Λύση συστημάτων χώρου καταστάσεων

3.1 Ύπαρξη λύσεων: Εξετάζουμε αρχικά τό σύστημα χωρίς είσοδο που αντιστοιχεί στό πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ)

$$\underline{x}'(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t)), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$$

Υποθέτουμε ότι $f: D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (μή κενό, ανοικτό καί συνεκτικό) καί όπου $(t_0, \underline{x_0}) \in D$. Ισοδύναμα:

$$\underline{x}(t) = \underline{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \underline{x}(\tau))\,d\tau$$

Μια συνάρτηση $\varphi: J \to \mathbb{R}^n$ (όπου $J = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$) είναι λύση του Π.Α.Τ στό διάστημα J αν:

(i) $\underline{\varphi} \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$
(ii) $(t, \underline{\varphi}(t)) \in D \quad \forall t \in J$.
(iii) $\underline{\varphi}'(t) = \underline{f}(t, \underline{\varphi}(t)) \quad \forall t \in J$, καί
(iv) $\underline{\varphi}(t_0) = \underline{x_0}$

Η συνέχεια της $\underline{f}(\cdot)$ είναι ικανή συνθήκη γιά τήν ύπαρξη λύσης:

Θεώρημα: Αν $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ καί $(t_0, \underline{x_0}) \in D$, τότε τό Π.Α.Τ έχει τουλάχιστον μία λύση στό διάστημα $(t_0 - c, t_0 + c)$ γιά κάποιο $c > 0$.

Παράδειγμα: Εξετάζουμε το Π.Α.Τ: $x'(t) = x^{1/3}(t)$, $x(0) = 0$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής καί επομένως από τό προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει λύση σέ κάποιο διάστημα $(-c, c) \subseteq \mathbb{R}$. Μία λύση είναι:

νά επεκταθή αριστερά σέ αυθαίρετο διάστημα, αλλά όχι δεξιά.

Θεώρημα: Αν $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$, όπου $D = \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n$ γιά κάποιο ανοικτό διάστημα $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ καί αν η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, τότε γιά κάθε $(t_0, \underline{x_0}) \in D$ τό Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση σέ όλο τό διάστημα $\mathcal{J}$.

Αν τό Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση, μία μέθοδος κατασκευής προσεγγίσεων της λύσης είναι η μέθοδος Pickard. Αν $f \in C(D, \mathbb{R})$ όπου $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ανοικτό, μή κενό καί συνεκτικό, καί δοσμένων αρχικών συνθηκών $(t_0, \underline{x_0}) \in D$, η μέθοδος ορίζει επαναληπτικά συναρτήσεις φ_m ως εξής:

$$\underline{\varphi_0}(t) = \underline{x_0}$$

$$\underline{\varphi_{m+1}}(t) = \underline{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \underline{\varphi_m}(\tau))\, d\tau \quad , \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

γιά κάθε t σέ διάστημα $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ πού περιέχει τό t_0.

Θεώρημα: Αν $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ καί $(t_0, \underline{x_0}) \in D$, καί αν η $f(\cdot)$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, τότε οι συναρτήσεις $\underline{\varphi_m}$ πού ορίζονται από τήν μέθοδο Picard είναι καλά-ορισμένες σέ διάστημα $(t_0 - c, t_0 + c)$ γιά κάποιο $c > 0$, συνεχείς στό διάστημα $(t_0 - c, t_0 + c)$ καί συγκλίνουν ομοιόμορφα καθώς $m \to \infty$ στήν μοναδική λύση του Π.Α.Τ στό διάστημα $(t_0 - c, t_0 + c)$.

3.2 Λύση γραμμικών συστημάτων χώρου-κατάστασης.

Έστωσαν πίνακες $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $(t \in \mathbb{R})$ καί συνάρτηση $\underline{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ καθώς καί αρχικές συνθήκες $(t_0, \underline{x_0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Εξετάζουμε τό μή-ομογενές σύστημα:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t<0 \\ \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2} & \text{αν } t \geq 0 \end{cases}.$$

Η λύση ορίζεται σέ όλο το $\mathbb{R}$ καί $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Παρατηρούμε ότι $\varphi'(0^+) = \varphi'(0^-) = 0$). Η λύση δέν είναι μοναδική καθώς η (τετριμμένη) λύση $\varphi(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, είναι επίσης λύση. Άρα η συνέχεια της f δεν αρκεί γιά να εξασφαλίσει μοναδικότητα της λύσης.

Μια συνάρτηση $f: D \to \mathbb{R}^k$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (όπως προηγουμένως) είναι συνάρτηση Lipschitz ως προς τήν δεύτερη μεταβλητή αν γιά κάθε συμπαγές $K \subseteq D$ υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ (σταθερά Lipschitz) τέτοια ώστε :

$$\| f(t, \underline{x}) - f(t, \underline{y}) \| \leq L_K \, \|x - y\|$$

$\forall \, (t, x)$ καί $(t, y) \in K$. Η συνθήκη Lipschitz είναι ισχυρότερη συνθήκη από συνέχεια και αρκεί να εξασφαλίσει τήν μοναδικότητα λύσης. Υποθέτουμε πάλι ότι $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό, μή κενό καί συνεκτικό σύνολο.

<u>Θεώρημα:</u> Αν $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ καί $(t_0, \underline{x_0}) \in D$ καί αν η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, τότε τό Π.Α.Τ έχει <u>το πολύ</u> μία λύση στό διάστημα $(t_0 - c, t_0 + c)$ γιά κάθε $c > 0$.

<u>Επέκταση λύσεων</u>: Αν βρεθεί λύση του Π.Α.Τ σε κάποιο (πιθανώς μικρό) διάστημα που περιέχει το t_0, η διαδικασία εύρεσης λύσης σέ μεγαλύτερο διάστημα ονομάζεται διαδικασία "επέκτασης λύσης".

<u>Παράδειγμα:</u> Εξετάζουμε το Π.Α.Τ : $x'(t) = x^2(t)$, $x(0) = 1$, μέ λύση $\varphi(t) = (1-t)^{-1}$ στό διάστημα $J = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$. Η λύση μπορεί

$$\underline{x}'(t) = A(t)\,\underline{x}(t) + B(t)\,\underline{u}(t) \qquad , \underline{x}(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

<u>Θεώρημα:</u>

Έστω ότι $A \in C(\mathcal{J}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $B \in C(\mathcal{J}, \mathbb{R}^{n\times m})$ καί $\underline{u} \in C(\mathcal{J}, \mathbb{R}^m)$ όπου $\mathcal{J}$ ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$. Τότε, γιά κάθε $t_0 \in \mathcal{J}$ καί κάθε $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, τό Π.Α.Τ έχει μοναδική λύση σέ όλο τό διάστημα $\mathcal{J}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Εφόσον $A(t)$, $B(t)\,\underline{u}(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του t, η συνάρτηση $f(t,\underline{x}) = A(t)\underline{x} + B(t)\,\underline{u}(t)$ είναι συνεχής ως πρός $(t,\underline{x})$. Επιπλέον, γιά κάθε κλειστό διάστημα $\mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}$, υπάρχει σταθερά Lipschitz $L_0 \geq 0$ τέτοια ώστε:

$$\|\underline{f}(t,\underline{x}) - f(t,\underline{y})\| = \|A(t)(\underline{x}-\underline{y})\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x-y\| \leq L_0 \|x-y\|$$

γιά κάθε $(t,\underline{x}), (t,\underline{y}) \in \mathcal{J}_0 \times \mathbb{R}^n$. Η σταθερά Lipschitz L_0 μπορεί νά οριστεί ως: $L_0 = \max\{\|A(t)\| : t \in \mathcal{J}_0\}$, πού είναι καλά ορισμένη (Θεώρημα Weierstrass) καθώς $\mathcal{J}_0$ είναι συμπαγές καί $\|A(\cdot)\|$ συνεχής στό $\mathcal{J}_0$ (λόγω συνέχειας της νόρμας καί της $A(\cdot)$). Επομένως, από προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει μοναδική λύση του Π.Α.Τ στό $\mathcal{J}_0$. Εφόσον τό συμπέρασμα ισχύει γιά κάθε κλειστό διάστημα $\mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}$, υπάρχει μοναδική λύση στό $\mathcal{J}$. $\square$

Το Θεώρημα επεκτείνεται στην περίπτωση που $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ καί $\underline{u}(\cdot)$ είναι τμηματικά συνεχείς: Έστω ότι $A(t)$, $B(t)$ καί $\underline{u}(t)$ είναι συνεχείς στό διάστημα $[t_0, t_f)$ μέ πιθανή εξαίρεση τά σημεία: $t_1, t_2, \ldots, t_{N-1} \in \mathbb{R}$, όπου $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_f$. Τότε κατασκευάζουμε λύση σέ όλο τό $[t_0, t_f)$ λύνοντας τά N Π.Α.Τ

ΠΑΤ1 : $\underline{x}' = A(t)\,\underline{x}(t)$, $t\in[t_0,t_1)$; $\underline{x}(t_0)=x_0$, μέ λύση $\underline{\varphi}(t)$, $t\in[t_0,t_1)$.

ΠΑΤ2 : $\underline{x}' = A(t)\,\underline{x}(t)$, $t\in[t_1,t_2)$; $\underline{x}(t_1) = \lim_{\tau\to t_1^-} \underline{\varphi}(t)$, μέ λύση $\underline{\varphi}(t)$, $t\in[t_1,t_2)$.

$\vdots$

ΠΑΤ N : $\underline{x}' = A(t)\,\underline{x}(t)$, $t\in[t_{N-1},t_f)$; $\underline{x}(t_{N-1}) = \lim_{\tau\to t_{N-1}^-} \varphi(t)$, μέ λύση $\underline{\varphi}(t)$, $t\in[t_{N-1},t_f)$.

Λύση γραμμικών, χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων.

Έστω τό σύστημα : $\underline{x}'(t) = A(t)\,\underline{x}(t)$, $A\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n\times n})$.
Εξετάζουμε τό σύνολο τών λύσεων του συστήματος. Τό αντίστοιχο Π.Α.Τ. ορίζεται ως : $\underline{x}'(t) = A(t)\,\underline{x}(t)$, $\underline{x}(t_0)=\underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα: Τό σύνολο τών λύσεων του συστήματος: $\underline{x}' = A(t)\,\underline{x}$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n (όπου $A\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n\times n})$).

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{L}$ τό σύνολο των λύσεων καί $\underline{x}_1(t),\underline{x}_2(t)\in\mathcal{L}$, δηλ $\underline{x}_1' = A(t)\,\underline{x}_1$ καί $\underline{x}_2' = A(t)\,\underline{x}_2$, $t\in\mathbb{R}$. Τότε $\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ έχουμε
$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)' = \alpha_1x_1' + \alpha_2x_2' = \alpha_1A(t)\,\underline{x}_1 + \alpha_2A(t)\,\underline{x}_2 =$
$= A(t)(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2) \Rightarrow \alpha_1x_1+\alpha_2x_2\in\mathcal{L}$. Επομένως ο $\mathcal{L}$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τά n ΠΑΤ :

$$(\text{ΠΑΤ})_i \;:\; \underline{x}'(t) = A(t)\,\underline{x}(t) \;,\; \underline{x}(t_0) = \underline{e}_i\in\mathbb{R}^n \qquad i\in\{1,2,\dots,n\}$$

όπου e_i η i-στήλη του I_n. Θά δείξουμε ότι αν $\underline{x}_i(t)$ είναι η (μοναδική) λύση του $(\text{ΠΑΤ})_i$, τότε $\{\underline{x}_1(t),\underline{x}_2(t),\dots,x_n(t)\}$ είναι βάση του $\mathcal{L}$.
(1) Έστω ότι $\{x_1(t),\dots,x_n(t)\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένες συναρτή-

στό $\mathbb{R}$. Τότε $\exists \underline{\alpha} = [\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n]^T \neq 0 : [\underline{x}_1(t) \cdots \underline{x}_n(t)]\underline{\alpha} = \underline{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow [\underline{x}_1(t_0) \cdots \underline{x}_n(t_0)]\underline{\alpha} = \underline{0} \Rightarrow I_n \underline{\alpha} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{0}$ (άτοπο).
Επομένως $\{\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_n(t)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στό $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $\underline{x}(t)$ η λύση του $\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t)$, καί έστω ότι $\underline{x}(t_0) = \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, δηλ. $\underline{x}(t)$ λύση του Π.Α.Τ.: $\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t), \underline{x}(t_0) = \underline{\alpha}$.
Έστω $\hat{\underline{x}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{x}_i(t)$, όπου $\underline{x}_i(t)$ η λύση του $(\text{ΠΑΤ})_i$ που ορίσαμε προηγουμένως. Τότε $\hat{\underline{x}}(t) \in \mathcal{L}$ (ως γραμμικός συνδυασμός λύσεων), καί $\hat{\underline{x}}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{e}_i = \underline{\alpha}$. Από τήν μοναδικότητα λύσεων του ΠΑΤ έχουμε $\underline{x}(t) = \hat{\underline{x}}(t)$ καί επομένως $\underline{x}(t) \in \text{linspan}\{\underline{x}_1(t), \dots \underline{x}_n(t)\}$.
Άρα $\mathcal{L} = \text{lin-span}\{\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_n(t)\}$.

Από το (i) καί (ii) έχουμε ότι $\{\underline{x}_1(t), \dots, \underline{x}_n(t)\}$ είναι βάση του $\mathcal{L}$ καί επομένως $\dim(\mathcal{L}) = n$. $\square$

<u>Ορισμός:</u> Ένας πίνακας $\Psi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λέγεται Θεμελιώδης πίνακας λύσεων (Θ.π.λ.) του συστήματος $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$, $A(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$, αν οι στήλες του είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος στό $\mathbb{R}$. Αν

$$\Psi(t) = [\, \underline{\psi}_1(t) \ \ \underline{\psi}_2(t) \ \cdots \ \underline{\psi}_n(t) \,]$$ είναι Θ.π.λ., τότε

$\underline{\psi}_i'(t) = A(t)\underline{\psi}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\Leftrightarrow \Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$ καί οι στήλες του $\Psi(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα:</u> Ο πίνακας $\Psi(t)$ είναι Θ.π.λ. αν καί μόνο αν $\det[\Psi(t)] \neq 0$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω ότι $\Psi(t) = [\underline{\psi}_1(t) \cdots \underline{\psi}_n(t)]$ Θ.π.λ. καί ότι $\det[\Psi(t_0)] = 0$ γιά κάποιο $t_0 \in \mathbb{R}$. Τότε τα διανύσματα $\{\underline{\psi}_1(t_0), \dots, \underline{\psi}_n(t_0)\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα καί άρα υπάρχουν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\psi}_i(t_0) = \underline{0}$. Κάθε γραμμικός συνδυασμός από τίς στήλες

του $\Psi(t)$ είναι λύση του $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$ και επομένως $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\psi}_i(t) \in \mathcal{L}$ (τό σύνολο λύσεων). Εφόσον $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\psi}_i(t_0) = \underline{0}$, η συνάρτηση $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\psi}_i(t)$ είναι λύση του Π.Α.Τ : $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$, $\underline{x}(t_0) = \underline{0}$. Λόγω μοναδικότητας της λύσης του Π.Α.Τ. έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\psi}_i(t) = \underline{0}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, πού είναι άτοπο γιατί οι στήλες $\{\underline{\psi}_1(t), \dots, \underline{\psi}_n(t)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στό $\mathbb{R}$ και τά $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ δέν είναι όλα μηδέν. Επομένως $\det[\Psi(t)] \neq 0$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\Psi(t)$ είναι λύση της $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$ και έστω ότι $\det[\Psi(t)] \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Τότε οι στήλες του $\Psi(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στό $\mathbb{R}$ και επομένως ο $\Psi(t)$ είναι Θ.π.λ. □

<u>Θεώρημα (Liouville)</u>: Έστω $\{\underline{\psi}_1(t), \underline{\psi}_2(t), \dots, \underline{\psi}_n(t)\}$ λύσεις του συστήματος $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$. Τότε, αν $\Psi(t) = [\underline{\psi}_1(t), \dots \underline{\psi}_n(t)]$ ισχύει ότι:

$$\det[\Psi(t)] = \det[\Psi(t_0)] \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{trace}[A(\sigma)]\,d\sigma\right)$$

$\forall\, t_0, t \in \mathbb{R}$.

Το Θεώρημα δείχνει ότι $\det[\Psi(t)] = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ ή $\det[\Psi(t)] \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα:</u> (i) Αν $\Psi(t)$ Θ.π.λ. τού $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$, τότε $\Psi(t)C$ είναι επίσης Θ.π.λ. $\forall C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $\det(C) \neq 0$. (ii) Αν $\Psi(t)$ και $\Psi_1(t)$ δύο Θ.π.λ., τότε $\exists C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(C_1) \neq 0$: $\Psi_1(t) = \Psi(t) C_1$.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Έστω $\Psi(t)$ Θ.π.λ. Τότε οι στήλες του $\Psi(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t) \Rightarrow \Psi'(t)C =$
$= A(t)\Psi(t)C \Rightarrow (\Psi(t)C)' = A(t)(\Psi(t)C)$ και $\det[\Psi(t)C] =$
$= \det[\Psi(t)] \cdot \det[C] \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. και επομένως $\Psi(t)C$ είναι Θ.π.λ.

(ii) Έστω $\Psi(t)$, $\Psi_1(t)$ δύο θ.π.λ. Ορίζουμε $Y(t) = \Psi^{-1}(t)\Psi_1(t)$ $\Leftrightarrow$ $\Psi(t)\,Y(t) = \Psi_1(t)$ (ο $\Psi(t)$ είναι μη ιδιάζων ως θ.π.λ).
Παραγωγίζοντας:

$$\Psi'(t)\,Y(t) + \Psi(t)\,Y'(t) = \Psi_1'(t)$$

$$\Rightarrow \quad A(t)\cancel{\Psi(t)}\,Y(t) + \Psi(t)\,Y'(t) = A(t)\cancel{\Psi_1(t)}$$

$$\Rightarrow \quad Y'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(t) = C_1 \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad (\text{σταθερός πίνακας}).$$

Άρα $\det(C_1) = \det[Y(t_0)] = \det[\Psi^{-1}(t_0)]\cdot\det[\Psi_1(t_0)] \neq 0$.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\Psi(t)$ θ.π.λ. του $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$. Τότε ο πίνακας $\Phi(t,t_0) = \Psi(t)\,\Psi^{-1}(t_0)$, $t_0, t \in \mathbb{R}$, λέγεται "πίνακας μεταφοράς" του συστήματος. Παρατηρούμε ότι:

(1) $\det[\Psi(t_0)] \neq 0 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \Phi(t,t_0)$ καλά ορισμένος

(2) Ο $\Phi(t,t_0)$ είναι ανεξάρτητος του $\Psi(t)$ που τον ορίζει. Πράγματι, αν $\Psi(t) = \Psi_0(t)\,C$, $\det(C) \neq 0$, τότε:

$$\begin{aligned}\Phi(t,t_0) = \Psi(t)\,\Psi^{-1}(t_0) = \Psi_0(t)\,C\,[\Psi_0(t_0)\,C]^{-1} &= \\ = \Psi_0(t)\,C\,C^{-1}\,\Psi_0^{-1}(t_0) \\ = \Psi_0(t)\,\Psi_0^{-1}(t_0).\end{aligned}$$

(3) Εφόσον ο $\Psi(t)$ είναι θ.π.λ., κάθε λύση της $\underline{x}' = A(t)\,\underline{x}$ είναι της μορφής: $\underline{x}(t) = \Psi(t)\,\underline{c}$, $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$. Ποιά είναι η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $\underline{x}(t_0) = \underline{x_0}$;
$\underline{x}(t_0) = \Psi(t_0)\,\underline{c} \Rightarrow \underline{c} = \Psi^{-1}(t_0)\,\underline{x}(t_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \underline{x}(t) = \Psi(t)\,\Psi^{-1}(t_0)\,\underline{x}(t_0) = \Phi(t,t_0)\,\underline{x}(t_0).$$

<u>Θεώρημα</u> (Ιδιότητες πίνακα μεταφοράς)

(1) $\Phi(t,t) = I_n \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(2) $\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t) \quad \forall t_0, t \in \mathbb{R}$

(3) $\Phi(t_2,t_0) = \Phi(t_2,t_1)\,\Phi(t_1,t_0) \quad \forall t_0,t_1,t_2 \in \mathbb{R}$

<u>Απόδειξη</u>: Είναι $\Phi(t,t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0)$ όπου $\psi(t)$ θ.π.λ.

(1) $\Phi(t,t) = \psi(t)\psi^{-1}(t) = I_n \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(2) $\Phi^{-1}(t,t_0) = \left[\psi(t)\psi^{-1}(t_0)\right]^{-1} = \psi(t_0)\psi^{-1}(t) = \Phi(t_0,t)$
$\forall t_0, t \in \mathbb{R}$

(3) $\Phi(t_2,t_0) = \psi(t_2)\psi^{-1}(t_0) = \psi(t_2)\psi^{-1}(t_1)\psi(t_1)\psi^{-1}(t_0)$
$= \Phi(t_2,t_1)\cdot\Phi(t_1,t_0) \quad \forall t_0,t_1,t_2 \in \mathbb{R}$. □

<u>Θεώρημα</u>: Ο $\Phi(t,t_0)$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) = A(t)\,\Phi(t,t_0), \quad \Phi(t_0,t_0) = I_n$$

<u>Απόδειξη</u>: $\Phi(t,t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\Phi(t,t_0)\right] = \psi'(t)\psi^{-1}(t_0)$

$$= A(t)\psi(t)\psi^{-1}(t_0) = A(t)\,\Phi(t,t_0)$$

και $\Phi(t_0,t_0) = I_n$. Η μοναδικότητα λύσης προκύπτει από την συνέχεια του $A(t)$. □

<u>Λύση γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος με είσοδο</u>

Εξετάζουμε το σύστημα: $\underline{x}'(t) = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t)$, $\underline{x}(t_0) = x_0$
όπου $A(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $B(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times m})$ και $\underline{u}(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$
Αναζητούμε λύση της μορφής: $\underline{x}(t) = \Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}(t)$ για κάποια

συνάρτηση $\underline{\psi}(t)$ (μέθοδος μεταβολής παραμέτρων). Έχουμε:

$$\underline{x}'(t) = \frac{\partial \Phi(t,t_0)}{\partial t}\,\underline{\psi}(t) + \Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}'(t)$$

$$= A(t)\,\underbrace{\Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}(t)}_{\underline{x}(t)} + \Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}'(t).$$

Επίσης: $\underline{x}'(t) = A(t)\,\underline{x}(t) + B(t)\,\underline{u}(t)$. Επομένως:

$$B(t)\,\underline{u}(t) = \Phi(t,t_0)\,\underline{\psi}'(t) \Rightarrow \underline{\psi}'(t) = \Phi^{-1}(t,t_0)\,B(t)\,\underline{u}(t)$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \underline{\psi}'(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau,t_0)\,B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau.$$

$$\Rightarrow \underline{\psi}(t) - \underline{\psi}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau,t_0)\,B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \underline{\psi}(t) = \underline{\psi}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau,t_0)\,B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \Phi^{-1}(t,t_0)\,\underline{x}(t) = \cancel{\Phi^{-1}(t_0,t_0)}\,\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \overset{\Phi(t,t_0)}{\underline{x}(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,t_0)\,\Phi(t_0,\tau)\,B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau.$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \overset{\Phi(t,t_0)}{\underline{x}(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\,B(\tau)\,\underline{u}(\tau)\,d\tau.$$

Χρονικά ανεξάρτητα συστήματα.

Γιά τό αυτόνομο σύστημα $\underline{x}' = A\underline{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ορίζουμε την εκθετική συνάρτηση:

$$e^{At} = \psi(t)\,\psi^{-1}(0) = \Phi(t,0)$$

όπου $\psi(t)$ είναι Θ.π.λ. Από τίς ιδιότητες Θ.π.λ. έχουμε:

$e^{A0} = \psi(0)\,\psi^{-1}(0) = I_n$ καί $(e^{At})' = \psi'(t)\,\psi^{-1}(0) = A(t)\,\psi(t)\,\psi^{-1}(0)$

$= A e^{At}$

Θεώρημα: Γιά τόν εκθετικό πίνακα e^{At} ισχύουν οί εξής ιδιότητες:

(1) $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$ $\quad t, s \in \mathbb{R}$

(2) $(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

(3) $(e^{At})' = A e^{At} = e^{At} A$ $\quad t \in \mathbb{R}$

(4) Η σειρά $S_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} t^k A^k$ συγκλίνει απολύτως καί ομοιόμορφα σέ κάθε διάστημα $(-\alpha, \alpha) \subseteq \mathbb{R}$ καθώς $m \to \infty$ στήν εκθετική συνάρτηση e^{At}.

Απόδειξη:

(1) Θέτουμε $X(t) = e^{A(t+s)}$, $Y(t) = e^{At} e^{As}$ γιά s σταθεροποιημένο. Υπολογίζουμε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(t) &= \frac{d}{d(t+s)} e^{A(t+s)} = A X(t) \\ X(0) &= e^{As} \end{aligned}\right\}$$

Επίσης:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} Y(t) &= \frac{d}{dt} \left(e^{At} \cdot e^{As}\right) = \frac{d}{dt} \left(e^{At}\right) e^{As} \\ &= \left(A e^{At}\right) e^{As} = A \left(e^{At} e^{As}\right) = A Y(t) \\ Y(0) &= e^{As} \end{aligned}\right\}$$

Οι πίνακες $X(t)$ καί $Y(t)$ είναι λύσεις του Π.Α.Τ:

$$\frac{d}{dt} Z(t) = A Z(t), \qquad Z(0) = e^{As}$$

Από τήν μοναδικότητα λύσης έχουμε $X(t) = Y(t) \Rightarrow e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$.

$$(\alpha)\quad (Ae^{At})' = A(e^{At})' = A(Ae^{At})$$

$$(\beta)\quad (e^{At}A)' = (e^{At})'A = A(e^{At}A)$$

Επίσης $Ae^{At}|_{t=0} = e^{At}A|_{t=0} = A$. Επομένως οι πίνακες Ae^{At} και $e^{At}A$ είναι λύσεις του ίδιου συστήματος $B'(t) = A\,B(t)$, $B(0)=A$. Από τό θεώρημα του μονοσήμαντου οι δύο λύσεις ταυτίζονται.

(4) Η πλέον σημαντική ιδιότητα πού δίνει νόημα στό σύμβολο e^{At} ανάλογο μέ της εκθετικής συνάρτησης. Μέ τή χρήση της γράφουμε την (2) ως: $(e^{At})^{-1} = e^{A(-t)} = e^{-At}$. Θέτουμε $P(t)=e^{At}$. Θεωρούμε τήν λύση $\varphi(t,\underline{x_0}) = P(t)\underline{x_0}$ του Π.Α.Τ: $(P(t)\underline{x_0})' = A(P(t)\underline{x_0})$, ~~κατα~~ $P(0)=I$, και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$P(t)\underline{x_0} = I_n\underline{x_0} + \int_0^t AP(s)\underline{x_0}\,ds \qquad (*)$$

Γιά τήν επίλυση της εξίσωσης αυτής εφαρμόζουμε τό διανυσματικό ανάλογο της μεθόδου Picard: Επιλέγουμε ως πρώτη προσέγγιση:

$$P^{(0)}(t)\,\underline{x_0} := I_n\underline{x_0}$$

και ως επόμενη προσέγγιση:

$$P^{(1)}(t)\,\underline{x_0} = I_n\underline{x_0} + \int_0^t AP^{(0)}(s)\underline{x_0}\,ds$$

$$= I_n\underline{x_0} + \int_0^t A\underline{x_0}\,ds = I_n\underline{x_0} + A\underline{x_0}\,t$$

και επαγωγικά: $P^{(k+1)}(t)\,\underline{x_0} = I_n\underline{x_0} + \int_0^t AP^{(k)}(s)\underline{x_0}\,ds$, $k\in\mathbb{N}_0$

Μελετάμε την σύγκλιση της ακολουθίας $P^{(k)}(t)\underline{x_0}$ και δείχνουμε ότι η λύση της (*), άρα και της $(P(t)\underline{x_0})' = A(P(t)\underline{x_0})$, $P(0)=I$, δίνεται από τήν συγκλίνουσα σειρά:

$$e^{At}\underline{x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \underline{x_0}\, t^n$$

Γιά $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ καί $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζουμε τήν Ευκλείδια νόρμα του $\underline{x}$ $\|x\| = \sqrt{\underline{x}^T \underline{x}}$ καί τήν αντίστοιχη επαγώμενη νόρμα του A $\|A\| = \sup\{\|A\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1\}$. Από τήν συνέχεια του μετασχηματισμού $\underline{y} \to A\underline{y} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ καί της νόρμας $\underline{y} \to \|\underline{y}\| : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}_+$ ο μετασχηματισμός $\underline{x} \to \|A\underline{x}\| : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}_+$ είναι συνεχής. Επιπλέον τό σύνολο $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$ είναι συμπαγές, καί άρα $\|A\| = \max\{\|A\underline{x}\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|=1\} < \infty$ (η νόρμα $\|A\|$ ως ορίστηκε είναι η μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του A, ή η φασματική νόρμα, δηλ. $\|A\| = \lambda_{max}^{1/2}(A^TA)$). Έχουμε ότι: $\|A^2 \underline{x_0}\| = \|A(A\underline{x_0})\| \le \|A\|\,\|A\underline{x_0}\| \le \|A\|^2 \|\underline{x_0}\|$ καί γενικά $\|A^k \underline{x_0}\| \le \|A\|^k \|\underline{x_0}\|$.

Συνεπώς, αν $\|\underline{x_0}\| = 1$,

$$\|P^k(t)\underline{x_0}\| = \|I_n \underline{x_0} + A\underline{x_0}t + \dots + \frac{1}{k!}A^k \underline{x_0} t^k\|$$

$$\le 1 + \|A\|t + \dots + \frac{1}{k!}\|A\|^k t^k$$

καί

$$\|P^{(k+1)}(t)\underline{x_0} - P^{\ell}(t)\underline{x_0}\| \le \sum_{n=\ell+1}^{k+1} \frac{1}{(n+1)!}\|A\|^n t^n \to 0$$

~~ομοιόμορφα γιά $\underline{x_0} \in \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$~~. Επομένως η ακολουθία $\{P^k(t)\underline{x_0}\}$ είναι ακολουθία Cauchy καί συγκλίνει ομοιόμορφα γιά $\underline{x_0} \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|=1\}$. Θέτουμε: $\varphi(t, \underline{x_0}) = \lim_{k\to\infty} P^k(t)\underline{x_0}$

Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης:

$$P^{(k+1)}(t)\underline{x_0} = I_n\underline{x_0} + \int_0^t A P^{(k)}(s)\underline{x_0}\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\{P^{(k+1)}(t)\underline{x_0}\} = I_n \underline{x_0} + \lim_{k\to\infty}\int_0^t A P^{(k)}(s)\underline{x_0}\, ds$$

$$= I_n\underline{x_0} + \int_0^t A \lim_{k\to\infty}\{P^{(k)}(s)\underline{x_0}\}\, ds$$

Καί επομένως: $\underline{\varphi}(t, \underline{x_0}) = \underline{x_0} + \int_0^t A\, \underline{\varphi}(s, \underline{x_0})\, ds$.

Κατά τα γνωστά η $\underline{\varphi}(t, \underline{x_0})$ επιλύει το ισοδύναμο Π.Α.Τ:
$\underline{x}' = A\underline{x}$, $\underline{x}(0) = \underline{x_0}$ και έχουμε

$$e^{At}\underline{x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \underline{x_0} t^n = \left(I_n + At + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} + \cdots\right)\underline{x_0}$$

$\square$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $AB = BA$. Τότε ισχύει
$e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$

<u>Απόδειξη</u>: Θέτουμε $\Theta(t) = e^{(A+B)t} e^{-Bt} e^{-At}$. Τότε:

$$\Theta'(t) = (A+B)e^{(A+B)t}e^{-Bt}e^{-At} + e^{(A+B)t}(-B)e^{-Bt}e^{-At} + e^{(A+B)t}e^{-Bt}(-A)e^{-At}$$

Λόγω του ότι $AB = BA \Rightarrow Ae^{-Bt} = e^{-Bt}A$ και $Ae^{(A+B)t} = e^{(A+B)t}A$,
$Be^{(A+B)t} = e^{(A+B)t}B$. Επομένως:

$$\Theta'(t) = \{(A+B)e^{(A+B)t}e^{-Bt} - e^{(A+B)t}Be^{-Bt} - e^{(A+B)t}e^{-Bt}A\}e^{-At}$$

$$= \{(A+B)e^{(A+B)t} - e^{(A+B)t}B - e^{(A+B)t}A\}e^{-Bt}e^{-At}$$

$$= e^{(A+B)t}\{A+B-B-A\}e^{-Bt}e^{-At} = 0$$

$$\Rightarrow \Theta'(t) = 0 \Rightarrow \Theta(t) = \Theta(0) = I_n \Rightarrow e^{(A+B)t}e^{-Bt} = e^{At}$$
$$\Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ συγκλίνει για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $m = \max_{i,j} |a_{ij}|$. Τότε ισχύει:

$$|(A^2)_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||a_{kj}|$$

$$\leq nm^2 = \frac{1}{n}(nm)^2$$

$$|(A^3)_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(A^2)_{kj}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|(A^2)_{kj}|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} m\,\frac{1}{n}(nm)^2 = \frac{1}{n}(nm)^3$$

καί γενικά (επαγωγή)

$$|(A^k)_{ij}| \leq \frac{1}{n}(nm)^k \quad , k\in\mathbb{N}.$$ Επομένως:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^k A^k}{k!}\right)_{ij} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}|(A^k)_{ij}| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k}{k!}\frac{1}{n}(nm)^k$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nm|t|)^k}{k!} = \frac{1}{n}e^{nm|t|}$$

δηλαδή η ακολουθία συγκλίνει γιά κάθε $t\in\mathbb{R}$. □

<u>Θεώρημα.</u>: Αν $\mathcal{L}(\cdot)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace, τότε $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI-A)^{-1}$ γιά κάθε τετραγωνικό πίνακα A.

<u>Απόδειξη</u>: Ισχύει ότι $f(\lambda) = (1-\lambda)^{-1} = 1+\lambda+\lambda^2+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k$ γιά κάθε $|\lambda|<1$. Επειδή $\sigma\left(\frac{A}{s}\right) \subseteq \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ γιά αρκούντως μεγάλη τιμή του $|s|$, λόγω του ορισμού προκύπτει ότι:

$$f(s^{-1}A) = (I - s^{-1}A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(s^{-1}A)^k$$

Ομως ισχύουν: $\mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!}\right\} = s^{-(k+1)}$ καί

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \mathcal{L}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{-(k+1)} A^k =$$

$$= s^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (s^{-1}A)^k = s^{-1}(I - s^{-1}A)^{-1} = (sI - A)^{-1} \quad \square$$

Η λύση του χρονικά-αναλλοίωτου (σταθεροί πίνακες) συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}'(t) &= A\,\underline{x}(t) + B\,\underline{u}(t) \quad , \quad \underline{x}(t_0) = x_0 \\ \underline{y}(t) &= C\,\underline{x}(t) + D\,\underline{u}(t) \end{aligned}\right\}$$

βρίσκεται από τη λύση του αντίστοιχου χρονικά-μεταβαλλόμενου συστήματος θέτοντας $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$. Έχουμε:

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{x_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\underline{y}(t) = C e^{A(t-t_0)}\underline{x_0} + \int_{t_0}^{t} C e^{A(t-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\,\underline{u}(t)$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας θέτουμε $t_0=0$ και:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{At}\underline{x_0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \\ \underline{y}(t) &= Ce^{At}\underline{x_0} + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\,\underline{u}(t) \end{aligned}\right\}.$$

Συμβατικά γράφουμε:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}(t) &= e^{At}\underline{x_0} + \left(e^{At}B\right) * \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= Ce^{At}\underline{x_0} + \left(Ce^{At}B + D\,\delta(t)\right) * \underline{u}(t) \end{aligned}\right\}.$$

όπου $\delta(\cdot)$ η "συνάρτηση" Dirac και $*$ η συνέλιξη συναρτήσεων. Η συνάρτηση $Ce^{At}B + D\,\delta(t)$ ονομάζεται "κρουστική απόκριση" του συστήματος.