ΜΑΘΗΜΑ 9

Παρακάτω θα μελετήσουμε με αλγεβρικές μεθόδους το ***πραγματικό προβολικό επίπεδο*** $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Η μελέτη του προβολικού επιπέδου με αλγεβρικές μεθόδους συνιστά την λεγόμενη "αναλυτική" Προβολική Γεωμετρία, σε αντίθεση με την "συνθετική" προσέγγιση που ακολουθήσαμε μέχρι τώρα.

Στα παραδείγματα προβολικών επιπέδων είδαμε το επίπεδο $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, όπου

$$\mathcal{P} = \{U \leq \mathbb{R}^3 \mid \dim U = 1\},$$
$$\mathcal{L} = \{V \leq \mathbb{R}^3 \mid \dim V = 2\},$$
$$U \mathcal{I} V \;\Leftrightarrow\; U \leq V.$$

Θα δώσουμε παρακάτω μια ισοδύμαμη μορφή του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, που καθιστά εύκολη την αναλυτική προσέγγιση.

Έστω $0 \neq u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Το u ορίζει δύο υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$:

(1) Τον μονοδιάστατο υπόχωρο U (: ευθεία που περνά από το 0) του οποίου το u είναι βάση:

$$U := \{\lambda(a, b, c) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Γράφουμε συμβολικά

$$U = [a, b, c].$$

Τον ίδιο υπόχωρο U ορίζει κάθε αριθμητικό πολλαπλάσιο λu, με $\lambda \neq 0$,άρα

$$[a, b, c] = [\lambda a, \lambda b, \lambda c], \qquad \forall \lambda \neq 0.$$

(2) Τον διδιάστατο υπόχωρο V (: επίπεδο που περνά από το 0) που είναι *κάθετος* στο $u = (a, b, c)$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}.$$

Γράφουμε

$$V =< a, b, c > .$$

Παρατηρούμε ότι ο V είναι επίσης κάθετος σε όλα τα λu, με $\lambda \neq 0$, άρα

$$< a, b, c >=< \lambda a, \lambda b, \lambda c >, \qquad \forall \lambda \neq 0.$$

Ας πούμε τώρα ότι έχουμε ένα $U = [x, y, z] \in \mathcal{P}$ και ένα $V =< a, b, c >\in \mathcal{L}$. Η σχέση της σύμπτωσης $U \mathcal{I} V \;\Leftrightarrow\; U \leq V$ ισοδυναμεί με το ότι το διάνυσμα

$u = (x, y, z) \in U$ (και κάθε $\lambda(x, y, z) \in U$) ανήκει στον $V =< a, b, c >$, δηλ. είναι κάθετο στο διάνυσμα (a, b, c). Επομένως,

$$[x, y, z] \; \mathcal{I} < a, b, c > \Leftrightarrow \; ax + by + cz = 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε

$$[x, y, z] \; \in < a, b, c > .$$

Έτσι, έχουμε καταλήξει στην ισοδύναμη περιγραφή του πραγματικού προβολικού επιπέδου :

$$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}) = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in),$$

όπου

$$\mathcal{P} = \{ [x, y, z] \mid 0 \neq (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$\mathcal{L} = \{< a, b, c > \mid 0 \neq (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$[x, y, z] \; \in < a, b, c > \Leftrightarrow \; ax + by + cz = 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Υπενθυμίζουμε ότι οι μονοδιάστατοι υπόχωροι $[x, y, z]$ είναι *σημεία* και οι διδιάστατοι υπόχωροι $< a, b, c >$ είναι *ευθείες* του προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

1. Να βρεθεί η ευθεία που ορίζουν τα σημεία
(α) [1,0,-2] και [-2,0,4].
(β) [2,1,3] και [1,0,-1].

Απάντηση. (α) Επειδή -2(1,0,-2) = (-2,0,4), παίρνουμε ότι [1,0,-2] = [-2,0,4], άρα δεν ορίζεται ευθεία.

(β) Τα διανύσματα (2,1,3) και (1,0,-1) δεν είναι συγγραμμικά, άρα ορίζουν διαφορετικά σημεία $[2, 1, 3] \neq [1, 0, -1] \in \mathcal{P}$. Επομένως, ορίζεται μια μοναδική ευθεία

$$< a, b, c >= [2, 1, 3] \vee [1, 0, -1].$$

Για την Αναλυτική Γεωμετρία, τα παραπάνω σημαίνουν ότι οι μονοδιάστατοι διανυσματικοί χώροι $U_1 = [2, 1, 3]$ και $U_2 = [1, 0, -1]$ είναι υπόχωροι του διδιάστατου χώρου $V =< a, b, c >$. Από την άλλη μεριά, το διάνυσμα (a, b, c) είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο στον V, άρα κάθετο στα (2,1,3) και (1,0,-1). Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το *εξωτερικό γινόμενο* των (2,1,3) και (1,0,-1). Άρα

$$< a, b, c >=< [2, 1, 3] \times [1, 0, -1] >=< -1, 5, -1 >=< 1, -5, 1 > .$$

2. Να βρεθεί η ευθεία που ορίζουν τα σημεία [0,0,1] και [1,1,1].

3. Να βρεθεί η τομή των ευθειών
(α) $< 2, -1, 0 >$ και $< -1, \frac{1}{2}, 0 >$.
(β) $< 1, 0, 0 >$ και $< 1, -2, 1 >$.

Απάντηση. (α) Παρατηρούμε ότι $(2, -1, 0) = 2(1, -\frac{1}{2}, 0)$, άρα

$$< 2, -1, 0 > = < -1, \frac{1}{2}, 0 >,$$

και δεν ορίζεται σημείο τομής.
(β) Τα διανύσματα (1,0,0) και (1,-2,1) δεν είναι συγγραμμικά, άρα

$$< 1, 0, 0 > \neq < 1, -2, 1 >$$

και ορίζεται μονοσήμαντα η τομή

$$[x, y, z] = < 1, 0, 0 > \wedge < 1, -2, 1 > .$$

Επειδή

$$[x, y, z] \in < 1, 0, 0 > \quad \text{και} \quad [x, y, z] \in < 1, -2, 1 >$$

παίρνουμε

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ z & = & 2y \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y, z) = (0, y, 2y)$$

με $y \neq 0$, δηλ.

$$[x, y, z] = [0, 1, 2].$$

4. Να βρεθεί η τομή των ευθειών
(α) $< 1, 1, -2 >$ και $< 3, 3, -6 >$.
(β) $< 1, 0, 1 >$ και $< 0, 1, 0 >$.

5. Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας $< 0, 0, 1 >$.

Απάντηση. Επειδή

$$[x, y, z] \in < 0, 0, 1 > \Leftrightarrow 0x + 0y + 1z = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$

έχουμε

$$[x, y, z] = [x, y, 0], \quad \text{με} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Οπότε: για $x \neq 0$

$$[x, y, z] = [1, y/x, o] = [1, a, 0], \qquad a \in \mathbb{R}$$

ενώ για $y \neq 0$,

$$[x, y, z] = [x/y, 1, 0] = [a, 1, 0], \qquad a \in \mathbb{R}.$$

6. Να βρεθούν τα σημεία της ευθείας $< 1, 0, 1 >$.

7. Να βρεθούν οι ευθείες που ανήκουν στην δέσμη $J([1, 0, 2])$.

Απάντηση. Έστω $< a, b, c >\in J([1, 0, 2])$. Τότε

$$[1, 0, 2] \in< a, b, c >\Leftrightarrow 1a + 0b + 2c = 0 \Leftrightarrow a = -2c,$$

επομένως,

$$< a, b, c >=< -2c, b, c >, \quad \text{με} \quad (b, c) \neq (0, 0).$$

Οπότε, για $b \neq 0$,

$$< a, b, c >=< -2c/b, 1, c/b >=< -2\hbar, 1, \hbar >, \qquad \hbar \in \mathbb{R},$$

και για $c \neq 0$,

$$< a, b, c >=< -2, b/c, 1 >=< -2, \hbar, 1 >, \qquad \hbar \in \mathbb{R}.$$

8. Να βρεθούν οι ευθείες που ανήκουν στην δέσμη $J([1, -1, 0])$.

9. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την συγγραμμικότητα τριών σημείων.

Απάντηση. Έστω $[a_i, b_i, c_i] \in \mathcal{P}$, $i = 1, 2, 3$. Τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια ευθεία $< x, y, z >$ αν και μόνον αν

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

Το ανωτέρω σύστημα έχει λύση $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ (άρα είναι αόριστο), αν και μόνον αν

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$