## Χρονικά ανεξάρτητα συστήματα - συναρτήσεις μεταφοράς.

Τό σύστημα είναι της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ y &= C\underline{x} + D\underline{u} \end{aligned}\right\} \quad \Sigma(A,B,C,D)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ καί $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Έστω ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι $\underline{x}(0) = \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace:

$$\left.\begin{aligned} s\,\underline{\hat{X}}(s) - \underline{x_0} &= A\,\underline{\hat{X}}(s) + B\,\underline{\hat{u}}(s) \\ \underline{\hat{Y}}(s) &= C\,\underline{\hat{X}}(s) + D\,\underline{\hat{u}}(s) \end{aligned}\right\}$$

Επομένως:

$$(sI_n - A)\,\underline{\hat{X}}(s) = \underline{x_0} + B\,\underline{\hat{u}}(s)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\hat{X}}(s) = (sI_n - A)^{-1}\,\underline{x_0} + (sI_n - A)^{-1} B\,\underline{\hat{u}}(s)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\hat{Y}}(s) = C(sI_n - A)^{-1}\underline{x_0} + \left(C(sI_n - A)^{-1}B + D\right)\underline{\hat{u}}(s)$$

Θέτοντας $\underline{x_0} = \underline{0}$ έχουμε $\underline{\hat{Y}}(s) = \hat{G}(s)\,\underline{\hat{u}}(s)$, όπου $\hat{G}(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$. είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Θέτοντας $\det(sI_n - A) = \chi_A(s) \in \mathbb{R}[s]$, $\partial\chi_A(s) = n$:

$$\hat{G}(s) = C\,\frac{\operatorname{adj}[sI_n - A]}{\chi_A(s)}\,B + D$$

$$= \frac{C\operatorname{adj}[sI - A]B + D\chi_A(s)}{\chi_A(s)}$$

$$:= \frac{N(s)}{\chi_A(s)}$$

$$\hat{G}(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}(s) \quad \text{καί} \quad [\hat{G}(s)]_{ij} := \frac{N_{ij}(s)}{\chi_A(s)}$$

όπου: $D_{ij} \neq 0 \Rightarrow \partial N_{ij}(s) = n = \partial \chi_A(s)$

$$D_{ij} = 0 \Rightarrow \partial N_{ij}(s) \leq n-1 < n = \partial \chi_A(s)$$

Αν $D=0$ τότε $\partial N_{ij}(s) < n = \partial \chi_A(s)$ γιά κάθε $i=1,2,\ldots p$ καί $j=1,2,\ldots,m$ καί τό σύστημα λέγεται "αυστηρά κανονικό" (strictly proper). Στην αντίθετη περίπτωση είναι απλά "κανονικό" (proper).

Παράδειγμα: Δίνεται τό σύστημα (μιας εισόδου καί εξόδου) χώρου κατάστασης:

$$\Sigma(A,\underline{b},\underline{c}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}}^{B} u \\ y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{0}_{D} u \end{cases}$$

Τότε:

$$\det[sI_2 - A] = \det\begin{pmatrix} s & -1 \\ 1/2 & s+3/2 \end{pmatrix} = s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}$$

$$= \left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)$$

καί

$$\operatorname{adj}[sI_2 - A] = \operatorname{adj}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1/2 & s+3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & s \end{bmatrix}^T$$

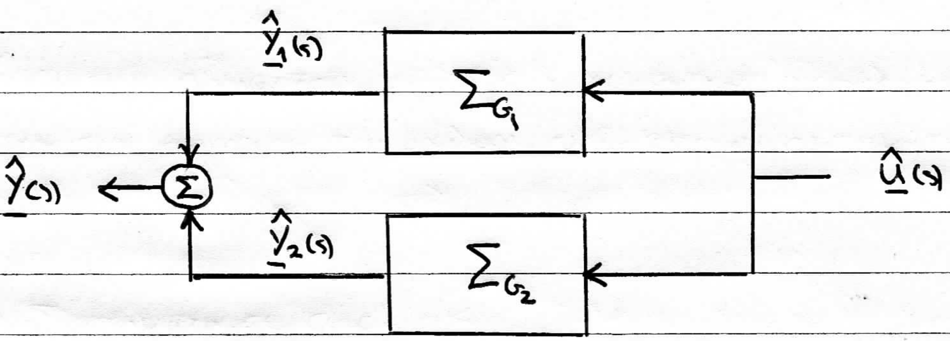
$$= \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$[sI-A]^{-1} = \frac{\operatorname{adj}[sI-A]}{\chi_A(s)} = \frac{\begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)}$$

$$\Rightarrow G(s) = [1 \;\; 0] \frac{\begin{bmatrix} s+\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & s \end{bmatrix}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1/2}{(s+1/2)(s+1)}$$

(β) Παράλληλη σύνδεση




$$\hat{\underline{y}}(s) = \hat{\underline{y}}_1(s) + \hat{\underline{y}}_2(s) = \hat{G}_1(s)\,\hat{\underline{u}}(s) + \hat{G}_2(s)\,\hat{\underline{u}}(s) = (\hat{G}_1(s) + \hat{G}_2(s))\,\hat{\underline{u}}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{G}(s) = \hat{G}_1(s) + \hat{G}_2(s), \quad \text{όπου} \quad \hat{\underline{y}}(s) = \hat{G}(s)\,\hat{\underline{u}}(s)$$

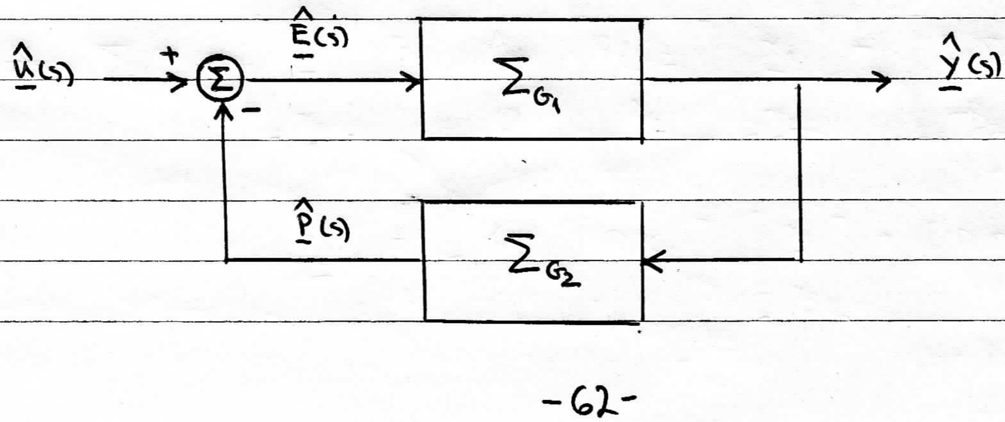
Αν $\Sigma_{\hat{G}_i}(A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i = 1,2$, τότε:

$$\Sigma_{\hat{G}_1}: \left.\begin{aligned} \underline{x}_1' &= A_1 \underline{x}_1 + B_1 \underline{u} \\ \underline{y}_1 &= C_1 \underline{x}_1 + D_1 \underline{u} \end{aligned}\right\} \qquad \Sigma_{G_2}: \left.\begin{aligned} \underline{x}_2' &= A_2 \underline{x}_2 + B_2 \underline{u} \\ \underline{y}_2 &= C_2 \underline{x}_2 + D_2 \underline{u} \end{aligned}\right\}$$

καί

$$\Sigma_{\hat{G}}: \left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x}_1' \\ \underline{x}_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{y} &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2]\,\underline{u} \end{aligned}\right\}$$

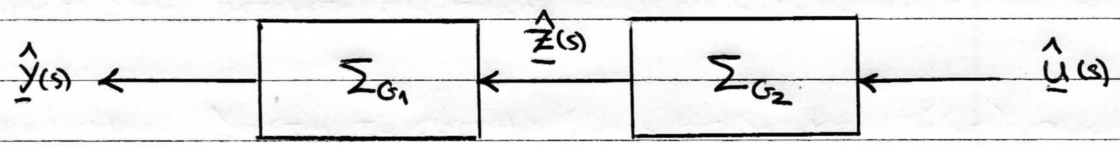
(γ) Σύνδεση (αρνητικής) ανάδρασης



## Συνδεσμολογία συστημάτων

Ο ορισμός συνάρτησης μεταφοράς γραμμικών χρονικά-ανεξάρτητων συστημάτων επιτρέπει την ανάλυση συνδεδεμένων συστημάτων με χρήση άλγεβρας.

### (α) Συστήματα σε σειρά




Έστω $\hat{G}_1(s)$ και $\hat{G}_2(s)$ οι συναρτήσεις μεταφοράς των $\Sigma_{G_1}$ και $\Sigma_{G_2}$ αντίστοιχα. Τότε

$$\underline{\hat{y}}(s) = \hat{G}_1(s)\,\underline{\hat{z}}(s) = \hat{G}_1(s)\left(\hat{G}_2(s)\,\underline{\hat{u}}(s)\right) = \left(\hat{G}_1(s)\,\hat{G}_2(s)\right)\underline{\hat{u}}(s)$$

και επομένως η ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς είναι $\hat{G}(s) = \hat{G}_1(s)\,\hat{G}_2(s)$.
Αν $\Sigma_{G_i}(A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i=1,2$, τότε:

$$\Sigma_{G_1}: \left.\begin{aligned} \underline{x}_1' &= A_1\underline{x}_1 + B_1\underline{z} \\ \underline{y} &= C_1\underline{x}_1 + D_1\underline{z} \end{aligned}\right\} \qquad \Sigma_{G_2}: \left.\begin{aligned} \underline{x}_2' &= A_2\underline{x}_2 + B_2\underline{u} \\ \underline{z} &= C_2\underline{x}_2 + D_2\underline{u} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \underline{x}_1' &= A_1\underline{x}_1 + B_1(C_2\underline{x}_2 + D_2\underline{u}) \\ \underline{y} &= C_1\underline{x}_1 + D_1(C_2\underline{x}_2 + D_2\underline{u}) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \Sigma_{G_1G_2}: \left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x}_1' \\ \underline{x}_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1D_2 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ \underline{y} &= \left[\, C_1 \;\vdots\; D_1C_2 \,\right] \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + [D_1D_2]\, u \end{aligned}\right\}$$

$$\hat{\underline{y}}(s) = \hat{G}_1(s)\,\hat{\underline{E}}(s) = \hat{G}_1(s)\left[\hat{\underline{u}}(s) - \hat{G}_2(s)\,\hat{\underline{y}}(s)\right]$$

$$\Rightarrow \left(I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s)\right)\hat{\underline{y}}(s) = \hat{G}_1(s)\,\hat{\underline{u}}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{y}}(s) = \left(I + \hat{G}_1(s)\hat{G}_2(s)\right)^{-1}\hat{G}_1(s)\,\hat{\underline{u}}(s)$$

δηλ η ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς: $\hat{G}(s) = \hat{G}_1(I + \hat{G}_2\hat{G}_1)^{-1}(s)$

Αν $\Sigma_{\hat{G}_i}(A_i, B_i, C_i, D_i)$, $i=1,2$, και:

$$\Sigma_{G_1}: \left.\begin{aligned} \underline{x}_1' &= A_1\underline{x}_1 + B_1\underline{e} \\ \underline{y} &= C_1\underline{x}_1 + D_1\underline{e} \end{aligned}\right\} \qquad \Sigma_{G_2}: \left.\begin{aligned} \underline{x}_2' &= A_2\underline{x}_2 + B_2\underline{y} \\ \underline{p} &= C_2\underline{x}_2 + D_2\underline{y} \end{aligned}\right\}$$

και $e = u - p$, τότε:

$$\underline{y} = C_1\underline{x}_1 + D_1\underline{u} - D_1\underline{p} = C_1\underline{x}_1 + D_1\underline{u} - D_1(C_2\underline{x}_2 + D_2\underline{y})$$

$$\Rightarrow (I + D_1D_2)\underline{y} = C_1\underline{x}_1 - D_1C_2\underline{x}_2 + D_1\underline{u}$$

$$\Rightarrow \underline{y} = (I + D_1D_2)^{-1}C_1\underline{x}_1 - (I + D_1D_2)^{-1}D_1C_2\underline{x}_2 + (I + D_1D_2)^{-1}D_1\underline{u}$$

$$\Rightarrow \underline{y} = L_1C_1\underline{x}_1 - L_1D_1C_2\underline{x}_2 + L_1D_1\underline{u}, \quad L_1 := (I + D_1D_2)^{-1}$$

$$\underline{p} = C_2\underline{x}_2 + D_2\underline{y} = C_2\underline{x}_2 + D_2\left[L_1C_1\underline{x}_1 - L_1D_1C_2\underline{x}_2 + L_1D_1\underline{u}\right]$$

$$\Rightarrow \underline{p} = D_2L_1C_1\underline{x}_1 + (C_2 - D_2L_1D_1C_2)\underline{x}_2 + D_2L_1D_1\underline{u}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \underline{x}_1' = A_1\underline{x}_1 + B_1(\underline{u} - \underline{p}) = A_1\underline{x}_1 + B_1\underline{u} - B_1\big[&D_2L_1C_1\underline{x}_1 \\ &+ (C_2 - D_2L_1D_1C_2)\underline{x}_2 + D_2L_1D_1\underline{u}\big] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_1' = (A_1 - B_1 D_2 L_1 C_1)\underline{x}_1 - B_1(I - D_2 L_1 D_1) C_2 \underline{x}_2 + B_1 (I - D_2 L_1 D_1)\underline{u}$$

καί

$$\underline{x}_2' = A_2 \underline{x}_2 + B_2 \underline{y} = A_2 \underline{x}_2 + B_2 (L_1 C_1 \underline{x}_1 - L_1 D_1 C_2 \underline{x}_2 + L_1 D_1 \underline{u})$$

$$= B_2 L_1 C_1 \underline{x}_1 + (A_2 - B_2 L_1 D_1 C_2)\underline{x}_2 + B_2 L_1 D_1 \underline{u}$$

καί επομένως:

$$\Sigma_G: \left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x}_1' \\ \underline{x}_2' \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_2 L_1 C_1 & -B_1 (I - D_2 L_1 D_1) C_2 \\ \hline B_2 L_1 C_1 & A_2 - B_2 L_1 D_1 C_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_1 (I - D_2 L_1 D_1) \\ \hline B_2 L_1 D_1 \end{array}\right] \underline{u} \\ y &= \left[\begin{array}{c|c} L_1 C_1 & -L_1 D_1 C_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \left[ L_1 D_1 \right] \underline{u} \end{aligned}\right\}$$

όπου $L_1 := (I + D_1 D_2)^{-1}$. (υποθέσαμε ότι $\det(I + D_1 D_2) \neq 0$, δηλ. σύστημα "καλώς τοποθετημένο" - well posed}. Ικανή συνθήκη είναι $D_1 = 0$ ή $D_2 = 0$). Στην περίπτωση που $D_1 = 0$ καί $D_2 = 0$ ($\Sigma_{G_1}$ καί $\Sigma_{G_2}$ αυστηρά κανονικά) έχουμε $L_1 = I$ καί

$$\Sigma_G: \left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x}_1' \\ \underline{x}_2' \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{c|c} A_1 & -B_1 C_2 \\ \hline B_2 C_1 & A_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \underline{u} \\ y &= \left[\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \left[ 0 \right] \underline{u} \end{aligned}\right\}$$

πού είναι σημαντικά ~~[illegible]~~ πιό απλό:

## Συνάρτηση συχνοτήτων

Έστω γραμμικό, χρονικά ανεξάρτητο σύστημα $\Sigma(A,B,C,D)$. Επιλέγουμε είσοδο $\underline{u}(t) = e^{\lambda t}\underline{u}_0 \quad (t \geq 0)$ όπου $\lambda = i\omega$. Τότε

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau \quad ; \quad \underline{u}(\tau) = e^{\lambda\tau}\underline{u}_0$$

Έστω $\varrho = t-\tau \Rightarrow d\varrho = -d\tau$, $\tau = 0 \Rightarrow \varrho = t$, $\tau = t \Rightarrow \varrho = 0$, δηλ.

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A\varrho} B\, e^{\lambda(t-\varrho)}\underline{u}_0\, d\varrho$$

$$= e^{At}\underline{x}_0 + e^{\lambda t}\int_0^t e^{A\varrho - \lambda\varrho}\, d\varrho \cdot B\underline{u}_0$$

$$= e^{At}\underline{x}_0 + e^{\lambda t}\int_0^t e^{(A-\lambda I)\varrho}\, d\varrho \cdot B\underline{u}_0$$

Είναι: $$\int_0^t e^{(A-\lambda I)\varrho}\, d\varrho = \left[(A-\lambda I)^{-1} e^{(A-\lambda I)\varrho}\right]_0^t$$

$$= (A-\lambda I)^{-1}\left[e^{(A-\lambda I)t} - I_n\right], \quad \lambda \notin \sigma(A)$$

Επομένως:
$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \left(e^{(A-\lambda I)t} - I_n\right)(A-\lambda I)^{-1} B e^{\lambda t}\underline{u}_0$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + e^{At}\cdot \cancel{e^{-\lambda t}}(A-\lambda I)^{-1} B \cancel{e^{\lambda t}}\underline{u}_0 - (A-\lambda I)^{-1} B e^{\lambda t}\underline{u}_0$$

$$= e^{At}\underbrace{\left[\underline{x}_0 + (A-\lambda I)^{-1} B\underline{u}_0\right]}_{\underline{\xi}_0} + (\lambda I - A)^{-1} B\, \underline{u}(t).$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = e^{At}\underline{\xi}_0 + (i\omega I_n - A)^{-1} B e^{i\omega t}\underline{u}_0$$

όπου $\underline{\xi}_0 = \underline{x}_0 + (A-i\omega I)^{-1} B\underline{u}_0$, $i\omega \notin \sigma(A)$. Έστω ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ δηλ $Re[\lambda_k(A)] < 0 \quad \forall k = 1,2,\ldots,n$. Τότε η συνθήκη $i\omega \notin \sigma(A)$ ικανοποιείται. Επίσης, από προηγούμενο Θεώρημα, τα στοιχεία τού πίνακα $e^{At}$ είναι συναρτήσεις Bohl και οι χαρακτηριστικοί τους εκθέτες είναι οι ιδιοτιμές του $A$, δηλ.

$$\left(e^{At}\right)_{ij} = f_{ij}(t) = \sum_i \alpha_i t^{k_i} e^{\lambda_i t}, \quad \lambda_i \in \sigma(A), \; k_i \geq 0$$

Επομένως: $|f_{ij}(t)| \leq \sum_j |\alpha_j t^{k_j} e^{\lambda_j t}| = \sum_j |\alpha_j| t^{k_j} e^{Re(\lambda_j)t}$, $t \geq 0$
και επομένως: $|f_{ij}| \to 0$ καθώς $t \to \infty$, δηλ $\|e^{At}\| \to 0$ καθώς $t \to \infty$. Η έξοδος του συστήματος:

$$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) = Ce^{At}\underline{\xi_0} + \left[C(i\omega I - A)^{-1}B + D\right]e^{i\omega t}\underline{u_0}$$

$$= \underbrace{Ce^{At}\underline{\xi_0}}_{y_{tr}(t)} + \underbrace{G(i\omega)e^{i\omega t}\underline{u_0}}_{y_{ss}(t)}$$

Εφόσον $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ και $\underline{\xi_0} \in \mathbb{C}^n$, τα στοιχεία της $\underline{y_{tr}}(t)$ είναι συναρτήσεις Bohl και

$$\|y_{tr}(t)\| \leq \|C\| \cdot \|e^{At}\| \, \|\underline{\xi_0}\| \to 0 \quad \text{καθώς } t \to \infty$$

Ο δεύτερος όρος $y_{ss}(t)$ αντιστοιχεί σε ημιτονοειδή ταλάντωση σε συχνότητα $\omega$. Αν $\underline{u_0} = \underline{e_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, (όπου $\underline{e_k}$ η $k$ στήλη του πίνακα $I_n$), τότε

$$\underline{y}(t) - y_{tr}(t) = \begin{bmatrix} G_{1k}(i\omega)e^{i\omega t} \\ G_{2k}(i\omega)e^{i\omega t} \\ \vdots \\ G_{pk}(i\omega)e^{i\omega t} \end{bmatrix}$$

Αν $G_{\ell k}(i\omega) = \rho_{\ell k} e^{i\varphi_{\ell k}(\omega)}$, τότε

$$\underline{y_\ell}(t) = \rho_{\ell k}(\omega) e^{i(\omega t + \varphi_{\ell k}(\omega))} + (y_{tr})_\ell(t)$$

όπου $\rho_{\ell k}(\omega) = |G_{\ell k}(i\omega)|$ καί $\varphi_{\ell k}(\omega) = \arg[G_{\ell k}(i\omega)]$.
καί $(y_{tr})_\ell(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$.

Η συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{p\times m} : \omega \to G(i\omega)$ είναι η συνάρτηση συχνοτήτων του συστήματος. Γιά συστήματα μέ πραγματικές παραμέτρους (δηλ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$) ισχύει ότι $G_{\ell k}(i\omega) = \bar{G}_{\ell k}(-i\omega) \Rightarrow |G_{\ell k}(i\omega)| = |G_{\ell k}(-i\omega)|$ καί $\arg(G_{\ell k}(i\omega)) = -\arg(G_{\ell k}(-i\omega))$. Καί συνήθως ορίζουμε $pm$ συναρτήσεις-συχνοτήτων ~~μεγέθους (μέτρου)~~ μέτρου:

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : \omega \to |G_{\ell k}(i\omega)| \quad , \ell = 1,2,\dots p \quad k = 1,2,\dots m$$

καί $pm$ συναρτήσεις συχνοτήτων φάσης:

$$\mathbb{R}_+ \to [-\pi, \pi) : \omega \to \arg[G_{\ell k}(i\omega)] \quad , \ell = 1,2,\dots,p \quad k = 1,2,\dots m.$$

Τά γραφήματα των συναρτήσεων συνήθως παριστώνται σέ λογαριθμική κλίμακα (διαγράμματα Bode).

<u>Παράδειγμα</u>: Εστω σύστημα μέ συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = 1/(s+1)$, δηλ. $x' = -x + u$, $y = x$. Τότε:

$$G(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega} = |G(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)}$$

όπου $|G(i\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ καί $\varphi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega)$

Αν $u(t) = \cos\omega t$, $t \geq 0$, τότε

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \cos(\omega t - \tan^{-1}(\omega)) + \xi(t)$$

όπου $\xi(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$.

## Ισοδύναμα συστήματα

Έστω μετασχηματισμός του διανύσματος κατάστασης ενός γραμμικού, χρονικά ανεξάρτητου συστήματος $\underline{x}(t) = P\,\underline{\tilde{x}}(t)$ όπου $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(P) \neq 0$. Συγκεκριμένα, αν

$$\Sigma(A,B,C,D) \; : \quad \begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u} \end{aligned}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$, τότε:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\tilde{x}}' &= P^{-1}\underline{x}' = P^{-1}(A\underline{x} + B\underline{u}) = P^{-1}AP\,\underline{\tilde{x}} + P^{-1}B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u} = CP\,\underline{\tilde{x}} + D\underline{u} \end{aligned}\right\}$$

δηλ. στις νέες "συντεταγμένες" το σύστημα γράφεται ως:

$$\Sigma(\underbrace{P^{-1}AP}_{\hat{A}}, \underbrace{P^{-1}B}_{\hat{B}}, \underbrace{CP^{-1}}_{\hat{C}}, D) \; : \quad \left.\begin{aligned} \underline{\tilde{x}}' &= P^{-1}AP\,\underline{\tilde{x}} + P^{-1}B\underline{u} \\ \underline{y} &= CP\,\underline{\tilde{x}} + D\underline{u} \end{aligned}\right\}$$

Τα συστήματα $\Sigma(A,B,C,D)$ και $\Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$ λέγονται ισοδύναμα και ο μετασχηματισμός "μετασχηματισμός ισοδυναμίας". Ο μετασχηματισμός $A \rightarrow \hat{A} = P^{-1}AP$ είναι μετασχηματισμός ομοιότητας. - ως γνωστόν $\sigma(A) = \sigma(P^{-1}AP)$ και $\chi_A(s) = \chi_{P^{-1}AP}(s)$. Η συνάρτηση μεταφοράς (πού περιγράφει τις σχέσεις εισόδου - εξόδου) είναι επίσης αναλλοίωτη:

$$\begin{aligned} \hat{\tilde{G}}(s) &= CP\,(sI_n - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D = CP\left[P^{-1}(sI-A)^{-1}P\right]P^{-1}B + D \\ &= C(sI-A)^{-1}B + D = \hat{G}(s) \end{aligned}$$

Εφόσον ο P μπορεί νά επιλεχθεί αυθαίρετα ο αριθμός ισοδύναμων συστημάτων είναι άπειρος.

δηλ. στίς νέες "συντεταγμένες" τό σύστημα γράφεται ως:

$$\Sigma(P^{-1}AP, P^{-1}B, CP, D) : \left.\begin{array}{l} \dot{\tilde{x}} = P^{-1}AP\,\tilde{x} + P^{-1}B\,u(t) \\ y = CP\,\tilde{x} + D\,u(t) \end{array}\right\}$$

Τά συστήματα λέγονται ισοδύναμα καί ο μετασχηματισμός λέγεται "μετασχηματισμός ισοδυναμίας". Ο μετασχηματισμός του πίνακα $A$ : $A \to \tilde{A} = P^{-1}AP$ είναι μετασχηματισμός ομοιότητας - ως γνωστόν $\chi_A(s) = \chi_{\tilde{A}}(s)$ καί $\sigma(A) = \sigma(\tilde{A})$. Η συνάρτηση μεταφοράς (πού περιγράφει τίς σχέσεις εισόδου-εξόδου) είναι επίσης αναλλοίωτη:

$$\hat{\tilde{G}}(s) = CP(sI_n - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D =$$

$$= CP\left[P^{-1}(sI-A)P\right]^{-1}P^{-1}B + D = CPP^{-1}(sI-A)^{-1}PP^{-1}B + D$$

$$= C(sI-A)^{-1}B + D = \hat{G}(s)$$

Εφόσον ο πίνακας μετασχηματισμού $P$ μπορεί νά επιλεγεί αυθαίρετα υπάρχουν άπειρος αριθμός ισοδύναμων συστημάτων μέ τό $\Sigma(A,B,C,D)$.

## Καθορισμός πραγματοποιήσεων από τήν συνάρτηση μεταφοράς

Τό πρόβλημα καθορισμού μίας τετράδας $\{A,B,C,D\}$ πού αντιστοιχεί σέ γραμμικό χρονικά ανεξάρτητο σύστημα από τήν συνάρτηση μεταφοράς λέγεται "πρόβλημα πραγματοποίησης".

### (A) Συστήματα μίας εισόδου-εξόδου

1. Εστω $\hat{g}(s)$ μία proper ρητή συνάρτηση του "s", δηλ

$$\hat{g}(s) = \frac{\tilde{\beta}(s)}{\alpha(s)}, \qquad \partial\tilde{\beta}(s) \leq \partial\alpha(s) = n$$

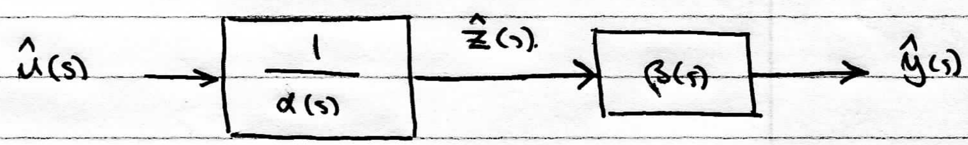
Αν $\partial\tilde{\beta}(s) = \partial\alpha(s)$ γράφουμε:

$$\hat{g}(s) = d + \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \qquad \partial\beta(s) < \partial\alpha(s) = n$$

ώστε η συνάρτηση $\beta(s)/\alpha(s)$ νά είναι "strictly proper". Έστω ότι $\alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$ καί $\beta(s) = $ $= \beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_1 s + \beta_0$. Η πραγματοποίηση της $\beta(s)/\alpha(s)$ θά είναι της μορφής $(A, \underline{b}, \underline{c}^T, 0)$ καί επομένως η πραγματοποίηση της $\hat{g}(s) \sim (A, \underline{b}, \underline{c}^T, d)$. Έστω

$$\frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0} = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} \quad \text{καί}$$

$$\frac{1}{\alpha(s)} = \frac{1}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0} = \frac{\hat{z}(s)}{\hat{u}(s)}.$$




Τότε $\hat{z}(s) = \frac{1}{\alpha(s)}\hat{u}(s) \Rightarrow \hat{y}(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\hat{u}(s) = \beta(s)\hat{z}(s).$

$$\Rightarrow (s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0)\hat{z}(s) = \hat{u}(s).$$

Έστω $x_1 = z(t)$, $x_2 = z'(t)$, … $x_n = z^{(n-1)}(t)$. Τότε:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ -\alpha_0 x_1 - \alpha_1 x_2 \cdots - \alpha_{n-1}x_{n-1} + u(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} u$$

$$z(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{c}^T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [0]u$$

Επίσης: $\hat{y}(s) = (\beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0)\,\hat{z}(s)$

$$\Rightarrow y(t) = \beta_0 z(t) + \beta_1 z'(t) + \cdots + \beta_{n-1} z^{(n-1)}(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \beta_0 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \beta_{n-1} x_n(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Συνεπώς μία πραγματοποίηση της $\hat{g}(s)$ είναι

$\hat{g}(s) \sim (A, \underline{b}, \underline{c}^T, d)$, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \checkmark \quad d$$

(A, b) σε "Controller_canonical" form. A σε "companion" form.

Εφόσον $\hat{g}(s) \in \mathbb{R}^{1\times 1}(s)$, τότε $\hat{g}(s) = \hat{g}^T(s)$ και

$$g(s) \sim (A^T, \underline{c}^T, \underline{b}^T, d)$$

είναι επίσης πραγματοποίηση του συστήματος.

2. Έστω ότι $\hat{g}(s)$ έχει $n$ διακεκριμένους πόλους, δηλ. είναι της μορφής:

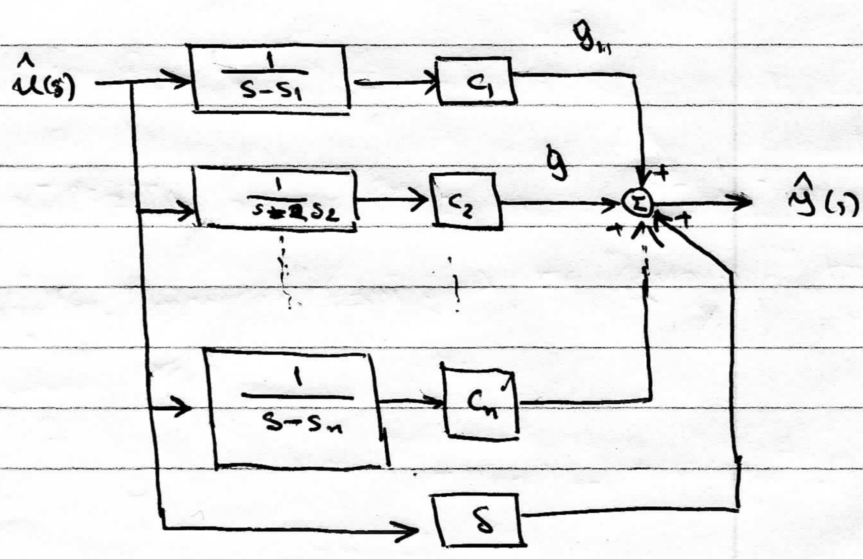
$$\hat{g}(s) = \frac{K}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} + \delta$$

όπου $s_i \in \mathbb{R}$, $s_i \neq s_j$ $\forall i,j = 1,2,\dots,n$. Η $\hat{g}(s)$ αναλύεται ως:

$$\hat{g}(s) = \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \dots + \frac{c_n}{s-s_n} + \delta$$

όπου $c_i = \dfrac{K}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} (s_i - s_k)}$. Αν $\hat{y}_i(s) = \dfrac{c_i}{s-s_i}\hat{u}(s)$

τότε ~~y~~ $\hat{Y}(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{c_i}{s-s_i}\hat{u}(s) + \delta\,\hat{u}(s)$



Σηλ. $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c}^T, d)$ με

$$A = diag(s_1, s_2, \ldots, s_n), \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad c^T = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$$

Επίσης: $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c}^T, d) = \Sigma(A, \underline{c}, \underline{b}^T, d)$.