2. Χρήσιμη μαθηματικά έννοιες. (επανάληψη).

A. Διανυσματικοί χώροι καί υπόχωροι: Έστω $\mathcal{X}$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ (η $\mathbb{C}$) καί $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ υπόχωροι του $\mathcal{X}$. Τότε $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{x \in \mathcal{X} : x \in \mathcal{V} \wedge x \in \mathcal{W}\}$ καί $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \{x+y : x \in \mathcal{V}, y \in \mathcal{W}\}$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{X}$. Συγκεκριμένα, ο $\mathcal{V}+\mathcal{W}$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{X}$ πού περιέχει τους $\mathcal{V}$ καί $\mathcal{W}$ καί ο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ ο μεγαλύτερος υπόχωρος του $\mathcal{X}$ πού περιέχεται στους $\mathcal{V}$ καί $\mathcal{W}$.

Οι υπόχωροι $\mathcal{V}_1$ καί $\mathcal{V}_2$ του $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι αν $\underline{x} \in \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$, $\underline{x}_i \in \mathcal{V}_i$ (ισοδύναμα $\underline{x}_i \in \mathcal{V}_i$ καί $\underline{x}_1 + \underline{x}_2 = \underline{0} \Rightarrow \underline{x}_1 = \underline{x}_2 = \underline{0}$). Αν $\mathcal{V}_1$ και $\mathcal{V}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι τότε $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ (ευθύ άθροισμα). Αν $\mathcal{V}$ υπόχωρος $\mathcal{X}$, τότε $\exists$ υπόχωρος $\mathcal{W}$: $\mathcal{X} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. καί ο $\mathcal{W}$ λέγεται γραμμικό συμπλήρωμα του $\mathcal{V}$. Ο $\mathcal{W}$ κατασκευάζεται επεκτείνοντας μιά βάση του $\mathcal{V}$ $\{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots \underline{q}_k\}$ σέ βάση του $\mathcal{X}$: $\{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots \underline{q}_k, \dots \underline{q}_n\}$ (Προφανώς ό $\mathcal{W}$ δέν είναι μοναδικός).

B. Γραμμικοί μετασχηματισμοί. Αν A είναι γραμμικός μετασχηματισμός ($A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$) μεταξύ χώρων $\mathcal{X}$ καί $\mathcal{Y}$, ορίζουμε:

(i) $\mathcal{N}(A) := \{x \in \mathcal{X} : A\underline{x} = 0\}$ (πυρήνας / kernel του A)

(ii) $\mathcal{R}(A) := \{Ax \in \mathcal{Y} : x \in \mathcal{X}\}$ (εικόνα του A / range / image).

Οι $\mathcal{N}(A)$ καί $\mathcal{R}(A)$ είναι υπόχωροι των $\mathcal{X}$ καί $\mathcal{Y}$ αντίστοιχα. Ο A είναι <u>επί</u> αν $\mathcal{R}(A) = \mathcal{Y}$ καί <u>αμφιμονοσήμαντη</u> απεικόνιση αν $\mathrm{Ker}(A) = \{\underline{0}\}$. Ο A ~~[illegible]~~ είναι επί καί αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση (bijection) αν ισχύουν καί οι δύο ιδιότητες καί σ' αυτήν την περίπτωση ορίζεται αντίστροφος μετασχηματισμός $A^{-1} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Αναγκαία συνθήκη (αν $\mathcal{X}$ καί $\mathcal{Y}$ είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης) γιά νά ορίζεται ο A^{-1} είναι $\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{Y})$.

Δοθέντος $A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ καί υπόχωρος $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{X}$, λέμε ότι ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος αν $\forall x\in\mathcal{V} \Rightarrow Ax\in\mathcal{V}$. Σέ αυτήν την περίπτωση γράφουμε $A\mathcal{V}\subseteq\mathcal{V}$.

Αν $A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$ καί $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{X}$ (υπόχωρος του $\mathcal{X}$), τότε ορίζουμε τον περιορισμό του A στον $\mathcal{V}$ ($A|\mathcal{V}$) τον μετασχηματισμό $\underline{A}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ ώστε $\underline{A}x = Ax$ $\forall x\in\mathcal{V}$.

Έστω $\mathcal{X}$ διαν. χώρος διάστασης n καί $\{\underline{q_1}, q_2, \ldots q_n\}$ βάση του, ώστε κάθε $x\in\mathcal{X}$ νά γράφεται μοναδικά ως: $\underline{x}=x_1\underline{q_1}+x_2\underline{q_2}+\cdots+x_n\underline{q_n}$. Οι συντελεστές x_i ($\in\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) γράφονται ως διάνυσμα στήλης του x ως πρός τη βάση $\{\underline{q_1},\ldots \underline{q_n}\}$, δηλ. $\underline{x}=(x_1. x_2 \ldots x_n)^T$. Αν $\{\underline{q_1},\ldots \underline{q_n}\}$ βάση του $\mathcal{X}$ καί $\{\underline{r_1},\ldots r_p\}$ βάση του $\mathcal{Y}$ καί $C:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ γραμμικός μετασχηματισμός, ο πίνακας του C ως πρός τίς δύο βάσεις $\{q_1,\ldots q_n\}$ καί $\{\underline{r_1},\ldots \underline{r_p}\}$ ορίζεται ως εξής:
Έστω $\underline{y}=C\underline{x}=C(x_1\underline{q_1}+\cdots+x_n\underline{q_n})=x_1(C\underline{q_1})+\cdots+x_n(C\underline{q_n})$
Γράφουμε:

$$C\underline{q_i} = c_{1i}\underline{r_1} + c_{2i}\underline{r_2} + \cdots + c_{pi}\underline{r_p}, \quad i=1,2,\ldots n.$$

Τότε:

$$\underline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i (C\underline{q_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{p} c_{ji}\underline{r_j}\right) := \sum_{j=1}^{p} y_j \underline{r_j}$$

$$\cancel{= \sum_{j=1}^{p} c_{ji} x_i} = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ji} x_i\right)\underline{r_j}$$

$$\Rightarrow y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} x_i, \quad j=1,2,\ldots,p.$$

$$\begin{array}{cc} & \\ j\rightarrow & \\ & \end{array}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ j\rightarrow \\ \\ \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{j1} & c_{j2} & \cdots & c_{jn} \\ \vdots & & & \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}}_{(C)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ο $[C]$ είναι ο πίνακας του C ως πρός τίς δύο βάσεις.
Έστω ότι $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathcal{X}$ καί

$\{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots \underline{q}_k\}$ βάση του $\mathcal{V}$. ($\dim(\mathcal{V}) = k$) Επεκτείνουμε την βάση αυτή στην βάση, $\{\underline{q}_1, \dots \underline{q}_k \mid \underline{q}_{k+1}, \dots \underline{q}_n\}$ του $\mathcal{X}$ ($\dim(\mathcal{X}) = n$). (Η βάση αυτή λέγεται προσαρμοσμένη – adapted – ως πρό την $\{\underline{q}_1, \dots \underline{q}_k\}$.) Ποιός είναι ο πίνακας του A ως πρός την βάση $\{\underline{q}_1, \dots \underline{q}_n\}$;

Άν $\underline{y} = A\underline{x}$ ($\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{X}$) τότε έχουμε $[A] = (\alpha_{ji})_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1,\dots n}}$ με $y_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji} x_i$, $j = 1, 2, \dots n$. Εφόσον $\mathcal{V}$ A-αναλλοίωτος έχουμε

$$A\underline{q}_i = \alpha_{1i}\underline{q}_1 + \dots + \alpha_{ki}\underline{q}_k + 0\,\underline{q}_{k+1} + \dots + 0\,\underline{q}_n$$

$i = 1, 2, \dots k$. Επομένως $\alpha_{ji} = 0$ γιά $j = k+1, \dots n$ και $i = 1, 2, \dots k$, δηλ.

$$[A] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & & \alpha_{kk} & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{k,n} \\ \hline 0 & 0 & & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & & \alpha_{k+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 0 & \alpha_{n,k+1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{array}\right]$$

Δηλ. $[A] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]$; $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ και $A_{22} \in \mathbb{R}^{n-k, n-k}$.

Ο πίνακας του $A|\mathcal{V}$ ως πρός τη βάση $\{\underline{q}_1, \dots \underline{q}_k\}$ είναι $[A|\mathcal{V}] = A_{11}$.

<u>Γ. Χώροι εσωτερικού γινομένου</u>: Αν $\mathcal{X}$ διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$ η $\mathbb{C}$) με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται πραγματικός (μιγαδικός) χώρος εσωτερικού γινομένου. <u>Παράδειγμα</u>: $\mathbb{R}^n$ με $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \underline{y}$, η $\mathbb{C}^n$ με $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^* \underline{y}$ ($\underline{x}^* = \bar{\underline{x}}^T$).

Αν $\mathcal{X}$ ο χώρος εσ. γινομένου, ~~τότε~~ ~~$\mathcal{X}$~~ και $\mathcal{V}$ υπόχωρος του

Προσαρμοσμένη (adapted) στον $\mathcal{V}$ τότε:

$$[A] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right]. \qquad \text{όπου } A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad k = \dim(\mathcal{V})$$

και επομένως $\chi_A(s) = \det(sI - A) = \det(sI - A_{11}) \cdot \det(sI - A_{22}) = \chi_B(s) \cdot \det(sI - A_{22})$.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε ορίζεται $A^k = A \cdot A \cdots A$ (k παράγοντες) και $A^0 = I_n$. Έστω $f(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$: $f(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_0$. Τότε ορίζουμε: $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n$. Από τον ορισμό προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

$$p(A)\,q(A) = (pq)(A), \quad p(A) + q(A) = (p+q)(A)$$

και ειδικότερα $p(A)q(A) = q(A)p(A)$. Επειδή $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ υπάρχει πάντα $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $\det(V) \neq 0$ έτσι ώστε $A = VJV^{-1}$ όπου J η Jordan μορφή του A και επίσης

$$A^k = (VJV^{-1})(VJV^{-1})\cdots(VJV^{-1}) = VJ^kV^{-1}$$

ισχύει ότι $f(A) = a_m(VJ^mV^{-1}) + a_{m-1}(VJ^{m-1}V^{-1}) + \dots + a_0 VV^{-1}$
$= V(a_m J^m + a_{m-1} J^{m-1} + \dots + a_1 J + a_0 I)V^{-1} = Vf(J)V^{-1}$
και συνεπώς $\sigma(f(A)) = \sigma(f(J))$. Έστω $\lambda_i \in \sigma(A)$, $i = 1, 2, \dots n$, όλες οι ιδιοτιμές του A (επιτρέπονται επαναλήψεις της ίδιας ιδιοτιμής σύμφωνα με την αλγεβρική της πολλαπλότητα). Τότε $f(\lambda_i) \in \sigma(f(A)) = \sigma(f(J))$, $i = 1, 2, \dots n$ (λόγω θεωρήματος Schur)

<u>Θεώρημα</u> (Φασματικής απεικόνισης): $\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$

~~Άμεσο αποτέλεσμα του θεωρήματος φασματικής απεικόνισης είναι και το παρακάτω θεώρημα:~~

Ορισμός: Ορίζεται "ελάχιστο πολυώνυμο" ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τό μοναδικό monic πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού, $m(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$, τέτοιο ώστε $m(A) = 0$.

Ορισμός: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $\lambda_i \in \sigma(A)$ αλγεβρικής πολ/τας τ_i, $i=1,2,\dots,p$ (τ_i η πολλαπλότητα του όρου $s-\lambda_i$ σέ παραγοντοποίηση του $\chi_A(s)$). Ονομάζεται "δείκτης" $\tilde{\tau}_i$ της ιδιοτιμής λ_i η μέγιστη τάξη από τα Jordan blocks της Jordan μορφής του A, πού αντιστοιχεί στο λ_i.

Θεώρημα: Τό ελάχιστο πολυώνυμο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ δίδεται από τον τύπο:

$$m(\lambda) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_i)^{\tilde{\tau}_i}$$

όπου $\tilde{\tau}_i$ ο δείκτης της ιδιοτιμής λ_i του A.

Παράδειγμα: Αν $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$, $\sigma(A) = \{2,3\}$ και έστω

$$A \sim J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 3 & & & \\ & & & & 3 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 3 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Τότε $m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-3)^3$

Θεώρημα: (Cayley-Hamilton): Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\chi_A(s) = \det(sI_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

$\mathcal{V}$, τότε $\mathcal{V}^\perp$ ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\mathcal{V}$. Αν $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ υπόχωροι του $\mathcal{X}$, τότε $(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})^\perp = \mathcal{V}^\perp + \mathcal{W}^\perp$. Αν $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ χώροι εσωτερικού γινομένου με εσ. γινόμενα $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Y}}$ αντίστοιχα, τότε ο συζυγής (adjoint) τελεστής $C^*: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ ορίζεται από την σχέση

$$\langle x, C^* y \rangle_{\mathcal{X}} = \langle Cx, y \rangle_{\mathcal{Y}} \qquad \forall x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$$

Αν $A: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, τότε $(A^{-1}\mathcal{V})^\perp = A^* \mathcal{V}$, όπου $A^{-1}\mathcal{V}$ η αντίστροφη εικόνα του $\mathcal{V}$, δηλ $A^{-1}\mathcal{V} := \{x \in \mathcal{X} : Ax \in \mathcal{V}\}$. Αν $\mathcal{V}$ A-αναλλοίωτος, τότε και ο $\mathcal{V}^\perp$ A-αναλλοίωτος. Αν $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ πραγματικοί χώροι εσωτερικού γινομένου, αν $\{\underline{q}_1, \dots \underline{q}_n\}$ και $\{\underline{r}_1, \dots \underline{r}_p\}$ ορθοκανονική βάσεις των $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ αντίστοιχα και $[C]$ ο πίνακας του C ως προς τις βάσεις αυτές, τότε $[C^*] = [C]^T$. (γιά μιγαδικούς χώρους εσ. γινομένου $[C^*] = [C]^* = [\bar{C}]^T$).

Δ Ιδιοτιμές / Ιδιοδιανύσματα

Αν $A: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ γραμμικός μετασχηματισμός, τότε $\lambda \in \mathbb{C}$ λέγεται ιδιοτιμή του A αν $\exists \underline{v} \in \mathcal{X}, \underline{v} \neq \underline{0}$: $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$. Αν $\dim(\mathcal{X}) = n$ τότε το φάσμα του A, $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda$ ιδιοτιμή του $A\}$ περιέχει το πολύ n στοιχεία. Η φασματική ακτίνα του A ορίζεται ως: $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Η συνάρτηση $\chi_A(s) =: \det(sI - A)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n και monic (μονικό) δηλ ο συντελεστής τού πιό υψηλόβαθμου όρου $= 1$. Το $\chi_A(s)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ρίζες του είναι οι ιδιοτιμές του A. Αν $\lambda \in \sigma(A)$ και $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, τότε το $\underline{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Αν $\mathcal{V}$ A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathcal{X}$ και $B = A|\mathcal{V}$ (περιορισμός του A στον $\mathcal{V}$) τότε $\sigma(B) \subseteq \sigma(A)$. Επιπλέον, τό $\chi_B(s)$ διαιρεί το $\chi_A(s)$ $(\chi_B | \chi_A)$: Αν ορίσουμε βάση του $\mathcal{X}$

Απόδειξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα αφού ~~πάντα~~ $m(\lambda) \mid \chi_A(\lambda)$. $\square$

Θεώρημα: Έστω $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ και έστω ότι $\chi_A(s) = p(s)q(s)$ όπου $p(s) \in \mathbb{R}[s]$, $q(s) \in \mathbb{R}[s]$ monic και σχετικά πρώτα. Ορίζουμε $\mathcal{V} = \mathcal{N}(p(A))$ και $\mathcal{W} = \mathcal{N}(q(A))$. Τότε:

(i) $\mathcal{V} = \mathcal{R}(q(A))$, $\mathcal{W} = \mathcal{R}(p(A))$

(ii) $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{X}$

(iii) $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι A-αναλλοίωτοι υπόχωροι.

(iv) $\chi_{A|\mathcal{V}} = p$, $\chi_{A|\mathcal{W}} = q$.

Απόδειξη: Εφόσον $(p(s), q(s))$ πρώτα μεταξύ τους $\exists\, r(s), q(s) \in \mathbb{R}[s]$: $rp + sq = 1 \Rightarrow I = r(A)p(A) + s(A)q(A) = p(A)r(A) + q(A)s(A)$. Επομένως $\forall\, \underline{x} \in \mathcal{X}$:

$$(*) \qquad \underline{x} = r(A)p(A)\underline{x} + s(A)q(A)\underline{x} = p(A)r(A)\underline{x} + q(A)s(A)\underline{x}$$

(i) Θα δείξουμε ότι $\mathcal{R}(q(A)) = \mathcal{N}(p(A))$. Έστω $\underline{x} \in \mathcal{R}(q(A))$. Τότε $\underline{x} = q(A)\underline{y}$ γιά κάποιο $\underline{y}$, και ~~πάντα~~

$$p(A)\underline{x} = \underbrace{p(A)q(A)}_{\chi_A(A)}\underline{y} = 0 \Rightarrow \underline{x} \in \mathcal{N}(p(A)).$$

Επομένως $\mathcal{R}(q(A)) \subseteq \mathcal{N}(p(A))$. Αντιστρόφως, αν $\underline{x} \in \mathcal{V} = \mathcal{N}(p(A))$ τότε $p(A)\underline{x} = \underline{0} \overset{(*)}{\Rightarrow} \underline{x} = s(A)q(A)\underline{x} \Rightarrow \underline{x} = q(A)s(A)\underline{x}$ $\Rightarrow \underline{x} \in \mathcal{R}(q(A)) \Rightarrow \mathcal{N}(p(A)) \subseteq \mathcal{R}(q(A))$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{V} = \mathcal{N}(p(A)) = \mathcal{R}(q(A))$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $\mathcal{W} = \mathcal{N}(q(A)) = \mathcal{R}(p(A))$.

(ii) Αν $\underline{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \Rightarrow p(A)\underline{x} = \underline{0}$ και $q(A)\underline{x} = \underline{0}$. Επομένως από την $(*)$ έχουμε ότι $\underline{x} = 0 \Rightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\underline{0}\} \Rightarrow \mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ γραμμικά ανεξάρτητοι. Από την $(*)$ προκύπτει ότι κάθε $\underline{x} \in \mathcal{X}$ μπορεί να γραφεί σαν $\underline{x} = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$ όπου ~~$\underline{x}$~~ $\underline{x}_1 \in \mathcal{R}(p(A))$ και $\underline{x}_2 \in \mathcal{R}(q(A))$, δηλ. $\mathcal{X} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

(iii) $p(A)\underline{x} = 0 \Rightarrow A\,p(A)\underline{x} = p(A)A\underline{x} = 0$. Επομένως $x \in \mathcal{N}(p(A)) = \mathcal{V} \Rightarrow Ax \in \mathcal{N}(p(A)) = \mathcal{V}$ και επομένως ο $\mathcal{V}$ είναι A-αναλλοίωτος. Παρόμοια για τον υπόχωρο $\mathcal{W}$.

(iv) Χρησιμοποιούμε τό παρακάτω Λήμμα πού αποδεικνύεται στό τέλος της απόδειξης. Έστω $\alpha = \chi_{A|\mathcal{V}}$. Τότε (α, q) σχετικά πρώτα: Γιατί αν $\alpha(\lambda) = 0$, τότε $\exists\, \underline{x} \in \mathcal{V}, \underline{x} \neq \underline{0}$: $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$. Επομένως $p(A)\underline{x} = p(\lambda)\underline{x} = 0 \Rightarrow p(\lambda) = 0$ $\Rightarrow q(\lambda) \neq 0$ (αφού (p,q) σχ. πρώτα).
Αφού $\alpha | \chi_A$, $q | \chi_A$ και (α, q) σχετικά πρώτα τό Λήμμα (επόμενο) συνεπάγεται ότι $\alpha q | \chi_A$ ή $\alpha q | pq$. και εφόσον (q,p) σχ. πρώτοι έχουμε ότι $\alpha | p$. Παρόμοια συμπεραίνουμε ότι $\beta := \chi_{A|\mathcal{W}}$ διαιρεί τό q. Αφού $\deg(\alpha\beta) = \deg(pq) = n$ καί όλα τά πολυώνυμα είναι monic έχουμε ότι $\alpha = p$ καί $\beta = q$. □

Λήμμα: Αν $p, q, r \in \mathbb{R}[s]$, $p | r$, $q | r$ καί (p,q) σχετικά πρώτα, τότε $pq | r$.

Απόδειξη: Έστω $u, v \in \mathbb{R}[s]$: $up + vq = 1$. Τότε $pq | vqr$ και $pq | upr$, επομένως $pq | vqr + upr$, δηλ. $pq | r$. □

E. Συναρτήσεις Bohl.

Ορισμός: Συνάρτηση $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ πού είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $t^k e^{\lambda t}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ονομάζεται συνάρτηση Bohl. Οι αριθμοί λ πού εμφανίζονται στόν γραμμικό συνδυασμό (καί δεν απαλείφονται) λέγονται χαρακτηριστικοί εκθέτες της συνάρτησης Bohl. Τό σύνολο των χαρακτηριστικών εκθετών συνάρτησης Bohl $p(t)$ ονομάζεται τό φάσμα της συνάρτησης καί συμβολίζεται ως $\sigma(p)$.

Θεώρημα: Αν p και q συναρτήσεις Bohl, τότε $p+q$, pq, $\dot{p}$ είναι επίσης συναρτήσεις Bohl. Επίσης $\sigma(pq) \subseteq \sigma(p)+\sigma(q)$, $\sigma(p+q) \subseteq \sigma(p) \cup \sigma(q)$ και $\sigma(\dot{p}) \subseteq \sigma(p)$. Επιπλέον αν $r(t) =: \int_0^t p(\tau)\,d\tau$, τότε r είναι συνάρτηση Bohl και $\sigma(r) \subseteq \{\sigma(p) \cup \{0\}$.

Ζ. Μετασχηματισμός Laplace.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $u(t) : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ λέγεται εκθετικά φραγμένη αν $\exists M, \alpha : |u(t)| \leq M e^{\alpha t}$ $\forall t \geq 0$. Ο $\alpha \in \mathbb{R}$ λέγεται "εκθέτης φραγής" της $u(t)$. Κάθε συνάρτηση Bohl είναι εκθετικά φραγμένη.

Ορισμός: Αν $u : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ είναι εκθετικά φραγμένη συνάρτηση με εκθέτη φραγής α, τότε:

$$\hat{u}(s) = L(u)(s) := \int_0^\infty e^{-st} u(t)\,dt$$

γιά $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $u(t)$. Το ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε περιοχή του $\mathbb{C}$ της μορφής : $\mathbb{R}(s) \geq \beta > \alpha$.

Θεώρημα:

(i) Ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός, δηλ. $L(u+v) = L(u) + L(v)$, $L(\lambda u) = \lambda L(u)$. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ και εκθετικά φραγμένες συναρτήσεις u και v.

(ii) Αν $u(t)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη ($u \in C^1$) και $\dot{u}(t)$ είναι εκθετικά φραγμένη, τότε η u είναι εκθετικά φραγμένη και $L(\dot{u}) = s L(u) - u(0)$.

(iii) Αν u και v είναι εκθετικά φραγμένες, τότε η "συνέλιξη"

$$w(t) = \int_0^t u(\tau)\,v(t-\tau)\,d\tau$$

είναι εκθετικά φραγμένη και $L(w) = L(u)L(v)$.

(iv) Ο μετασχηματισμός Laplace είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, δηλ. $L(u) = L(v) \Rightarrow u = v$.

(v) Εστω u εκθετικά φραγμένη και $\hat{u} = L(u)$. Τότε $\hat{u}(s) \to 0$ καθώς $Re(s) \to \infty$.

Παράδειγμα: Εστω $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $u(t) = e^{at}$. Από τον ορισμό $\hat{u} = \dfrac{1}{s-\alpha}$. Από το προηγούμενο Θεώρημα: $\dot{u} = \alpha u \Rightarrow s\hat{u}(s) - u(0) = \alpha \hat{u} \Rightarrow (s-\alpha)\hat{u} = 1 \Rightarrow \hat{u} = 1/(s-\alpha)$. Γενικότερα, αν $u_k(t) = t^k e^{at}$ $(k \in \mathbb{N})$, $t \geq 0$, τότε $\dot{u}_k = k t^{k-1} e^{\alpha t} + \alpha t^k e^{at} \Rightarrow \dot{u}_k = k u_{k-1} + \alpha u_k \Rightarrow$ $s\hat{u}_k = k\hat{u}_{k-1} + \alpha \hat{u}_k \Rightarrow \hat{u}_k = \dfrac{k}{s-\alpha}\hat{u}_{k-1}$. Επαγωγικά: $\hat{u}_k = k!/(s-\alpha)^{k+1}$

Παράδειγμα: Η εκθετική συνάρτηση πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζεται στο επόμενο κεφάλαιο, ~~θα~~ Μπορούμε νά δείξουμε ότι γιά την πινακοσυνάρτηση e^{At}, $L(e^{At}) = (sI-A)^{-1}$, $Re(s) > \max\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. Από την ιδιότητα (iv) προηγούμενου Θεωρήματος ισοδύναμος ορισμός της e^{At} είναι μέσω αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace, δηλ. $e^{At} = L^{-1}((sI_n - A)^{-1})$, $t \geq 0$.

Θεώρημα: Μία εκθετικά φραγμένη συνάρτηση ~~[illegible]~~ είναι συνάρτηση Bohl αν καί μόνο αν $L(u)$ είναι ρητή συνάρτηση, δηλ πηλίκο δύο πολυωνύμων.

Απόδειξη: Από τό προηγούμενο παράδειγμα $L(t^k e^{at}) = k!/(s-\alpha)^{k+1}$ πού είναι ρητή συνάρτηση. Επομένως, λόγω γραμμικότητας, κάθε συνάρτηση Bohl έχει ρητό μετασχηματισμό Laplace. Αντίστροφα, έστω ότι u είναι εκθετικά φραγμένη καί $\hat{u}$ ρητή συνάρτηση. Από προηγούμενο Θεώρημα (v), ~~ο~~ $\hat{u}(s) \to 0$ καθώς $Re(s) \to \infty$, δηλ ο βαθμός τού αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό τού πολυωνύμου στον παρονομαστή. Συνεπώς, η $\hat{u}(s)$ γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός κλασμάτων της μορφής $c(s-a)^{-k}$, $c\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$. Κάθε όρος ~~του~~ τού αθροίσματος αυτού είναι μετασχηματισμός Laplace συνάρτησης Bohl (της μορφής $ct^{k-1}/(k-1)!$) καί επομένως τό ίδιο ισχύει γιά τόν γραμμικό συνδιασμό τους. $\square$

<u>Θεώρημα</u>: Τά στοιχεία της συνάρτησης e^{At}, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, είναι συναρτήσεις Bohl. Οί χαρακτηριστικοί εκθέτες είναι οι ιδιοτιμές του A. (Κάθε ιδιοτιμή εμφανίζεται ως χαρακτηριστικός εκθέτης σέ κάποιο στοιχείο του e^{At}.)

<u>Απόδειξη</u>: ~~Αφού~~ Από προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ότι:

$$e^{At} = L^{-1}((sI-A)^{-1})$$

ή

$$L(e^{At}) = (sI-A)^{-1}, \quad Re(s) \geq \max\{Re(\lambda),\ \lambda\in\sigma(A)\}$$

Επομένως: $L(e^{At}) = \dfrac{\operatorname{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)} = \dfrac{B(s)}{\det(sI-A)}$

καί $L((e^{At})_{ij}) = \dfrac{b_{ij}(s)}{\det(sI-A)} = \dfrac{b_{ij}(s)}{\chi_A(s)}$.

Έχουμε $\deg(b_{ij}(s)) < \deg(\det(sI-A)) = n$ καί από τό προηγούμενο Θεώρημα $(e^{At})_{ij}$ είναι συνάρτηση Bohl γιά κάθε $i=1,2,\dots n$ και $j=1,2,\dots n$. Εφόσον τό πολυώνυμο $\chi_A(s)$ εμφανίζεται στόν παρονομαστή κάθε στοιχείου της $(sI-A)^{-1}$, οι χαρακτηριστικοί εκθέτες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. $\square$.

H. <u>Νόρμες, Συνέχεια, Παράγωγοι</u>

Αν $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ η Ευκλείδια νόρμα του $\underline{x}$ ορίζεται ως: $\|x\| = \sqrt{x^Tx} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ καί ικανοποιεί τίς ιδιότητες: (i) $\|\underline{x}\|=0 \Leftrightarrow \underline{x}=0$, (ii) $\|\alpha\underline{x}\| = |\alpha|\,\|x\|$ $\forall \underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$, (iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall \underline{x},\underline{y}\in\mathbb{R}^n$ (τριγωνική ανισότητα). Επίσης ισχύει η ανισότητα

Cauchy-Schwarz: $|x^Ty| \le \|x\|\cdot\|y\|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$. Η Ευκλείδια νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ "επάγει" την φασματική νόρμα πινάκων $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$!

$$\|A\| = \max\{\|Ax\| : \|x\|=1\} = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x\neq 0\right\}$$
$$\left(= \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1(A^TA)}\right)$$

Η φασματική νόρμα έχει τις ιδιότητες (όπως κάθε νόρμα): (i) $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$, (ii) $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$ $\forall A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και (iii) $\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$ $\forall A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Επιπλέον $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$ και $\|Ax\|\le\|A\|\,\|x\|$. (υπο-πολλαπλασιαστική ιδιότητα).

Αν $r>0$ και $x_0\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε $B_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x-x_0\|<r\}$ (ανοικτή σφαίρα με κέντρο x_0 και ακτίνα r). Το σημείο $x\in S\subseteq\mathbb{R}^n$ λέγεται εσωτερικό σημείο του S αν $\exists r>0$: $B_r(x)\subseteq S$, διαφορετικά το x είναι (συν)οριακό σημείο του S. Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του S καλείται εσωτερικό (int S) του S. Το S είναι ανοικτό αν $S=\text{int}(S)$ και κλειστό αν $\mathbb{R}^n\setminus S$ είναι ανοικτό. Το $S\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένο αν $S\subseteq B_r(0)$ για κάποιο $r>0$. Το S είναι συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο (πάντα $S\subseteq\mathbb{R}^n$).

Η ακολουθία $(x_1,x_2,\dots)$, $x_k\in\mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $x\in\mathbb{R}^n$ αν $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\|x_k-x\|<\varepsilon$ $\forall k\ge N$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $x_k\to x$ ή $\lim x_k = x$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_k), $f_k: D\to\mathbb{R}^m$ συγκλίνει (κατά σημείο) στην $f: D\to\mathbb{R}^m$ αν η $(f_1(x), f_2(x),\dots)$ συγκλίνει στην $f(x)$ για κάθε $x\in D$. Η ακολουθία (f_k) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}$: $\|f_k(x)-f(x)\|<\varepsilon$ $\forall k\ge N$ και $x\in D$ (ο N δεν εξαρτάται από το x). Η συνάρτηση $f: D\to\mathbb{R}^m$, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι συνεχής στο $x_0\in D$ αν $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$ $\forall x\in B_\delta(x_0)\cap D$. Η f είναι συνεχής (στο D) αν είναι συνεχής $\forall x_0\in D$. Αν $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$: $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$ $\forall x,x_0\in D$ με $\|x-x_0\|<\delta$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο D. (το δ δεν εξαρτάται από τα x, x_0).

Είναι γνωστό ότι αν $D \to \mathbb{R}^m$ συνεχής στο D και D συμπαγές, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο D και φραγμένη στό D (δηλ. $\exists M > 0 : \|f(x)\| \leq M \quad \forall x \in D$).

Τό σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $D \to \mathbb{R}^m$ συμβολίζεται ως $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$. Γιά κάθε $k \in \mathbb{N}_*$ ορίζουμε ως $C^k(D, \mathbb{R}^m)$ τό σύνολο των συναρτήσεων f γιά τις οποίες:

$$\frac{\partial^j f_\ell}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} \in C(D, \mathbb{R})$$

γιά $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = j$, $j = 1, 2, \ldots k$ και $\ell = 1, 2, \ldots, m$. Αν $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$ τότε η f λέγεται C^k-συνάρτηση. Ειδικότερα συνάρτηση $f \in C^1$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλ. παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Ο Ιακωβιανός πίνακας συνάρτησης C^1, $\underline{f} : D \to \mathbb{R}^m$ στό σημείο $\underline{x}_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως:

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$