϕ, ψ).*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σημείο $P = [1, 0, 0]$ και θέτουμε $\phi(P) = [p, q, r]$. Επειδή $P \notin < 1, 0, 0 >$, έχουμε και $\phi(P) \notin < 1, 0, 0 >$. Άρα

$$[p, q, r] \notin < 1, 0, 0 > \Rightarrow \; p \neq 0$$

$$[0, 0, 1], P, \phi(P) \text{ συγγραμμικά } \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \end{pmatrix} = 0 \; \Rightarrow q = 0.$$

Θέτουμε $t = r/p$, οπότε

$$\phi(P) = [p, 0, r] = [1, 0, r/p] = [1, 0, t]$$

και η (ϕ, ψ) είναι η μοναδική συγγραμμικότητα που ορίζεται από την τετράδα

$$([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >, [1, 0, 0], [1, 0, t]).$$

Θεωρούμε τώρα τον γραμμικό ισομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$ με πίνακα τον

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο f ορίζει συγγραμμικότητα $(\overline{\phi}, \overline{\psi})$ με κέντρο $[0, 0, 1]$, άξονα $< 1, 0, 0 >$ και με

$$\overline{\phi}(P) = [(1, 0, 0)M_f] = [1, 0, t] = \phi(P).$$

Άρα (βλ. Θεώρ. του Μαθ. 8) $(\phi, \psi) = (\overline{\phi}, \overline{\psi})$ και η (ϕ, ψ) ορίζεται από την f. □

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα Λήμματα παίρνουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Έστω (ϕ, ψ) μια συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Τότε η (ϕ, ψ) είναι στοιχείο της ομάδας $\mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$ αν και μόνον αν η (ϕ, ψ) ορίζεται από γραμμικό ισομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$, του οποίου ο πίνακας είναι της μορφής (1), με $t \in \mathbb{R}$.* □

Συμβολίζουμε με $\widetilde{\mathcal{M}}_E$ το σύνολο των 3×3 πινάκων της μορφής (1). Με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων, το $\widetilde{\mathcal{M}}$ είναι αβελιανή (: μεταθετική) υποομάδα των 3×3 αντιστρέψιμων πινάκων. Πράγματι, για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 + t_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathcal{M}}_E \tag{3}$$

ενώ, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathcal{M}}_E.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{R}$ με πράξη την πρόσθεση είναι αβελιανή ομάδα. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$F_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}} : t \longmapsto F_1(t) = M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

είναι ισομορφισμός ομάδων: είναι 1-1 και επί και

$$F_1(s_1 + s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 + s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = F_1(s_1) \cdot F_1(s_2).$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι για κάθε $s \in \mathbb{R}$, ο αντίστοιχος πίνακας $F_1(t) = M_t \in \widetilde{\mathcal{M}}_E$, ορίζει ένα γραμμικό ισομορφισμό f_t με

$$f_t(x, y, z) = (x, y, tx + z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

που με την σειρά του ορίζει μια συγγραμμικότητα

$$(\phi_t, \psi_t) \in \mathbb{E}([0,0,1], < 1,0,0 >).$$

Θέτουμε

$$F_2 : \widetilde{\mathcal{M}}_E \longrightarrow \mathbb{E}([0,0,1], < 1,0,0 >) : M_t \longmapsto F_2(M_t) = (\phi_t, \psi_t). \tag{5}$$

ΛΗΜΜΑ 4. *Η απεικόνιση (5) είναι ισομορφισμός ομάδων.*

Απόδειξη. Η F_2 είναι 1-1: Έστω $M_{t_i} \in \widetilde{\mathcal{M}}_E$, $i = 1, 2$, με

$$F_2(M_{t_1}) = (\phi_{t_1}, \psi_{t_1}) = (\phi_{t_2}, \psi_{t_2}) = F_2(M_{t_2}).$$

Αφού $\phi_{t_1} = \phi_{t_2}$, για το σημείο $P = [1,1,0]$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi_{t_1}(P) = \phi_{t_2}(P) &\Rightarrow\ [(1,1,0) \cdot M_{t_1}] = [(1,1,0) \cdot M_{t_2}] \\
&\Rightarrow\ [1,1,t_1] = [1,1,t_2] \\
&\Rightarrow\ \exists\, \lambda \neq 0\ :\ (1,1,t_1) = \lambda(1,1,t_2) \\
&\Rightarrow\ \lambda = 1 \quad \text{και} \quad t_1 = t_2 \\
&\Rightarrow\ M_{t_1} = M_{t_2}.
\end{aligned}$$

Η F_2 είναι επί: προκύπτει από το Λήμμα 3.

Η F_2 είναι μορφισμός ομάδων: Λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα (3) παίρνουμε

$$\begin{gathered}
F_2(M_{t_2} \cdot M_{t_1}) = F_2(M_{t_2+t_1}) = (\phi_{t_2+t_1}, \psi_{t_2+t_1}) \\
F_2(M_{t_2}) \circ F(M_{t_1}) = (\phi_{t_2}, \psi_{t_2}) \circ (\phi_{t_1}, \psi_{t_1}) = (\phi_{t_2} \circ \phi_{t_1}, \psi_{t_2} \circ \psi_{t_1})
\end{gathered}$$

ενώ για το σημείο $P = [1,1,0]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(\phi_{t_2} \circ \phi_{t_1})([1,1,0]) &= [((1,1,0) \cdot M_{t_1}) \cdot M_{t_2}] = [(1,1,t_1) \cdot M_{t_2}] \\
&= [1,1,t_2 + t_1] = \phi_{t_2+t_1}([1,1,0])
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$F_2(M_{t_2} \cdot M_{t_1}) = F_2(M_{t_2}) \circ F(M_{t_1})$$

και η F_2 είναι μορφισμός ομάδων. □

Έχουμε καταλήξει επομένως στο επόμενο

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Οι πραγματικοί αριθμοί με πράξη την πρόσθεση, οι πίνακες του συνόλου $\widetilde{\mathcal{M}}_E$ με τον πολλαπλασιασμό πινάκων και οι επάρσεις $\mathbb{E}([0,0,1], <1,0,0>)$ με την πράξη της σύνθεσης αποτελούν ισόμορφες αβελιανές ομάδες:*

$$(\mathbb{R},+) \cong (\widetilde{\mathcal{M}}_E,\cdot) \cong (\mathbb{E}([0,0,1], <1,0,0>),\circ). \qquad \square$$

Και στην περίπτωση των επάρσεων η ομάδα $\mathbb{E}([0,0,1], <1,0,0>)$ είναι ισόμορφη με την αντίστοιχη $\mathbb{E}(A,\ell)$, για κάθε $A \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$, με $A \in \ell$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. *Στο $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ θεωρούμε $C \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$ με $C \in \ell$. Τότε*

$$\mathbb{E}(C,\ell) \cong \mathbb{E}([0,0,1], <1,0,0>).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε άλλο ένα σημείο $B \in \ell$ με $B \neq C$ και δύο $A \neq D$, έτσι ώστε τα A, B, C, D ανά τρία να είναι μη συγγραμμικά. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : \mathbb{E}([0,0,1], <1,0,0>) \longrightarrow \mathbb{E}(C,\ell) :$$
$$h(\phi,\psi) = (\sigma,\tau)\circ(\phi,\psi)\circ(\sigma,\tau)^{-1}), \quad \forall\ (\phi,\psi) \in \mathbb{E}([0,0,1], <0,0>),$$

όπου (σ,τ) η συγγραμμικότητα του Λήμματος αποό το Μάθημα 12. Τότε:

(1) *Η h είναι καλά ορισμένη*: Η εικόνα $h(\phi,\psi)$ είναι συγγραμμικότητα, σαν σύνθεση συγγραμμικοτήτων. Έχει κέντρο C: Έστω $k \in J(C)$. Τότε:

$$\begin{aligned} C \in k \Rightarrow\ & \sigma^{-1}(C) = [0,0,1] \in \tau^{-1}(k) \\ \Rightarrow\ & \psi(\tau^{-1}(k)) = \tau^{-1}(k) \qquad (\text{αφού } [0,0,1] \text{ κεντρο της} (\phi,\psi)) \\ \Rightarrow\ & \tau(\psi(\tau^{-1}(k))) = \tau(\tau^{-1}(k)) = k \end{aligned}$$

Έχει άξονα ℓ: Έστω $P \in \ell = B \vee C$. Τότε:

$$\begin{aligned} P \in B \vee C \Rightarrow\ & \sigma^{-1}(P) \in \tau^{-1}(B \vee C) = \sigma^{-1}(B) \vee \sigma^{-1}(C) \\ \Rightarrow\ & \sigma^{-1}(P) \in [0,1,0] \vee [0,0,1] = <1,0,0> \\ \Rightarrow\ & \phi(\sigma^{-1}(P)) = \sigma^{-1}(P) \qquad (\text{αφού } <1,0,0> \text{ άξονας της} (\phi,\psi)) \\ \Rightarrow\ & \sigma(\phi(\sigma^{-1}(P))) = \sigma(\sigma^{-1}(P)) = P \end{aligned}$$

(2) *Η h είναι 1-1 και επί*: Όπως στο αντίστοιχο Υεώρημα για ομολογίες.

(3) *Η h είναι μορφισμός ομάδων*: Ομοίως. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Στο $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, για κάθε $A \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$ με $A \in \ell$, ισχύει*

$$(\mathbb{E}(A,\ell),\circ) \cong (\mathbb{E}([0,0,1], <1,0,0>),\circ) \cong (\widetilde{\mathcal{M}}_E,\cdot) \cong (\mathbb{R},+).$$