Υπολογισμός εκθετικού πίνακα e^{At}

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (η $\mathbb{C}^{n\times n}$). Το πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Το σύνολο ιδιοτιμών $\sigma(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda_i) = 0\}$ είναι τό φάσμα του A.

<u>Ορισμός</u>: Αν $\lambda_i \in \sigma(A)$ τότε ο διανυσματικός χώρος

$$\mathcal{N}_{\lambda_i} = \{ \underline{u} \in \mathbb{C}^n : (\lambda_i I - A)\underline{u} = \underline{0} \}$$

είναι ο ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

<u>Ορισμός</u>: $\dim \mathcal{N}_{\lambda_i} =: d_i$ είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα τής ιδιοτιμής λ_i, δηλ. ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Από τό θεώρημα Rank-nullity:

$$\underbrace{\mathrm{Rank}(\lambda_i I - A)}_{r_i} + \underbrace{\dim(\mathcal{N}_{\lambda_i})}_{d_i} = n$$

$$\Rightarrow \quad d_i = n - r_i$$

<u>Ορισμός</u>: Αν $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\cdots(\lambda-\lambda_\rho)^{\tau_\rho}$ όπου $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\rho}$ οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα του λ_i.

Γιά κάθε ιδιοτιμή λ_i, $i = 1, 2, \ldots, \rho$, ισχύει ότι $1 \leq d_i \leq \tau_i$

<u>Ορισμός</u>: Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι <u>απλής δομής</u> αν $d_i = \tau_i$ γιά κάθε $i = 1, 2, \ldots, \rho$. Αν υπάρχει $\lambda_i \in \sigma(A)$ μέ $d_i < \tau_i$, τότε ο A λέγεται <u>μή απλής δομής</u>

Λήμμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καί $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m\}$ m διακεκριμμένες ιδιοτιμές καί $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots \underline{u}_m\}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε τά $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots \underline{u}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη: Έστω ότι $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, u_m\}$ γραμμικά εξαρτημένα καί k ο ελάχιστος δείκτης γιά τόν οποίο $\underline{u}_k \in \text{lin-span}\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{k-1}\}$ $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Επομένως $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{C}$:

$$\underline{u}_k = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \underline{u}_{k-1} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad A\underline{u}_k = \alpha_1 A\underline{u}_1 + \alpha_2 A\underline{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1} A\underline{u}_{k-1}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \underline{u}_k = \alpha_1 \lambda_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \underline{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \underline{u}_{k-1} \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) μέ λ_k καί αφαιρόντας από τήν (2):

$$0 = \alpha_1 (\lambda_k - \lambda_1) \underline{u}_1 + \alpha_2 (\lambda_k - \lambda_2) \underline{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \underline{u}_{k-1}$$

Εφόσον $\lambda_i \neq \lambda_k$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ καί $\{\underline{u}_1, \dots \underline{u}_{k-1}\}$ γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0 \Rightarrow \underline{u}_k = 0$, άτοπο καθώς $\underline{u}_k$ είναι ιδιοδιάνυσμα. □

Λήμμα: Πίνακες απλής δομής, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, έχουν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Απόδειξη: Έστω $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\rho\}$ οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του A καί $\{r_1, r_2, \dots r_\rho\}$ οι αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες, ώστε $\sum_{i=1}^{\rho} r_i = n$. Έστω ότι στην ιδιοτιμή λ_i $(i = 1, 2, \dots, \rho)$ αντιστοιχούν τά r_i γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\{u_{i1}, u_{i2}, \dots u_{ir_i}\}$ $i \in \{1, 2, \dots, \rho\}$. Θά δείξουμε ότι τά n ιδιοδιανύσματα:

$$\{\underline{u}_{11}, \dots \underline{u}_{1\tau_1}, \underline{u}_{21}, \dots \underline{u}_{2\tau_2}, \dots \underline{u}_{\rho 1}, \dots \underline{u}_{\rho\tau_\rho}\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Σχηματίζουμε τον γραμμικό συνδυασμό

$$\sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\tau_i} \alpha_{ij} \underline{u}_{ij} = 0 \qquad (*)$$

και θέτουμε $\underline{w}_i = \sum_{j=1}^{\tau_i} \alpha_{ij} \underline{u}_{ij}$, $i=1,2,\dots,\rho$.

Αν $\underline{w}_i \neq \underline{0}$, τότε $\underline{w}_i$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Έστω $S = \{ i : \underline{w}_i \neq \underline{0}\}$. Τότε η $(*)$ γράφεται

$$\sum_{i \in S} \underline{w}_i = \underline{0} \qquad (**)$$

Αν $S \neq \emptyset$, τότε η $(**)$ θα ήταν αδύνατη, αφού τα $\{\underline{w}_i : i \in S\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (προηγούμενο Λήμμα). Άρα $S = \emptyset$, δηλ. $\underline{w}_i = \underline{0}$ για κάθε $i \in \{1,2,\dots,\rho\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\tau_i} \alpha_{ij} \underline{u}_{ij} = \underline{0}$ για κάθε $i \in \{1,2,\dots,\rho\} \Rightarrow \alpha_{ij} = 0 \quad \forall j \in \{1,2,\dots,\tau_i\}$ $\forall i \in \{1,2,\dots,\rho\}$ αφού τα $\{\underline{u}_{ij}\}_{j=1}^{\tau_i}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\forall i \in \{1,2,\dots,\rho\}$. □

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με n διακεκριμένες ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$. Τότε ο A είναι απλής δομής.

<u>Απόδειξη</u>: Η απόδειξη είναι προφανής από την ανισότητα $1 \leq d_i \leq \tau_i$, $\tau_i = 1$ για $i=1,2,\dots,n$. Δίνουμε ανεξάρτητη απόδειξη: Έστω $(\lambda_i, \underline{u}_i)$ τα ζεύγη ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Υποθέτουμε ότι $\lambda_i \neq \lambda_j$ για κάθε ζεύγος $i \neq j$. Έστω ότι τα $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{n}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τότε $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{C}$, όχι όλα μηδέν, ώστε:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{u}_i = \underline{0} \qquad (*)$$

Έστω ότι $\alpha_1 \neq 0$ (χωρίς βλάβη γενικότητας). Πολλαπλασιάζοντας την (*) με τον πίνακα $(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_n I)$ έχουμε:

$$\alpha_1 (A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)\cdots(A-\lambda_n I)\,\underline{u}_1 \; +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underbrace{(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_n I)\,\underline{u}_i}_{\to 0} = \underline{0}$$

εφόσον $(A-\lambda_i I)(A-\lambda_j I) = (A-\lambda_j I)(A-\lambda_i I)$. Επομένως:

$$\alpha_1 (A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_{n-1} I)(\underbrace{A\underline{u}_1}_{\lambda_1 \underline{u}_1} - \lambda_n \underline{u}_1) = 0$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_1 (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_n)\,\underline{u}_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

αφού $\lambda_i \neq \lambda_j$ γιά $i \neq j$. και $\underline{u}_1$ ιδιοδιάνυσμα. Παρομοίως έχουμε $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$ πού είναι άτοπο. □

<u>Θεώρημα:</u> $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι απλής δομής αν καί μόνο αν υπάρχει $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det(U) \neq 0$: $A = U \Lambda U^{-1}$ όπου $\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda)$.

<u>Απόδειξη:</u> $(\Rightarrow)$: Έστω ότι ο A είναι είναι απλής δομής καί έστω ότι

$$\{\underline{u}_{11}, \ldots, \underline{u}_{1\tau_1}, \underline{u}_{21}, \ldots, \underline{u}_{2\tau_2}, \underline{u}_{\rho 1}, \ldots \underline{u}_{\rho\tau_\rho}\}$$

c

είναι n-γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A. Έχουμε:

$$A \underbrace{[\underline{u}_{11} \cdots \underline{u}_{1\tau_1} \,\vdots\, \underline{u}_{21} \cdots \underline{u}_{2\tau_2} \,\vdots\, \underline{u}_{\rho 1} \cdots \underline{u}_{\rho\tau_\rho}]}_{U} =$$

$$= \underbrace{[\underline{u}_{11} \cdots \underline{u}_{1\tau_1} \,\vdots\, \underline{u}_{21} \cdots \underline{u}_{2\tau_2} \,\vdots\, \underline{u}_{\rho 1} \cdots \underline{u}_{\rho\tau_\rho}]}_{U} \cdot \Lambda$$

όπου

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1 I_{\tau_1}, \lambda_2 I_{\tau_2}, \dots \lambda_e I_{\tau_e}\}$$

ή $AU = U\Lambda$, $\det(U) \neq 0$ λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας.
$\Rightarrow A = U\Lambda U^{-1}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda)$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\det(U) \neq 0$, και $\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda)$ έτσι ώστε $A = U\Lambda U^{-1} \Rightarrow AU = U\Lambda$. Χωρίς βλάβη γενικότητας έχουμε $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1 I_{\tau_1}, \dots, \lambda_e I_{\tau_e}\}$ γιά διακεκριμμένες τιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e\}$ καί πολλαπλότητες διαγωνίων στοιχείων $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_e$. Οι πρώτες τ_1 στήλες του U είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στήν ιδιοτιμή λ_1, οί επόμενες τ_2 στήλες είναι ιδιοδιανύσματα πού αντιστοιχούν στήν ιδιοτιμή λ_2, κλπ.
Επίσης: $\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I - U\Lambda U^{-1}) = \det(\lambda I - \Lambda) =$
$= (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1} \cdots (\lambda - \lambda_e)^{\tau_e}$ καί τά $\{\lambda_i\}$ είναι ιδιοτιμές του A με αλγεβρικές πολλαπλότητες $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_e$. Επομένως $\tau_i = d_i$ γιά κάθε $i = 1, 2, \dots, e$ καί ο A είναι απλής δομής. $\square$

<u>Θεώρημα</u>: Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι απλής δομής, τότε

$$e^{At} = U e^{\Lambda t} U^{-1} = U\,\mathrm{diag}\{e^{\lambda_1 t} I_{\tau_1}, \dots, e^{\lambda_e t} I_{\tau_e}\} U^{-1}$$

<u>Απόδειξη</u>: Αν $A = U\Lambda U^{-1}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda)$, τότε:

$$A^2 = U\Lambda U^{-1} \cdot U\Lambda U^{-1} = U\Lambda^2 U^{-1}$$

καί επαγωγικά $A^k = U\Lambda^k U^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Επομένως:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \Rightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U\Lambda^k U^{-1} t^k}{k!} =$$

$$= U\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!}\right) U^{-1}, \quad \text{όπου } A^0 := I_n$$

καί : $\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!}\right)_{ii} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = e^{\lambda t}$

όπου $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e\}$ καί

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!}\right)_{ij} = 0 \quad \text{όταν} \quad i \neq j.$$

Επομένως:

$$e^{At} = U \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t} I_{\tau_1}, \dots e^{\lambda_e t} I_{\tau_e}\} U^{-1}$$

□

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A) = \{-1, 1\}$$

Και επομένως ο A είναι απλής δομής. Ιδιοδιανύσματα:

$$(A - \underbrace{\lambda_1}_{-1} I)\, \underline{u_1} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \underline{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - \underbrace{\lambda_2}_{1} I)\, \underline{u_2} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow \underline{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως: $AU = U\Lambda$, όπου $\Lambda = \operatorname{diag}\{-1, 1\}$

$$U = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow U^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{καί}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{t} - e^{-t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

Πίνακες μή-απλής δομής

Αν $\lambda \in \sigma(A)$ καί $d<\tau$, τότε ορίζουμε $\tau - d$ "γενικευμένα ιδιοδιανύσματα" πού συμπληρώνουν τήν βάση του ιδιόχωρου W_λ

Ορισμός: Τό διάνυσμα $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$ ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης ρ $(\rho \geq 1)$ πού αντιστοιχεί στήν ιδιοτιμή λ του πίνακα A αν καί μόνο αν

$$(A-\lambda I)^{\rho} \underline{v} = 0 \qquad \text{καί} \qquad (A-\lambda I)^{\rho-1} \underline{v} \neq 0$$

Αν $\rho=1$, το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα ταυτίζεται μέ απλό ιδιοδιάνυσμα.

Ορισμός: Μία αλυσσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους k πού παράγεται από απλό ιδιοδιάνυσμα $\underline{v}_1$ είναι ένα σύνολο $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_k\}$ από k γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ώστε:

(i)
$$\left.\begin{aligned} (A-\lambda I_n)\underline{v}_k &= \underline{v}_{k-1} \\ (A-\lambda I_n)\underline{v}_{k-1} &= \underline{v}_{k-2} \\ &\vdots \\ (A-\lambda I_n)\underline{v}_2 &= \underline{v}_1 \\ (A-\lambda I_n)\underline{v}_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\underline{v}_1 \text{ απλό ιδιοδιάνυσμα})$$

καί

(ii) Τά διανύσματα $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Η αλυσσίδα λέγεται "μέγιστης τάξης" αν δέν μπορεί νά επεκταθεί, δηλ αν $\nexists$ $\underline{v}_{k+1}$ γραμμικά ανεξάρτητο από τά $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_k\}$ τέτοιο ώστε $(A-\lambda I_n)\underline{v}_{k+1} = \underline{v}_k$.

__Θεώρημα:__ Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

(i) $\underline{v}_j \in \mathcal{N}_r\left[(A-\lambda I)^j\right] \qquad j=1,2,\dots,k$

(ii) $\mathcal{N}_r\left[(A-\lambda I)^j\right] \subseteq \mathcal{N}_r\left[(A-\lambda I)^{j+1}\right]$

__Απόδειξη:__

(i) $(A-\lambda I)^j \underline{v}_j = (A-\lambda I)^{j-1} \underbrace{(A-\lambda I)\underline{v}_j}_{\underline{v}_{j-1}} = \dots =$

$= (A-\lambda I)\underline{v}_1 = \underline{0} \qquad (j=1,2,\dots k)$

(ii) Έστω $\underline{v} \in \mathcal{N}_r\left[(A-\lambda I)^j\right] \Rightarrow (A-\lambda I)^j \underline{v} = \underline{0}$

$\Rightarrow (A-\lambda I)(A-\lambda I)^j \underline{v} = 0 \Rightarrow (A-\lambda I)^{j+1} \underline{v} = 0$

$\Rightarrow \underline{v} \in \mathcal{N}_r\left[(A-\lambda I)^{j+1}\right]$. $\square$

Γιά νά κατασκευάσουμε τήν κανονική μορφή Jordan πρέπει νά δώσουμε απάντηση στά παρακάτω ερωτήματα:

(i) Πόσες αλυσσίδες δημιουργούνται από τό σύνολο τών γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων πού αντιστοιχούν σέ ιδιοτιμή λ;

__Απάντηση:__ $d = n - \text{Rank}(A-\lambda I) = n - r$ = γεωμετρική πολλαπλότητα του λ.

(ii) Ποιό είναι τό μήκος της μέγιστης αλυσσίδας;

Ορίζουμε: $r_i = \text{Rank}(A-\lambda I)^i \qquad i=1,2,\dots$
$d_i = \text{Null}(A-\lambda I)^i \qquad i=1,2,\dots$

όπου $d_i = n - r_i$ (Θεώρημα Rank-nullity). Από τό προηγούμενο Θεώρημα έχουμε ότι $(d_i)\uparrow$ ακολουθία καί $(r_i)\downarrow$ φθίνουσα ακολουθία ακεραίων.

Τό μήκος ℓ της μέγιστης αλυσσίδας είναι ο ελάχιστος ακέραιος $i=\ell$ γιά τόν οποίον $r_\ell = r_{\ell+1}$, δηλ:

$$r_1 = \mathrm{Rank}(A-\lambda I) > r_2 = \mathrm{Rank}(A-\lambda I)^2 > \cdots$$

$$> r_\ell = \mathrm{Rank}(A-\lambda I)^\ell = r_{\ell+1} = \mathrm{Rank}[A-\lambda I]^{\ell+1}$$

Στήν ιδιοτιμή λ αντιστοιχούν γενικευμένα διανύσματα μέχρι τάξης ℓ (όχι παραπάνω).

(ii) Ποιό είναι τό μήκος κάθε αλυσσίδας;

Ορίζουμε τήν χαρακτηριστική Segré:

$$S = [\, n-r_1,\ r_1-r_2,\ \ldots,\ r_{\ell-1}-r_\ell \,] \quad (r_\ell - r_{\ell+1} = 0)$$

όπου $n-r_1$: # ιδιοδιανυσμάτων (γενικευμένης) τάξης 1
$r-r_1$: # γεν. ιδιοδιανυσμάτων τάξης 2
$\vdots$
$r_{\ell-1}-r_\ell$: # γεν. ιδιοδιανυσμάτων τάξης ℓ

Τα μήκη των αλυσσίδων ορίζονται από τό διάγραμμα Ferrer:

1η τάξη : $(n-r_1)$: * * * * * *
2η " : (r_1-r_2) : * * * *

ℓ τάξη : $(r_{\ell-1}-r_\ell)$: * *

Το άθροισμα κάθε στήλης δίνει τό μήκος της αντίστοιχης αλυσίδας.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω ιδιοτιμή λ πίνακα $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$, μέ

$$r_1 = 5, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 2, \quad \underbrace{r_4 = 1}_{r_\ell}, \quad r_5 = 1, \quad \dots$$

Έχουμε $\ell = 4$. <u>Χαρακτηριστική Segré</u>:

$$S = [\,n - r_1,\ r_1 - r_2,\ r_2 - r_3,\ r_3 - r_4\,] \qquad (r_4 - r_5)$$

$$= [\,5,\ 2,\ 1,\ 1\,] \qquad (0)$$

<u>Διάγραμμα Ferrer</u>:

1^{η} τάξη: $(n - r_1 = 5)$:	*	*	*	*	*
2^{η} τάξη: $(r_1 - r_2 = 2)$:	*	*			
3^{η} τάξη: $(r_2 - r_3 = 1)$:	*				
4^{η} τάξη: $(r_3 - r_4 = 1)$:	*				

<u>Αλυσίδες</u>: $\{\underline{v}_{11}, \underline{v}_{12}, \underline{v}_{13}, \underline{v}_{14}\}$, $\{\underline{v}_{15}, \underline{v}_{16}\}$, $\{\underline{v}_{17}\}$, $\{\underline{v}_{18}\}$, $\{\underline{v}_{19}\}$

<u>Jordan blocks</u>: $J_\lambda = \operatorname{diag}\{J_{\lambda 1}, J_{\lambda 2}, J_{\lambda 3}, J_{\lambda 4}, J_{\lambda 5}\}$

$$J_{\lambda 1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_{\lambda 2} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_{\lambda 3} = J_{\lambda 4} = J_{\lambda 5} = \lambda$$

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μέ ℓ διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell\}$ καί αντίστοιχα Jordan blocks $\{J_1, J_2, \dots, J_\ell\}$ διαστάσεων $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\ell\}$ αντίστοιχα. Έστω U ~~ο~~ πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, έτσι ώστε

$$A = U \operatorname{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_\ell\} U^{-1} := \cancel{\ } U J U^{-1}$$

Τότε έχουμε $e^{At} = U e^{Jt} U^{-1}$, όπου $e^{Jt} = \operatorname{diag}\{e^{J_1 t}, \dots, e^{J_\ell t}\}$.
Αν $J_i = \operatorname{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \dots J_{ik_i}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$, καί

$$J_{ij} = J_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_{ij}\times k_{ij}}$$

τότε:

$$e^{J_{ij}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{k_{ij}-1}/(k_{ij}-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απόδειξη: Βασίζεται στά παρακάτω βήματα:

(i) $$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(UJU^{-1})^k t^k}{k!} = U\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t^k}{k!}\right)U^{-1}$$
$$= U e^{Jt} U^{-1}$$

(ii) $$J^k = [\operatorname{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_\ell\}]^k = \operatorname{diag}\{J_1^k, J_2^k, \dots, J_\ell^k\}$$

(iii) $$e^{Jt} = I + \operatorname{diag}\{J_1, \dots, J_\ell\}t + \frac{1}{2}\operatorname{diag}\{J_1^2, \dots J_\ell^2\}t^2 + \dots +$$

$$+ \frac{1}{k!} \operatorname{diag}\{ J_1^k, \dots J_e^k \} t^k + \cdots = \operatorname{diag}\{ e^{J_1 t}, \dots, e^{J_e t} \}$$

Παρόμοια: $e^{J_{ij} t} = \operatorname{diag}\{ e^{J_{i1} t}, \dots, e^{J_{ik_i} t} \}$

(iv) $$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i I_{m_{ij}} + N_{m_{ij}}$$

όπου $N_{m_{ij}}$ μηδενοδύναμη (nillpotent).

Επειδή $\lambda_i I_{m_{ij}}$ και $N_{m_{ij}}$ αντιμετατίθενται:

$$e^{J_{ij} t} = e^{\lambda_i t I_{m_{ij}} + N_{m_{ij}} t} \overset{(*)}{=} e^{\lambda_i t} e^{N_{m_{ij}} t}$$

Έχουμε: $$e^{N_{m_{ij}} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_{m_{ij}}^k t^k}{k!}, ~~\text{στην}~~$$

$$= \sum_{k=0}^{m_{ij}-1} \frac{N_{m_{ij}}^k t^k}{k!}$$

όπου:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^{m_{ij}-2} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^{m_{ij}-1} = 0$$

και επομένως ο πίνακας $e^{J_{ij} t}$ έχει τη μορφή που δίδεται στο Θεώρημα.

(*) Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα: $AB = BA \Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$ □

Λήμμα: Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $AB = BA$, τότε $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$

Απόδειξη: Θέτουμε $\Phi(t) = e^{(A+B)t} e^{-At} e^{-Bt}$. Τότε:

$$\Phi'(t) = e^{(A+B)t} (A+B) e^{-At} e^{-Bt} + e^{(A+B)t} (-A) e^{-At} e^{-Bt} +$$

$$+ e^{(A+B)t} e^{-At} (-B) e^{-Bt}$$

$$= e^{(A+B)t} \{ (A+B) e^{-At} - A e^{-At} - e^{-At} B \} e^{-Bt}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $AB = BA$, $e^{-At} B = B e^{-At}$ που ισχύει εφόσον:

$$e^{-At} B = \{ I - At + \frac{A^2 t^2}{2!} - \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \} B =$$

$$= B - ABt + \frac{A^2 B t^2}{2!} - \frac{A^3 B}{3!} t^3 + \dots$$

$$= B (I - At + \frac{A^2 t^2}{2!} - \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots) = B e^{-At}$$

Επομένως: $\Phi'(t) = e^{(A+B)t} \{ A + B - A - B \} e^{-At} e^{-Bt} = 0$

$\Rightarrow \Phi(t) = \Phi(0) = I_n$. Επομένως

$$e^{(A+B)t} e^{-At} = (e^{-Bt})^{-1} = e^{Bt} \Rightarrow$$

$$e^{(A+B)t} = e^{Bt} e^{At} = e^{At} e^{Bt} \qquad \square$$

Παράδειγμα: $J = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] := \mathrm{diag}(J_1, J_2)$

Έχουμε: $\varphi(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \;,\; \tau_1 = 3 \;,\; d_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \;,\; \tau_2 = d_2 = 1 \end{array}\right\}$$

$$e^{Jt} = e^{\operatorname{diag}\{J_1 t, J_2 t\}} = \operatorname{diag}\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}\}$$

$$e^{J_1 t} = e^{\lambda_1 t I_3 + N_3 t} = e^{\lambda_1 t} e^{N_3 t} = e^{t} e^{N_3 t} \text{ , όπου}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N_3^3 = 0$$

Επομένως: $e^{N_3 t} = I + N_3 t + \frac{1}{2} N_3^2 t^2 = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

και επομένως

$$e^{J_1 t} = e^{t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad e^{J_2 t} = e^{2t}$$

Άρα: $$e^{Jt} = \left[\begin{array}{ccc|c} e^{t} & te^{t} & \frac{1}{2}t^2 e^{t} & 0 \\ 0 & e^{t} & te^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ καί $(\lambda, \underline{u})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος με $\lambda = \sigma + i\omega$, $\omega \neq 0$. Εφόσον τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο $q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$ έχει πραγματικούς συντελεστές ($a_i \in \mathbb{R}$) τότε $\bar{\lambda}$ είναι επίσης ιδιοτιμή. Επίσης:

$$A\underline{u} = \lambda \underline{u} \Leftrightarrow \bar{A}\,\bar{\underline{u}} = \bar{\lambda}\,\bar{\underline{u}} \Rightarrow A\,\bar{\underline{u}} = \bar{\lambda}\,\bar{\underline{u}}$$

καί επομένως $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ είναι επίσης ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος. Έστω $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{y}$, $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε:

$$A(\underline{x}+i\underline{y}) = (\sigma+i\omega)(\underline{x}+i\underline{y})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\underline{x} = \sigma\underline{x} - \omega\underline{y} \\ A\underline{y} = \omega\underline{x} + \sigma\underline{y}\end{cases} \Rightarrow A[\underline{x} \vdots \underline{y}] = [\underline{x} \vdots \underline{y}]\left[\begin{array}{c|c} \sigma & \omega \\ \hline -\omega & \sigma\end{array}\right]$$

πού εκφράζει με πραγματικές μεταβλητές τίς σχέσεις $A\underline{u} = \lambda\underline{u}$ καί $\bar{A}\,\bar{\underline{u}} = \bar{\lambda}\,\bar{\underline{u}}$ (ταυτόχρονα). Παρατηρούμε ότι $\underline{u} \neq \underline{0} \Leftrightarrow (\underline{x}, \underline{y})$ γραμμικά ανεξάρτητα στό $\mathbb{R}$.

Έστω αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους k πού αντιστοιχούν σέ μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda = \sigma + i\omega$ $(\omega, \sigma \in \mathbb{R})$, $\omega \neq 0$, δηλ.

$$\left.\begin{aligned} A\underline{u}_1 &= \lambda \underline{u}_1 \\ A\underline{u}_2 &= \lambda \underline{u}_2 + \underline{u}_1 \\ &\ \vdots \\ A\underline{u}_k &= \lambda \underline{u}_k + \underline{u}_{k-1} \end{aligned}\right\}$$

καί έστω $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k\}$ γραμμικά ανεξάρτητα στό $\mathbb{C}$. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A(\underline{x}_1 + i\underline{y}_1) &= (\sigma + i\omega)(\underline{x}_1 + i\underline{y}_1) \\ A(\underline{x}_2 + i\underline{y}_2) &= (\sigma + i\omega)(\underline{x}_2 + i\underline{y}_2) + (\underline{x}_1 + i\underline{y}_1) \\ &\vdots \\ A(\underline{x}_k + i\underline{y}_k) &= (\sigma + i\omega)(\underline{x}_k + i\underline{y}_k) + (\underline{x}_{k-1} + i\underline{y}_{k-1}) \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} A\underline{x}_1 &= \sigma\underline{x}_1 - \omega\underline{y}_1 & A\underline{y}_1 &= \omega\underline{x}_1 + \sigma\underline{y}_1 \\ A\underline{x}_2 &= \sigma\underline{x}_2 - \omega\underline{y}_2 + \underline{x}_1 & A\underline{y}_2 &= \omega\underline{x}_2 + \sigma\underline{y}_2 + \underline{y}_1 \\ &\vdots \\ A\underline{x}_k &= \sigma\underline{x}_k - \omega\underline{y}_k + \underline{x}_{k-1} & A\underline{y}_k &= \omega\underline{x}_k + \sigma\underline{y}_k + \underline{y}_{k-1} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$A\left[\underline{x}_1\ \underline{y}_1 \,\vdots\, \underline{x}_2\ \underline{y}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{x}_k\ \underline{y}_k\right]$$

$$= \left[\underline{x}_1\ \underline{y}_1 \,\vdots\, \underline{x}_2\ \underline{y}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{x}_k\ \underline{y}_k\right] \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma & 0 & 1 & & \\ \hline \vdots & \vdots & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & \sigma & \omega & 1 & 0 \\ & & & & -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & - & - & 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & - & - & 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right]}_{J_k(\sigma,\omega)}$$

Επίσης $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_k\}$ γραμμικά ανεξάρτητα στό $\mathbb{C}$ αν καί μόνο αν $\{\underline{x}_1, \underline{y}_1, \dots \underline{x}_k, \underline{y}_k\}$ γραμμικά ανεξτητα στό $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα:

$$A\left[u_1\ u_2 \,\vdots\, \bar{u}_1\ \bar{u}_2\right] = \left[u_1\ u_2 \,\vdots\, \bar{u}_1\ \bar{u}_2\right]\left[\begin{array}{cc|cc} \sigma+i\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma+i\omega & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma-i\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma-i\omega \end{array}\right]$$

Έστω: $\left[\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \,\vdots\, \bar{\underline{u}}_1\ \bar{\underline{u}}_2\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \bar{\underline{v}}_1^T \\ \bar{\underline{v}}_2^T \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \end{bmatrix}\left[\underline{u}_1\ \underline{u}_2\right] = I_2$

$$J_1 = \left[\begin{array}{c|c} \sigma+i\omega & 1 \\ \hline 0 & \sigma+i\omega \end{array}\right], \quad \bar{J}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \sigma-i\omega & 1 \\ \hline 0 & \sigma-i\omega \end{array}\right]$$

τότε:

$$e^{J_1 t} = e^{(\sigma+i\omega)t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{\bar{J}_1 t} = e^{(\sigma-i\omega)t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$e^{At} = e^{(\sigma+i\omega)t}\left[\underline{u}_1 \,\vdots\, \underline{u}_2\right]\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \end{bmatrix} +$$

$$e^{(\sigma-i\omega)t}\left[\bar{\underline{u}}_1 \,\vdots\, \bar{\underline{u}}_2\right]\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\underline{v}}_1^T \\ \bar{\underline{v}}_2^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{(\sigma+i\omega)t}\left[\underline{u}_1\ \underline{u}_2\right]\begin{bmatrix} \underline{v}_1^T + t\,\underline{v}_2^T \\ \underline{v}_2^T \end{bmatrix} +$$

$$+ e^{(\sigma-i\omega)t}\left[\bar{\underline{u}}_1 \,\vdots\, \bar{\underline{u}}_2\right]\begin{bmatrix} \bar{\underline{v}}_1^T + t\,\bar{\underline{v}}_2^T \\ \bar{\underline{v}}_2^T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{(\sigma+i\omega)t}\left\{ \underline{u}_1\underline{v}_1^T + t\,\underline{u}_1\underline{v}_2^T + \underline{u}_2\underline{v}_2^T \right\} +$$

$$+\, e^{(\sigma-i\omega)}\left\{ \underline{\bar{u}}_1\underline{\bar{v}}_1^T + t\,\underline{\bar{u}}_1\underline{\bar{v}}_2^T + \underline{\bar{u}}_2\underline{\bar{v}}_2^T \right\}$$

$$= 2e^{\sigma t}\left\{ Re\,(e^{i\omega t}A_1) + t\,Re\,(e^{i\omega t}A_2) \right\}$$

όπου: $A_1 = \underline{u}_1\underline{v}_1^T + \underline{u}_2\underline{v}_2^T$, $A_2 = \underline{u}_1\underline{v}_1^T$

Αν $A_1 = X_1 + iY_1$, $A_2 = X_2 + iY_2$, τότε

$$Re\,(e^{i\omega t}A_1) = Re\left\{(\cos\omega t + i\sin\omega t)(X_1 + iY_1)\right\}$$

$$= X_1\cos\omega t - Y_1\sin\omega t$$

$$Re\,(e^{i\omega t}A_2) = X_2\cos\omega t - Y_2\sin\omega t$$

και επομένως:

$$e^{At} = 2e^{\sigma t}\left\{ X_1\cos\omega t - Y_1\sin\omega t + t\,(X_2\cos\omega t - Y_2\sin\omega t)\right\}$$

$$= 2e^{\sigma t}\left\{(X_1 + tX_2)\cos\omega t - (Y_1 + tY_2)\sin\omega t\right\}.$$