ΜΑΘΗΜΑ 10

Υπενθυμίζουμε μερικά στοιχειώδη πράγματα από την Γραμμική Άλγεβρα, καταγράφοντας συγχρώνως τους συμβολισμούς που θα χρησιμοποιούμε.

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένας γραμμικός ισομορφισμός και $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Έστω

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \\ f(e_2) &= (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \\ f(e_3) &= (a_{31}, a_{32}, a_{33}) \end{aligned}$$

Ονομάζουμε ***πίνακα της*** f και συμβολίζουμε με M_f τον πίνακα

$$M_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Τότε για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \cdot M_f.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. *Κάθε γραμμικός ισομορφισμός $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ορίζει μια συγγραμμικότητα*

$$(\phi, \psi) : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}).$$

Απόδειξη. Έστω $U \in \mathcal{P}$. Τότε, το U είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, με $\dim U = 1$. Επειδή ο f είναι ισομορφισμός, η εικόνα $f(U)$ είναι γραμμικός υπόχωρος ίδιας διάστασης, άρα $f(U) \in \mathcal{P}$. Θέτουμε

$$\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} : U \longmapsto \phi(U) := f(U)$$

Παρόμοια, αν $V \in \mathcal{L}$, τότε $V \leq \mathbb{R}^3$ με $\dim V = 2$, και $f(V) \leq \mathbb{R}^3$, με $\dim f(V) = 2$, άρα $f(V) \in \mathcal{L}$. Θέτουμε

$$\psi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} : V \longmapsto \psi(V) := f(V).$$

Το ζεύγος (ϕ, ψ) είναι συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$: Κάθε μια από τις ϕ, ψ είναι 1-1 και επί. Το ζεύγος είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων, διότι

$$U \leq V \;\Rightarrow\; \phi(U) = f(U) \leq \psi(V) = f(V). \qquad \square$$

Περιγράφουμε τώρα το προηγούμενο αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας τους (αλγεβρικούς) συμβολισμούς του προηγούμενου μαθήματος.

Έστω $0 \neq (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Το (x, y, z) ορίζει τον μονοδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο $U = [x, y, z]$ που περιέχει το διάνυσμα (x, y, z) και όλα τα αριθμητικά πολλαπλάσια του. Η εικόνα $\phi([x, y, z]) = f(U)$ είναι ο μονοδιάστος υπόχωρος που περιέχει την εικόνα $f(x, y, z) \neq 0$, δηλ. είναι ο χώρος που συμβολίσαμε σαν $[f(x, y, z)]$. Άρα

$$\phi([x, y, z]) = [f(x, y, z)] = [(x, y, z) \cdot M_f].$$

Έστω τώρα ένα διάνυσμα $0 \neq (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ και V ο αντίστοιχος διδιάστατος υπόχωρος $V =< a, b, c >\in \mathbb{R}^3$ (δηλ. $V \perp (a, b, c)$). Ο υπόχωρος $\psi(V) = f(V)$ **δεν** είναι ο χώρος $< f(a, b, c) >$, γιατί η εικόνα $f(V)$ δεν είναι απαραίτητα κάθετη στο διάνυσμα $f(a, b, c)$. Αυτό εξασφαλίζεται μόνον αν ο f διατηρεί την καθετότητα, αν δηλ. είναι *ορθογώνιος μετασχηματισμός*. Δεν είναι όμως όλοι οι γραμμικοί ισομορφισμοί ορθογώνιοι. Για να βρούμε την εικόνα $\psi(< a, b, c >)$, έχουμε δύο τρόπους:

(1) Βρίσκουμε δύο διαφορετικά σημεία $U_i = [x_i, y_i, z_i] \in< a, b, c >$, $i = 1, 2$, και υπολογίζουμε τις εικόνες τους $\phi(U_i)$. Τότε

$$\psi(< a, b, c >) = \phi(U_1) \vee \phi(U_2).$$

(2) Ακολουθούμε την επόμενη (έμμεση) διαδικασία: η ευθεία $< a, b, c >$ έχει (τουλάχιστον) τρία διαφορετικά σημεία, έστω τα $P_i = [x_i, y_i, z_i]$, $i = 1, 2, 3$. Από τις σχέσεις $P_i \in< a, b, c >$ παίρνουμε

$$ax_i + by_i + cz_i = 0, \qquad \forall\ i = 1, 2, 3,$$

ή, ισοδύναμα,

$$(x_i, y_i, z_i) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \qquad \forall\ i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Θέτουμε

$$f(x_i, y_i, z_i) = (x_i, y_i, z_i) \cdot M_f = (x_i', y_i', z_i'), \qquad i = 1, 2, 3$$
$$\psi(< a, b, c >) =< a', b', c' >,$$

και ζητάμε τα a', b', c'. Επειδή

$$P_i \in< a, b, c > \Rightarrow\ \phi(P_i) \in \psi(< a, b, c >), \qquad \forall\ i = 1, 2, 3,$$

ανάλογα με την (1), τα ζητούμενα a', b', c' πρέπει να ικανοποιούν τις ισότητες

$$(x_i', y_i', z_i') \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = (x_i, y_i, z_i) \cdot M_f \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Παρατηρούμε ότι θέτοντας

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = M_f^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

παίρνουμε

$$(x_i', y_i', z_i') \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = (x_i, y_i, z_i) \cdot M_f \cdot M_f^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (x_i, y_i, z_i) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \qquad \forall\ i = 1, 2, 3.$$

Άρα

$$\phi(P_i) \in < M_f^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} > = < (a, b, c) \cdot (M_f^t)^{-1} >, \qquad \forall\ i = 1, 2, 3.$$

όπου M_f^t ο ανάστροφος του M_f. Επομένως,

$$\psi(< a, b, c >) = < (a, b, c) \cdot (M_f^t)^{-1} > .$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο επόμενο

ΠΟΡΙΣΜΑ. Κάθε γραμμικός ισομορφισμός $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ορίζει μια συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ μέσω των σχέσεων

$$\phi([x, y, z]) = [f(x, y, z)] = [(x, y, z) \cdot M_f], \qquad \forall\ [x, y, z] \in \mathcal{P},$$
$$\psi(< a, b, c >) = <(a, b, c) \cdot (M_f^t)^{-1}>, \qquad \forall <a, b, c> \in \mathcal{L}.$$

Εξετάζουμε τώρα πότε μια συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ είναι κεντρική/αξονική. Έστω λοιπόν ότι ο γραμμικός ισομορφισμός $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ εισάγει την συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, η οποία έχει κέντρο $A = [x_o, y_o, z_o]$ και άξονα $\ell =< a_o, b_o, c_o >$. Γνωρίζουμε ότι το κέντρο και όλα τα σημεία του άξονα μένουν αναλλοίωτα από την ϕ, δηλ.

$$\phi([x, y, z]) = [f(x, y, z)] = [x, y, z], \quad \forall\ [x, y, z] = A \quad \text{ή} \quad [x, y, z] \in \ell.$$

Η ισότητα $[f(x, y, z)] = [x, y, z]$ σημαίναι ότι τα διανύσματα $f(x, y, z)$ και (x, y, z) είναι μη-μηδενικά στοιχεία του ίδιου μονοδιάστατου υπόχωρου $U \leq \mathbb{R}^3$, άρα υπάρχει $\lambda \neq 0$, με

$$f(x, y, z) = \lambda(x, y, z).$$

Η ανωτέρω ισότητα σημαίνει ότι ***το λ είναι ιδιοτιμή και το*** $[x, y, z]$ ***ιδιοδιάνυσμα του*** M_f.

Όποιος ενδιαφέρεται μπορεί να δει την ακριβή σχέση κέντρου/άξονα με ιδιοτιμές/ιδιοδιανύσματα στο κείμενο που βρίσκεται στα έγγραφα/χαρακτηρισμός ομολογιών και επάρσεων μέσω ιδιοτιμών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ με $\phi([x, y, z]) = [z, y, x]$ είναι καλά ορισμένη και μπορεί να συμπληρωθεί με μια μοναδική $\psi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, έτσι ώστε το ζεύγος (ϕ, ψ) να είναι συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

(β) Νδο η ανωτέρω (ϕ, ψ) είναι κεντρική/αξονική και να βρεθούν το κέντρο και ο άξονας.

Απάντηση. (α) Η ϕ είναι καλά ορισμένη, αν για $[x, y, z] = [x', y', z']$, ισχύει $\phi([x, y, z]) = \phi([x', y', z'])$. Πράγματι, έστω $[x, y, z] = [x', y', z']$. Τότε υπάρχει $\lambda \neq 0$ με $(x, y, z) = \lambda(x', y', z')$, από το οποίο παίρνουμε

$$\phi([x, y, z]) = [z, y, x] = [\lambda(z', y', x')] = [z', y', x'] = \phi([x', y', z'])$$

που είναι το ζητούμενο.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $[x, y, z] \in \mathcal{P}$ ισχύει $\phi([x, y, z]) = [f(x, y, z)]$, όπου η

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (z, y, x)$$

είναι γραμμικός ισομορφισμός. Άρα υπάρχει η αντίστοιχη

$$\psi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} :< a, b, c >\longmapsto \psi(< a, b, c >) =< (a, b, c) \cdot (M_f^t)^{-1} >$$

ώστε (ϕ, ψ) να είναι συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

(β) Αναζητούμε το κέντρο και τα σημεία του άξονα στα σημεία του $\mathcal{P}$ που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα της f. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας της f είναι ο

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για τον οποίο ισχύει
$$M_f = M_f^t = M_f^{-1} = (M_f^t)^{-1},$$
άρα
$$\begin{aligned}\psi(< a, b, c >) &=< (a, b, c) \cdot (M_f^t)^{-1} >=< (a, b, c) \cdot M_f > \\ &=< f(a, b, c) >=< c, b, a > .\end{aligned}$$
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του M_f είναι το
$$p(\lambda) = \det(M_f - \lambda I_3) = (\lambda^2 - 1)(\lambda + 1)$$
και οι ιδιοτιμές του οι $\lambda = 1$ (διπλή) και $\lambda = -1$.

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην τιμή $\lambda = 1$ ικανοποιούν τις σχέσεις
$$\begin{gathered}f(x, y, z) = (z, y, x) = 1 \cdot (x, y, z) \;\Leftrightarrow\; x = z \;\Leftrightarrow \\ (x, y, z) = (x, y, x) \neq (0, 0, 0).\end{gathered}$$
Για $x \neq 0$ παίρνουμε τα φ-σταθερά σημεία
$$[x, y, x] = [1, y/x, 1] = [1, r, 1], \qquad r \in \mathbb{R}$$
ενώ για $y \neq 0$ παίρνουμε τα
$$[x, y, x] = [x/y, 1, x/y] = [r, 1, r], \qquad r \in \mathbb{R}.$$
Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην τιμή $\lambda = -1$ ικανοποιούν τις σχέσεις
$$\begin{aligned}&f(x, y, z) = (z, y, x) = -1 \cdot (x, y, z) \;\Leftrightarrow \\ &x = -z \text{ και } y = -y = 0 \;\Leftrightarrow \\ &(x, y, z) = (x, 0, -x) \neq (0, 0, 0),\end{aligned}$$
οπότε $x \neq 0$ και προκύπτει το φ-σταθερό σημείο
$$[x, 0, -x] = [1, 0, -1].$$

Ισχυριζόμαστε ότι το σημείο $A = [1, 0, -1]$ είναι κέντρο: έστω $k =< p, q, r >\in J(A)$, δηλ. $A \in k$. Πρέπει νδο $\psi(k) = k$. Η υπόθεση $A \in k$ ισοδυναμεί με
$$1 \cdot p + 0 \cdot q + (-1) \cdot r = 0,$$
άρα $p = r$ και $k =< p, q, p >$ (με $(p, q) \neq (0, 0)$). Τότε
$$\psi(k) =< f(p, q, p) >=< p, q, p >= k,$$

που αποδεικνύει ότι το $A = [1, 0, -1]$ είναι κέντρο.

Αφού υπάρχει κέντρο, υπάρχει και άξονας ℓ. Θεωρούμε τα ιδιοδιανύσματα $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 0)$ που αντιστοιχούν στην (διπλή) ιδιοτιμή $\mathcal{A} = 1$ και ορίζουν τα σημεία $B_1 = [1, 0, 1]$ και $B_2 = [0, 1, 0]$ στο $\mathcal{P}$. Προφανώς τα A, B_1 και B_2 δεν είναι ίσα ανά δύο, και $\phi(B_1) = B_1$, $\phi(B_2) = B_2$. Συμπεραίνουμε ότι ο άξονας είναι η ευθεία

$$\ell = B_1 \vee B_2.$$

Πράγματι, αφού $B_1 \neq B_2$, η ευθεία $B_1 \vee B_2$ υπάρχει. Αν $B_1 \notin \ell$, τότε η τετράδα $(A, \ell, B_1, \phi(B_1) = B_1)$ προσδιορίζει την (ϕ, ψ), άρα $(\phi, \psi) = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$, άτοπο. Άρα $B_1 \in \ell$, παρόμοια $B_2 \in \ell$ και $\ell = B_1 \vee B_2$.

Για την πληρότητα, υπενθυμίζουμε ότι

$$B_1 \vee B_2 =< (1, 0, 1) \times (0, 1, 0) >=< -1, 0, 1 > .$$

2. Να εξετάσετε αν το σημείο $[0, 0, 1]$ είναι κέντρο της συγγραμμικότητας του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, που ορίζεται από την $f(x, y, z) = (x, y, 2x + z)$.

3. Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (y, z, x)$ ορίζει συγγραμμικότητα πού έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο. Ποιό είναι αυτό; Είναι κέντρο;

4. Δίνεται η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (x + az, y, z)$ όπου $a \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f ορίζει μια συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Να προσδιορίσετε την μορφή των ϕ, ψ και να αποδείξετε ότι η (ϕ, ψ) έχει κέντρο το σημείο $[1, 0, 0]$ και άξονα την ευθεία $< 0, 0, 1 >$. Τι είδους συγγραμμικότητα είναι η (ϕ, ψ);

5. Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$f(x, y, z) = (x + y, x - y, 2z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ορίζει συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Να βρείτε τα σταθερά σημεία της ϕ. Είναι η (ϕ, ψ) κεντρική/αξονική;

6. Να βρεθούν τα σταθερά σημεία των συγγραμμικοτήτων που ορίζονται από τους γραμμικούς ισομορφισμούς $f_i \in \mathcal{A}ut(\mathbb{R}^3)$, $i = 1, 2, 3, 4$, όπου

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= (x - y - z,\ x + 3y + 2z,\ -x - y)\\
f_2(x, y, z) &= (x + y,\ x + z,\ 2z)\\
f_3(x, y, z) &= (x,\ x + y,\ 2x - y + 3z)\\
f_4(x, y, z) &= (4x,\ x + 3y - z,\ 4z)
\end{aligned}$$

Ποιές από αυτές τις συγγραμμικότητες είναι κεντρικές; Να βρεθούν κέντρο και άξονας.