Ύπαρξη και Μοναδικότητα λύσης

1. Προκαταρκτικά

1.1 Διανυσματικοί χώροι με νόρμα

Ορισμός: Νόρμα σε διανυσματικό χώρο $(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ είναι συνάρτηση: $\|\cdot\| : \mathcal{V} \to \mathcal{R}$ με τις εξής ιδιότητες: (i) $\forall v \in \mathcal{V}$, $\|v\| \geq 0$ και $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$. (ii) $\forall v \in \mathcal{V}$, $a \in \mathbb{R}$, $\|av\| = |a|\|v\|$, και (ii) $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}$, $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Παράδειγμα (Χρήσιμες νόρμες στον $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$): (i) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (νόρμα-1). (ii) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ (νόρμα-2 η Ευκλείδια νόρμα). (iii) $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p}$ (νόρμα-p, $1 \leq p < \infty$). $\|x\| = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$ (νόρμα-∞).

Οι ιδιότητες (i) και (ii) στον ορισμό προκύπτουν εύκολα. Θα δείξουμε την τριγωνική ανισότητα γιά τις νόρμες (i)-(iv) στο Παράδειγμα. Παρόλο πού η νόρμα 1 και η νόρμα 2 είναι ειδικές περιπτώσεις της νόρμας p (και $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ καθώς $p \to \infty$) τις εξετάζουμε ξεχωριστά.

(i) Νόρμα 1:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

(ii) Νόρμα 2: Αποδεικνύουμε πρώτα την ανισότητα Cauchy-Schwartz: $|x^T y| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$: Έστω $x \neq 0$ και $y \neq 0$ διαφορετικά η ανισότητα είναι προφαν΄ς. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$0 \leq \|x - \lambda y\|_2^2 = (x - \lambda y)^T (x - \lambda y) = \|x\|_2^2 - 2\lambda x^T y + \lambda^2 \|y\|_2^2$$

Ο όρος δεξιά ελαχιστοποιείται όταν

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\|x\|_2^2 - 2\lambda x^T y + \lambda^2 \|y\|_2^2\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda^* = \frac{x^T y}{\|y\|_2^2}$$

Άρα,

$$0 \leq \|x - \lambda^* y\|_2^2 = \|x\|_2^2 - \frac{(x^T y)^2}{\|y\|_2^2} \Rightarrow |x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

Η τριγωνική ανισότητα προκύπτει άμεσα:

$$\begin{aligned}\|x + y\|_2^2 = (x + y)^T (x + y) = \|x\|_2^2 + 2x^T y + \|y\|_2^2 &\leq \|x\|_2^2 + 2|x^T y| + \|y\|_2^2 \\ \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 &\leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2\end{aligned}$$

και επομένως: $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

(iii) Νόρμα μεγίστου (νόρμα ∞):

$$\|x + y\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i + y_i| \leq \max_{i=1,2,\ldots,n} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i| + \max_{i=1,2,\ldots,n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

(iii) Νόρμα p $(1 \leq p < \infty)$

Λήμμα (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου): Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $0 < t < 1$, τότε $\alpha^t \beta^{-1-t} \leq t\alpha + (1 - t)\beta$.

Απόδειξη: Η ανισότητα είνα προφανής αν $\alpha = 0$ η $\beta = 0$ οπότε υποθέτουμε ότι $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Η συνάρτηση $f(t) = \ln(t)$, $t > 0$, είναι κοίλη ($f''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$) και επομένως: $f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$ για κάθε $x, y > 0$, $0 < t < 1$. Άρα

$$\ln(t\alpha + (1 - t)\beta) \geq t\ln(\alpha) + (1 - t)\ln(\beta) \Rightarrow t\alpha + (1 - t)\beta \geq e^{t\ln(\alpha) + (1-t)\ln(\beta)} = \alpha^t \beta^{1-t}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Πρόταση (Ανισότητα Holdrer): Έστω $1 \leq p, q \leq \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (όπου συμβατικά $1/\infty = 0$). Τότε για $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |x_i|^p} \sqrt[q]{\sum_{j=1}^{n} |y_i|^q}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εύκολη αν $(p, q) = (1, \infty)$, οπότε υποθέτουμε ότι $1 < p, q < \infty$. Υποθέτουμε επίσης ότι $x \neq 0$ και $y \neq 0$, οπότε $\|x\|_p > 0$ και $\|y\|_q > 0$. Έστω,

$$\alpha_j = \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} \ \text{ και } \ \beta_j = \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}, \ \ j = 1, 2, \ldots, n$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου:

$$|x_j y_j| = |x_j||y_j| = \alpha_j^{1/p} \|x\|_p \cdot \beta_j^{1/q} \|y\|_q = \|x\|_p \|y\|_q \alpha_j^t \beta_j^{1-t}$$

όπου $t = \frac{1}{p}$, $1 - t = \frac{1}{q}$. Επομένως,

$$|x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q (t\alpha_j + (1-t)\beta_j)$$

πού συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned}
|x^T y| = \left| \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right| &\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q \left(t \sum_{j=1}^{n} \alpha_j + (1-t) \sum_{j=1}^{n} \beta_j \right) \\
&\leq \|x\|_p \|y\|_q \left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} \beta_j \right] \leq \|x\|_p \|y\|_q \left[\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q} \right] \\
&\leq \|x\|_p \|y\|_q \left[\frac{1}{p} \frac{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q}{\|y\|_q^q} \right] \leq \|x\|_p \|y\|_q \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right] = \|x\|_p \|y\|_q
\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Λήμμα (Τριγωνική ανισότητα p-νόρμας - Ανισότητα Minkowski): Έστω $1 \leq p \leq \infty$. Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$, τότε $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Απόδειξη: Η απόδειξη έχει ήδη γίνει για $p = 1$ και $p = \infty$ οπότε υποθέτουμε ότι $1 < p < \infty$. Θέτουμε $q = \frac{p}{p-1}$ (οπότε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Γιά κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$|x_j + y_j|^p = |x_j + y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \leq (|x_j| + |y_j|) \cdot |x_j + y_j|^{p-1}$$

Από την ανισότητα Holder:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n} (|x_j| + |y_j|) \cdot |x_j + y_j|^{p-1} = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1}$$

Έστω

$$z = \begin{bmatrix} |x_1| & |x_2| & \ldots & |x_n| \end{bmatrix}^T, \ \ w = \begin{bmatrix} |x_1 + y_1|^{p-1} & |x_2 + y_2|^{p-1} & \ldots & |x_n + y_n|^{p-1} \end{bmatrix}^T$$

Τότε

$$|z^T w| \leq \|z\|_p \|w\|_q \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \leq \|x\|_p \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \leq \|y\|_p \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

Άρα,

$$\|x+y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

Όμως

$$(p-1)q = (p-1)\frac{p}{p-1} = p$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &\leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p} \right)^{1/q} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p} \right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{q}} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \Rightarrow \|x+y\|_p^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ορισμός: Διανυσματικός χώρος $(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ εφοδιασμένος με νόρμα $\|\cdot\|$ συμβολίζεται ως $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Η ανοικτή σφαίρα στον $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ με κέντρο $v \in \mathcal{V}$ και ακτίνα r είναι το σύνολο: $B_r(v) = \{x \in \mathcal{V} : \|x - v\| < r\}$. Ένα σύνολο $S \subset \mathcal{V}$ είναι φραγμένο αν $S \subseteq B_r(0)$ γιά κάποιο $r \geq 0$. Γενικά, κάθε σφαίρα $B_r(v)$ είναι φραγμένη αφού $B_r(v) \subseteq B_{\|v\|+r+1}(0)$.

Ορισμός: Η ακολουθία (v_i) στον $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ συγκλίνει στο $v \in \mathcal{V}$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\|v_i - v\| < \epsilon$ για κάθε $n \geq N$. Γράφουμε $v_i \to v$ η $\lim v_i = v$.

Ορισμός: Έστω $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Το σύνολο $K \subset \mathcal{V}$ είναι κλειστό αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία, δηλαδή αν για κάθε ακολουθία $v_i \in K$, $v_i \to v \in \mathcal{V}$, τότε $v \in K$. Το K είναι ανοικτό αν $\mathcal{V} \setminus K$ κλειστό. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, το K είναι συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Στην συνέχεια εξετάζουμε συναρτήσεις της μορφής: $f : (\mathcal{U}, \mathbb{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{U}}) \to (\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$.

Ορισμός: Η f είναι συνεχής στο σημείο $u \in \mathcal{U}$ αν και μόνο αν γιά κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, u)$ τέτοια ώστε $\|u - x\|_{\mathcal{U}} < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(x)\|_{\mathcal{V}} < \epsilon$. Η f είναι συνεχής στο $\mathcal{U}$ αν είναι συνεχής σε κάθε $u \in \mathcal{U}$.

Λήμμα: Η νόρμα $\|\cdot\|$ ως συνάρτηση μεταξύ των χώρων $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$ και $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεχής στον χώρο $\mathcal{V}$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό συνέχειας στο σημείο $x_0 \in \mathcal{V}$ πρ·επει να δείξουμε ότι:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|x_0\|| < \epsilon$$

Από την τριγωνική ανισότητα:

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| \Rightarrow \|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\|$$

Παρόμοια

$$\|x_0\| = \|x_0 - x + x\| \leq \|x - x_0\| + \|x\| \Rightarrow \|x_0\| - \|x\| \leq \|x - x_0\|$$

Άρα:

$$|\|x| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\|$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγοντας $\delta = \epsilon$:

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\|x| - \|x_0\|| < \epsilon$$

και επομένως η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι συνεχής συνάρτηση στο x_0. Εφόσον x_0 αυθαίρετο, η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι συνεχής συνάρτης στο $\mathcal{V}$. $\square$

Ορισμός (Ισοδύναμες νόρμες): Έστω χώρος $(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ με δύο νόρμες $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$. Λέμε ότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες ($\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$) αν (και μόνο αν) υπάρχουν $m, M > 0$, έτσι ώστε:

$$m\|v\|_\alpha \leq \|v\|_\beta \leq M\|v\|_\alpha$$

γιά κάθε $v \in \mathcal{V}$.

Παράδειγμα: Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και οι νόρμες $\|x\|_1$ και $\|x\|_\infty$ όπως ορίστηκαν παραπάνω. Τότε:

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

και

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i| \right) = n \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i| = n\|x\|_\infty$$

Επομένως:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Επίσης:

$$\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \leq n\|x\|_1$$

και επομένως $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty \Leftrightarrow \|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$.

Άσκηση: Έστω $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$ δύο νόρμες στον $(\mathcal{V}, \mathbb{R})$. Δείξτε ότι (i) $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$ αν και μόνο αν $\|\cdot\|_\beta \sim \|\cdot\|_\alpha$. (ii) Δείξτε επίσης ότι αν $\|\cdot\|_\gamma$ είναι επίσης νόρμα στον $(\mathcal{V}, \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$ και $\|\cdot\|_\beta \sim \|\cdot\|_\gamma$, τότε ισχύει και ότι $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\gamma$.

Λήμμα: Έστω $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$ στον χώρο $(\mathcal{V}, \mathbb{R})$. Τότε, μία ακολουθία $(v_i) \subseteq \mathcal{V}$ συγκλίνει στο $v \in \mathcal{V}$ στον χώρο $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|_\alpha)$ αν και μόνο αν συγκλίνει στο v στον χώρο $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|_\beta)$.

Έστω ότι $v_i \to v \in \mathcal{V}$ ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\alpha$. Τότε:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \|v_n - v\|_\alpha < \epsilon \; \forall n \geq N$$

Απο την ισοδυναμία: $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$ υπάρχουν $m, M > 0$ τέτοια ώστε:

$$m\|v\|_\alpha \leq \|v\|_\beta \leq M\|v\|_\alpha, \; \forall v \in \mathcal{V}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N} : \|v_n - v\|_\alpha < \frac{\epsilon}{M}$ $\forall n \geq N_1$. Τότε γιά το ίδιο N_1:

$$\|v_n - v\|_\beta \leq M\|v_n - v\|_\alpha < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon \ \ \forall n \geq N_1$$

και επομένως $v_n \to v$ και ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\beta$. Το αντίστροφο αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. $\square$

Θεώρημα: Κάθε δύο νόρμες σε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη: Έστω $\|\cdot\|_\alpha$ και $\|\cdot\|_\beta$ δύο νόρμες που ορίζονται στον $(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ και έστω $\{v_i\}_{i=1}^n$ βάση του $\mathcal{V}$. Γιά αυθαιρετο $x \in \mathcal{V}$ έχουμε $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$, για κάποια $\xi_i \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε,

$$\|x\|_\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι $\|\cdot\|_\alpha : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$ είναι νόρμα στον $(\mathcal{V}, \mathbb{R})$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι γιά κάθε νόρνα $\|\cdot\|_\beta$ στον $(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ έχουμε $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$, δηλαδή ότι υπάρχουν $m, M > 0$, τέτοια ώστε $m\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq M\|x\|_\alpha$ γιά κάθε $x \in \mathcal{V}$. Από τις ιδιότητες ορισμού νόρμας:

$$\|x\|_\beta = \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i v_i\right\|_\beta \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i|\|v_i\|_\beta \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \|v_i\|_\beta^2} := M\|x\|_\alpha$$

όπου ορίσαμε $M = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|v_i\|_\beta^2}$ και χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwartz. Έστω η συνάρτηση $f(a) = \|\sum_{i=1}^n a_i v_i\|_\beta$. Η $f : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι συνεχής: Πράγματι, αν $a, a' \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
|f(a) - f(a')| &= \left|\left\|\sum_{=1}^n a_i v_i\right\|_\beta - \left\|\sum_{i=1}^n a'_i v_i\right\|_\beta\right| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^n (a_i - a'_i)v_i\right\|_\beta \leq \sum_{i=1}^n |a_i - a'_i|\|v_i\|_\beta \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - a'_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \|v_i\|_\beta^2} = M\|a - a'\|_2
\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$ και $\epsilon > 0$, αν επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, τότε:

$$\|a - a'\|_2 < \delta \Rightarrow |f(a) - f(a')| < M\delta = M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

και η f είναι συνεχής.

Έστω $S = \{a \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1\}$. Το σύνολο S είναι κλειστό και φραγμένο στον $\mathbb{R}^n$, άρα συμπαγές στον $\mathbb{R}^n$, και επομένως έχει ελάχιστο στοιχείο, $m := f(a^*)$, για κάποιο $a^* \in S$ (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Τότε, γιά κάθε $x \in \mathcal{V}$, $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, έχουμε:

$$\|x\|_\beta = \left\|\sum_{i=1}^n \xi_i v_i\right\|_\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \cdot \left\|\sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}} v_i\right\|_\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \cdot \left\|\sum_{i=1}^n a_i v_i\right\|_\beta$$

όπου $a_i = \frac{\xi_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Επομένως,

$$\|x\|_\beta = \|x\|_\alpha f(a) \geq \|x\|_\alpha \min_{a \in S} f(a) = \|x\|_\alpha f(a^*) = m\|x\|_\alpha$$

Επομένως έχουμε γιά κάθε $x \in \mathcal{V}$:

$$m\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq M\|x\|_\alpha$$

και επομένως $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$. □

Παρεμφερές με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass είναι και το παρακάτω:

Θεώρημα: Έστω (x_n) ακολουθία που περιέχεται σε συμπαγές υποσύνολο χώρου $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Τότε η ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης. (Υπενθύμηση: x_0 είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας (x_n) αν $x_{n_k} \to x_0$ γιά κάποια υπακολουθία (x_{n_k}).

Ορισμός: Η ακολουθία $(x_k) \in \mathcal{X}$ λέγεται ακολουθία Cauchy αν $\|x_k - x_m\| \to 0$ καθώς $k, m \to \infty$ (δηλ., για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x_k - x_m\| < \epsilon$ γιά κάθε $k, m > N$.

Ορισμός: Ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy που περιέχεται στον $\mathcal{X}$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του $\mathcal{X}$. Πλήρης διανυσματικός χώρος με νόρμα λέγεται χώρος Banach.

Παράδειγμα: Ορίζουμε το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, το οποίο συμβολίζεται με $C[a, b]$ (η $C^0[a, b]$). Το σύνολο είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ (με πράθεις $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$, $(ax)(t) = ax(t)$, ορίζοντας ως 0 την συνάρτηση που είναι ταυτοτικά ίσϑ με 0 στο $[a, b]$, κλπ). Αν $x \in C^0[a, b]$, ορίζουμε την νόρμα

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a,b]} \|x(t)\|$$

όπου η νόρμα $\|\cdot\|$ δεξιά είναι οποιαδήποτε p-νορμα στον $\mathbb{R}^n$ ($p = 2$ για ευκολία). Προκύπτει άμεσα ότι: $\|x\|_C \geq 0$ και ότι $\|x\|_C = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Η τριγωνική ανισότητα ισχύει επίσης:

$$\|x + y\|_C = \max_{t \in [a,b]} \|x(t) + y(t)\| \leq \max_{t \in [a,b]} \|x(t)\| + \max_{t \in [a,b]} \|y(t)\| = \|x\|_C + \|y\|_C$$

Επίσης έχουμε για $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|\lambda x\|_C = \max_{t \in [a,b]} \|\lambda x(t)\| = |\lambda| \max_{t \in [a,b]} \|x(t)\| = |\lambda| \|x\|_C$$

και επομένως $(C^0([a, b], \mathbb{R}, \|\cdot\|_C$ είναι διανυσματικός χώρος με νόρμα. Επιπλέον είναι πλήρης (χώρος Banach), όπως δείχνουμε παρακάτω:

(i) Σύγκλιση κατά σημείο: Έστω (x_k) ακολουθία Cauchy με όρους στον $C^0[a, b]$. Γιά κάθε $t \in [a, b]$:

$$\|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \|x_k - x_m\|_C \to 0 \;\; \text{καθώς} \;\; k, n \to \infty$$

και άρα η ακολουθία $x_k(t)$ είναι ακολουθία Cauchy (στον $\mathbb{R}^n$). Αλλά στον $\mathbb{R}^n$ κάθε νόρμα είναι πλήρης αφού σύγκλιση σε νόρμα συνεπάγεται σύγκλιση κάθε στοιχείου και αφού ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης. Άρα, γιά κάθε $t \in [a, b]$ υπάρχει $x(t) \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $x_k(t) \to x(t)$ που αποδεικνύει σύγκλιση (κατά σημείο). Ορίζουμε ώς x την συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε $t \in [a, b]$ το όριο της ακολουθίας $x_k(t)$.

(ii) Ομοιόμορφη σύγκλιση $x_k \to x$ στο διάστημα $[a, b]$: Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, δηλ. ότι γιά κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|x_k(t) - x(t)\| < \epsilon$ γιά κάθε $k > N$ (με N ανεξάρτητο από $t \in [a, b]$).

Έστω $\epsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x_k - x_m\|_C < \frac{\epsilon}{2}$ για $k, m > N$. Τότε, για $k > N$:

$$\begin{aligned}
\|x_k(t) - x(t)\| &= \|x_k(t) - x_m(t) + x_m(t) - x(t)\| \\
&\leq \|x_k(t) - x_m(t)\| + \|x_m(t) - x(t)\| \\
&\leq \|x_k - x_m\|_C + \|x_m(t) - x(t)\|
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της ανισότητας είναι μικρότερος του $\frac{\epsilon}{2}$ γιά κάθε $k, m > N$. Επιλέγοντας $m = m(\epsilon, t)$ αρκούντως μεγάλο, ο δεύτερος όρος είναι επίσης μικρότερος από $\frac{\epsilon}{2}$. Άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται μόνο από το ϵ), τέτοιος ώστε: $\|x_k(t) - x(t)\| < \epsilon$ γία κάθε $k > N$ και $t \in [a, b]$. (Το $t \in [a, b]$ ήταν αυθαίρετο και η επιλογή του N ήταν ανεξάρτητη του $t \in [a, b]$). Άρα $x_k \to x$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

(iii) Η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$: Θα δείξουμε ότι γιά κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|t - t_0| < \delta$ και $t \in [a, b]$ συνεπάγονται ότι $\|x(t) - x(t_0)\| < \epsilon$. Έχουμε:

$$\|x(t) - x(t_0)\| \leq \|x(t) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x_k(t_0)\| + \|x_k(t_0) - x(t_0)\|$$

Έστω $\epsilon > 0$. Εφόσον $x_k \to x$ ομοιόμορφα, μπορούμε να επιλέξουμε $N_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\|x(t) - x_k(t)\| < \frac{\epsilon}{3} \ \ \textit{και} \ \ \|x(t_0) - x_k(t_0)\| < \frac{\epsilon}{3} \ \text{ γιά } \ k > N_1$$

Επίσης, εφόσον η x_k είναι συνεχής υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|x_k(t) - x_k(t_0)\| < \frac{\epsilon}{3}$ αν $|t - t_0| < \delta$ και $t \in [a, b]$. Άρα, $t \in B_\delta(t_0) \cap [a, b] \Rightarrow \|x(t) - x(t_0)\| < \epsilon$ και εφόσον $\epsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο η x είναι συνεχής στο $[a, b]$, δυλαδή $x \in C^0([a, b])$.

(iv) $x_k \to x$ ως προς την νόρμα $\| \cdot \|_C$: Προκύπτει λόγω ομοιόμορφης συνέχειας:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \|x_k(t) - x(t)\| < \epsilon \ \ \forall k \geq N, \forall t \in [a, b]$$

Ισοδύναμα:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \max_{t \in [a,b]} \|x_k(t) - x(t)\| < \epsilon \ \ \forall k \geq N$$

η

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \|x_k - x\|_C < \epsilon \ \ \forall k \geq N$$

και επομένως $x_k \to x$ ως προς την νόρμα $\| \cdot \|_C$.

Επομένως πράγματι ο $(C^0[a, b], \mathbb{R}, \| \cdot \|_C)$ είναι χώρος Banach. □

Θεώρημα: Ο χώρος $(C(E), \mathbb{R}, \| \cdot \|_C)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : E \to \mathbb{R}^n$ όπου $\| \cdot \|_C$ η sup-νόρμα ($\mathcal{L}_\infty$-νόρμα) και E συμπαγές σύνολο είναι πλήρης.

Απόδειξη: Έστω (f_n) ακολουθία Cauchy συναρτήσεων στον χώρο $(C(E), \mathbb{R}, \|\cdot\|_C)$. Πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει σε συνεχή συνάρτηση $f^* \in (C(E), \mathbb{R}, \| \cdot \|_C)$. Έστω $x_0 \in E$. Θα δείξουμε αρχικά ότι η ακολουθία $(f_n(x_0))$ συγκλίνει (ως ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$). Εφόσον εξ' υποθέσεως η ακολουθία (f_n) είναι Cauchy:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow \|f_n(x_0) - f_m(x_0)\| \leq \|f_n - f_m\|_C < \epsilon$$

και επομένως $(f_n(x_0))$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}^n$. Κάθε ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη και επομένως ανήκει σε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass η ακολουθία έχει σημείο συσσώρευσης, δηλ. υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $f_{n_k}(x_0) \to f^*(x_0)$ καθώς $n_k \to \infty$. Ειδικότερα, η ακολουθία η ίδια συγκλίνει σε αυτό το όριο, γιατί αν $n \geq N(\epsilon)$,

$$\|f_n(x_0) - f^*(x_0)\| \leq \|f_n(x_0) - f_{n_k}(x_0)\| + \|f_{n_k}(x_0) - f^*(x_0)\| < 2\epsilon$$

εφόσον $n_k \geq n$ γιά υπακολουθία. Επιπλέον, εφόσον το N εξαρτάται μόνο απο το ϵ έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση.

Ορίζουμε συνάρτηση $f^* : E \to \mathbb{R}^n$ ως το όριο που ορίσαμε παραπάνω γία κάθε $x \in E$. Εφόσον το E είναι συμπαγές, κάθε συνάρτηση f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής. (Άσκηση: Αν $f : E \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής και E συμπαγές, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής). Επομένως γιά κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\epsilon) > 0$ έτσι ώστε

$\|f_n(x) - f_n(y)\| < \epsilon$ γιά κάθε $x, y \in E$ με $\|x - y\| < \delta$. Επιλέγοντας $N(\epsilon)$ όπως προηγουμένως έχουμε για $n \geq N$:

$$\|f^*(x) - f^*(y)\| \leq \|f^*(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f^*(y)\| < 5\epsilon$$

Εφόσον η ανισότητα ισχύει για κάθε $\hat{\epsilon} = 5\epsilon > 0$ η f^* είναι (ομοιόμορφα) συνεχής. □

Πόρισμα: Κλειστό υποσύνολο πλήρους χώρου με νόρμα είναι πλήρες.

Απόδειξη: Έστω (f_n) ακολουθία Cauchy συναρτήσεων $f_n \in \mathcal{Y} \subseteq X$ όπου $\mathcal{X}$ πλήρης χώρος με νόρμα. Τότε, $f_n \to f^* \in \mathcal{X}$. Εφόσον f^* είναι το όριο της (f_n) και το κλειστό σύνολο $\mathcal{Y}$ εξ' ορισμού περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσης, έχουμε $f^* \in \mathcal{Y}$ και το $\mathcal{Y}$ είναι πλήρες ως προς την νόρμα του χώρου. □

Θεώρημα (συστολής): Έστω S κλειστό υποσύνολο του χώρου Banach $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ και έστω $T : S \to S$. Έστω ότι:

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \rho\|x - y\| \;\; \forall\, x, y \in S, \;\; 0 \leq \rho < 1$$

Τότε: (i) Υπάρχει μοναδικό $x^* \in S$ τέτοιο ώστε $x^* = T(x^*)$ (σταθερό σημείο του T). (ii) Η ακολουθία πού ορίζεται από την εξίσωση: $x_{k+1} = T(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, όπου x_1 αυθαίρετο σημείο του S, συγκλίνει στο x^*, δηλαδή $\|x_k - x^*\| \to 0$.

Απόδειξη: Επιλέγουμε αυθαίρετο $x_1 \in S$ και ορίζουμε την ακολουθία (x_k) από την αναδρομική σχέση $x_{k+1} = T(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Εφόσον $T : S \to S$, $x_k \in S$ γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε αρχικά ότι (x_k) είναι ακολουθία Cauchy. Έχουμε:

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|T(x_k) - T(x_{k-1}\| \leq \rho\|x_k - x_{k-1}\| \leq \rho^2\|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \ldots \leq \rho^{k-1}\|x_2 - x_1\|$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|x_{k+r} - x_k\| &\leq \|x_{k+r} - x_{k+r-1}\| + \|x_{k+r-1} - x_{k+r-2}\| + \ldots + \|x_{k+1} - x_k\| \\
&\leq \left(\rho^{k+r-2} + \rho^{k+r-3} + \ldots + \rho^{k-1}\right)\|x_2 - x_1\| \\
&= \rho^{k-1}\left(1 + \rho + \ldots + \rho^{r-1}\right)\|x_2 - x_1\| \\
&\leq \rho^{k-1}\sum_{i=1}^{\infty}\rho^i\|x_2 - x_1\| = \frac{\rho^{k-1}}{1-\rho}\|x_2 - x_1\|
\end{aligned}$$

Ο όρος δεξιά τείνει στο 0 καθώς $k \to \infty$ και άρα η ακολουθία (x_k) είναι Cauchy. Εφόσον $\mathcal{X}$ είναι χώρος Banach, $x_k \to x^* \in \mathcal{X}$ καθώς $k \to \infty$. Επιπλέον, αφού S είναι κλειστό, $x^* \in S$.

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι $x^* = T(x^*)$:

$$\|x^* - T(x^*)\| \leq \|x^* - x_k\| + \|x_k - T(x^*)\| = \|x^* - x_k\| + \|T(x_{k-1}) - T(x^*)\| \leq \|x^* - x_k\| + \rho\|x_{k-1} - x^*\|$$

Στο όριο $k \to \infty$ ο όρος δεξιά γίνεται αυθαίρετα μικρός. Άρα $\|x^* - T(x^*)\| = 0 \Leftrightarrow x^* = T(x^*)$ και x^* είναι σταθερό σημείο του T.

Θα δείξουμε ότι το x^* είναι το μοναδικό σταθερο σημείο του T: Έστω x^* και y^* δύο σταθερά σημεία του T. Το΄τε:

$$\|x^* - y^*\| = \|T(x^*) - T(y^*)\| \leq \rho\|x^* - y^*\| \Rightarrow (1-\rho)\|x^* - y^*\| \leq 0 \Rightarrow \|x^* - y^*\| = 0 \Rightarrow x^* = y^*$$

και επομένως το σταθερό σημείο του T είναι μοναδικό. □

Παράδειγμα: Έστω $a > 0$ και $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, όπου $x \geq \sqrt{a}$. Έστω $\bar{x}_1 > \sqrt{a}$ και $S = [\sqrt{a}, \bar{x}_1]$ το πεδίο ορισμού της f. Έχουμε:

$$f(x) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) - \sqrt{a} = \frac{x^2 - 2\sqrt{a} + a}{2x} = \frac{(x - \sqrt{a})^2}{2x} \geq 0$$

αν $x \geq \sqrt{a}$. Έχουμε ότι $f : S \to S$. Επιπλέον η f είναι συνάρτηση συστολής στο S: Έστω $x_1, x_2 \in S$. Τότε:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) - \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_1}\right) \\ &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{a}{2}\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}\gamma(x_1, x_2)(x_1 - x_2), \quad \gamma(x_1, x_2) := 1 - \frac{a}{x_1 x_2} \end{aligned}$$

Εφόσον,

$$0 \leq \gamma(x_1, x_2) < 1 \ \text{ για } \ x_1, x_2 \in S \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

και η f είναι συνάρτηση συστολής στο S. Συνεπώς, α ακολουθία $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο της f στο S:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow 2x = \frac{x^2 + a}{x} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}$$

1.2 Διαφορίσιμες συναρτήσεις

Έστω S ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x \in S$ αν υπάρχει πίνακας $Df(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ τέτοιος ώστε:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - Df(x)h\|}{\|h\|} = 0$$

Όταν το όριο είναι καλά ορισμένο ο πίνακας $Df(x)$ (η $\frac{\partial f}{\partial x}$) είναι μοναδικός και ονομάζεται πίνακας Jacobian της f:

$$Df(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right]_{i=1,2,\ldots,m}^{j=1,2,\ldots,n}$$

Αντίστροφα, αν ο πίνακας $Df(x)$ υπάρχει, τότε όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις σε μία περιοχή (γειτονιά) του x. Λέμε ότι η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο S ($f \in C^1(S)$) αν τα στοιχεία του $Df(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο S. Αν $m = 1$ και $f : S \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη στο S, πίνακας Jacobian είναι το διάνυσμα (γραμμής):

$$Df(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} := (\nabla f(x))^T$$

και ονομάζεται και διάνυσμα κλίσης της f.

Έστω S ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}^m$, f συνεχώς διαφορίσιμη σε σημείο $x_0 \in S$, $g : A \to \mathbb{R}^k$ όπου A ανοικτό σύνολο που περιέχει την εικόνα $f(S)$ ($f(S) \subseteq A$) και g συνεχώς διαφορίσιμη στο σημείο $f(x_0)$. Τότε $h : S \to \mathbb{R}^k$, $h(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x))$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο x_0 και

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{f=f(x_0)} \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}$$

όπου οι αντίστοιχοι πίνακες Jacobian έχουν διαστάσεις:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=x_0} \in \mathbb{R}^{k \times n}, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{f=f(x_0)} \in \mathbb{R}^{k \times m} \ \text{ και } \ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Θεώρημα (μέσης τιμής στον $\mathbb{R}^n$): Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη στο ανοικτό υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$. Έστω x, y δύο σημεία του S, έτσι ώστε:

$$L(x, y) = \{z : z = \theta x + (1 - \theta)y, 0 < \theta < 1\} \subseteq S$$

Τότε, υπάρχει σημείο $z_0 \in L(x,y)$ τέτοιο ώστε:

$$f(y) - f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=z_0} (y-x)$$

Απόδειξη: Έστω $z(\theta) = (1-\theta)x + \theta z$ και $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(\theta) = f(z(\theta))$, $\theta \in [0,1]$. Τότε $g(0) = f(x)$ και $g(1) = f(y)$. Εφόσον η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε κάθε σημείο, η g είναι συνεχώς διαφορίσιμη γι·α κάθε $\theta \in [0,1]$ και $g'(\theta) = Df(z(\theta))z'(\theta)$, δηλαδή $g'(\theta) = Df(z(\theta))(y-x)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής συναρτήσεων μιάς μεταβλητής, υπάρχει $\theta_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $g(1)-g(0) = g'(\theta_0)(1-0) = g'(\theta_0)$. Άρα:

$$f(y) - f(x) = Df(z(\theta_0))(y-x) \Rightarrow f(y) - f(x) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=z_0} (y-x)$$

όπου θέσαμε $z_0 = z(\theta_0)$. □

Θεώρημα (Taylor στον $\mathbb{R}^n$): Έστω $f : D \to \mathbb{R}$ όπου D ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $f \in C^1(D)$, τότε γιά κάθε $x, y \in D$:

$$f(y) = f(x) + Df(x)(y-x) + R_1(x,y) \;\text{ όπου }\; \lim_{y\to x}\left(\frac{R_1(x,y)}{\|x-y\|}\right) = 0$$

Επιπλέον, αν $f \in C^2(D)$,

$$f(y) = f(x) + Df(x)(y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^T D^2 f(x)(y-x) + R_2(x,y) \;\text{ όπου }\; \lim_{y\to x}\left(\frac{R_2(x,y)}{\|x-y\|^2}\right) = 0$$

όπου $D^2 f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right]_{i=1,2,\dots,n}^{j=1,2,\dots,n}$.

1.3 Συναρτήσεις Lipschitz

Έστω $f : X \to Y$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $Y \subseteq \mathbb{R}^m$.

Ορισμός 1: Η συνάρτηση f λέγεται ‘Lipschitz’ αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ υπάρχει $L > 0$ τέτοιο ώστε $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ (όπου L η σταθερά Lipschitz).

Ορισμός 2: Η συνάρτηση f λέγεται ‘τοπικά Lipschitz’ αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $r = r(x) > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι Lipschitz στην περιοχή $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$. (Η σταθερά Lipschitz σε κάθε περιοχή δεν είναι απαραίτητα η ίδια).

Ορισμός 3: Η συνάρτηση f λέγεται ‘ολικά Lipschitz’ αν είναι Lipschitz σε όλο το $\mathbb{R}^n$.

Ο ορισμός επεκτείνεται σε συναρτήσεις της μορφής $f(t,x) : [t_0, t_1] \times X \to Y$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ αν προσθέσουμε τον προσδιορισμό ‘ομοιόμορφα ως προς t’, π.χ.

(α) Η $f(t,x)$ είναι Lipschitz ‘ως προς x’ στο $[t_0, t_1] \times X$ αν ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \tag{1}$$

για κάθε $t \in [t_0, t_1]$ και κάθε $x_1, x_2 \in X$ (με την ίδια σταθερά Lipschitz $L > 0$).

(β) Η συνάρτηση f είναι τοπικά Lipschitz ως προς x στο $[t_0, t_1] \times X \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $r = r(x) > 0$ τέτοιο ώστε η ανισότητα (1) να ικανοποιείται για κάθε $(t,x) \in [t_0, t_1] \times B_r(x)$ με σταθερά Lipschitz $L = L(x) > 0$.

(γ) Η f είναι τοπικά Lipschitz ‘ως προς x’ στο $[t_0, \infty] \times X$ αν είναι τοπικά Lipschitz ως προς x στο $[t_0, t_1] \times X$ για κάθε (συμπαγές) διάστημα $[t_0, t_1] \subseteq [t_0, \infty)$.

Λήμμα 1: Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση Lipschitz. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$ και L σταθετά Lipschitz της f. Επιλέγουμε $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. Τότε

$$\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < L\|x_1 - x_2\| < L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon$$

και εφόσον το δ δεν εξαρτάται από το $x \in X$ η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

Λήμμα 2: Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση τοπικά Lipschitz και $A \subseteq X$ συμπαγές. Τότε η f είναι Lipschitz στο A.

Απόδειξη: Άσκηση!

Λήμμα 3: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και κυρτό σύνολο και $f \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$. Τότε η f είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $L = \max_{x \in A} \|Df(x)\|$.

Απόδειξη: Εφόσον το A είναι κυρτό, κάθε σημείο της ευθείας

$$l(x, y) = \{\xi(s) : \xi(s) = (1 - s)x + sy, 0 \le s \le 1\}$$

ανήκει στο A. Επομένως:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(f(\xi(s))\right) ds = \int_0^1 Df(\xi(s))\xi'(s)ds = \int_0^1 Df(\xi(s))(y - x)ds$$

Εφόσον το A είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και η νόρμα του πίνακα Jacobian είναι συνεχής συνάρτηση, τότε έχει μέγιστη τιμή στο A, δηλαδή: $L = \max\{\|Df(x)\| : x \in A\}$. Επομένως,

$$\|f(y) - f(x)\| = \|\int_0^1 Df(\xi(s))(y - x)ds\| = \int_0^1 \|Df(\xi(s))\| \cdot \|y - x\|ds \le L\|y - x\|$$

και η f είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz L. □

Πόρισμα: Αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $f \in C^1(E, \mathbb{R}^m)$, τότε η f είναι τοπικά Lipschitz.

Απόδειξη: Εφόσον E ειναι ανοικτό σύνολο, τότε για κάθε $x \in E$ υπάρχει $r = r(x) > 0$ τέτοιο ώστε $\bar{B}_r(x) \subseteq E$. Εφόσον $\bar{B}_r(x)$ είναι συμπαγές και κυρτό σύνολο, η f είναι Lipschitz στο $\bar{B}_r(x)$ από το Λήμμα 3. Από τον Ορισμό 2 η f είναι Lipschitz στο E. □

2. Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

Έστω το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ):

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

όπου $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ολοκληρώνοντας η εξίσωση μετασχηματίζεται στην:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau))d\tau \tag{3}$$

Έστω ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί ως προς την συνάρτηση $x : J \to \mathbb{R}^n$ σε διάστημα $J = [t_0 - a, t_0 + a]$. Το ολοκλήρωμα δεν απαιτεί ότι η f είναι διαφορίσιμη, οπότε υποθέτουμε ότι είναι απλά συνεχής. Αν η $x(t)$ είναι λύση της (3) τότε αυτή είναι λύση του ΠΑΤ (2).

Λήμμα 1: Έστω $f \in C^0(E, \mathbb{R}^n)$ και $x \in C^0(J, E)$ είναι λύση της (3). Τότε $x \in C^1(J, E)$ και είναι λύση του ΠΑΤ (2).

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι αν x η λύση της (3), τότε $x(t_0) = x_0$. Εφόσον η x είναι συνεχής στο διάστημα J, η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε στην (3) είναι επίσης συνεχής και επομένως η συνάρτηση στο δεξιό μέλος της (3) είναι συνεχώς διαφορίσιμη (C^1) ως ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης. Από το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού η παράγωγος του δεξιού μέλους της (3) είναι $f(x(t))$, δηλαδή $x' = f(x(t))$. $\square$

Το επόμενο Θεώρημα (Picard-Lindelof) αποδεικνύει τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης με χρήση του Θεωρήματος συστολής.

Θεώρημα 1: Έστω ότι για $x_0 \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε $f : \bar{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά Lipschitz $K > 0$. Τότε το ΠΑΤ (2) έχει μοναδική λύση $x(t)$ για $t \in J = [t_0 - a, t_0 + a]$ αν $a < \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right)$ όπου $M = \max\{\|f(x)\| : x \in \bar{B}_b(x_0)\}$.

Απόδειξη: Ορίζουμε αρχικά έναν (πλήρη) χώρο με νόρμα στον οποίο εφαρμόζουμε το Θεώρημα Συστολής:

$$\mathcal{X} = (C^0(J, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|_C)$$

όπου $\|x\|_C = \max_{t\in J} \|x(t)\|$ και $\|\cdot\|$ αυθαίρετη νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε υποσύνολο του $\mathcal{X}$ από όλες τις συναρτήσεις $x(t)$ που περιέχονται στην σφαίρα $\bar{B}_b(x_0)$ για όλο το διάστημα J, δηλ. $x \in C^0(J, \bar{B}_b(x_0))$ ($x : J \to \bar{B}_b(x_0)$ και συνεχείς). Το σύνολο $\mathcal{V} := C^0(J, \bar{B}_b(x_0))$ είναι κλειστό υποσύνολο του πλήρους χώρου $\mathcal{X}$ και επομένως (από προηγούμενο αποτέλεσμα) πλήρες.

Εφόσον η f είναι Lipschitz στο $\bar{B}_b(x_0)$ είναι συνεχής και επομένως το ολοκλήρωμα $\int_{t_0}^t f(x(\tau))d\tau$ είναι συνεχής συνάρτηση του t για κάθε $x \in \mathcal{V}$ (και μάλιστα συνεχώς παραγωγίσιμη). Θα δείξουμε ότι ο τελεστής:

$$T(u) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u(\tau))d\tau$$

απεικονίζει το $\mathcal{V}$ στον εαυτό του, δηλ. $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ και ότι είναι συνάρτηση συστολής. Τότε από το Θεώρημα συστολής θα συμπεράνουμε ότι ο T έχει μοναδικό σταθερό σημείο $x^* = T(x^*)$ το οποίο από το προηγούμενο Λήμμα είναι λύση του ΠΑΤ (3) και αντίστροφα, κάθε λύση του ΠΑΤ (3) είναι σταθερό σημείο του T.

Αν $x \in \mathcal{V}$, η $T(x)$ είναι συνεχής (αφού f συνεχής) αλλά πρέπει να δείξουμε ότι $T(x) \in \mathcal{V}$. Εφόσον f συνεχής και $\bar{B}_b(x_0)$ συμπαγές, η f είναι φραγμένη στο $\bar{B}_b(x_0)$, οπότε:

$$M = \max\{\|f(x)\| : x \in \bar{B}_b(x_0\}$$

είναι καλά ορισμένο. Αν $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$:

$$\|T(x)(t) - x_0\| \le \left|\int_{t_0}^t \|f(x(\tau))\|d\tau\right| \le M|t - \tau| \le Ma$$

και εφόσον ο τελευταίος όρος δεν υπερβαίνει το b, $a \le \frac{b}{M}$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $T(x)(t) \in \bar{B}_b(x_0)$ για κάθε $t \in J = [t_0 - a, t_0 + a]$ και άρα $T(x) \in \mathcal{V}$.

Γιά να δείξουμε ότι T είναι τελεστής συστολής, έστω $x, y \in \mathcal{V}$. Εφόσον η f είναι Lipschitz,

$$\|T(x)(t) - T(y)(t)\| \le \left|\int_{t_0}^t \|f(x(\tau)) - f(y(\tau))\|d\tau\right| \le K\left|\int_{t_0}^t \|x(\tau) - y(\tau)\|d\tau\right| \le Ka\|x - y\|_C$$

όταν $t \in J$. Επομένως $\|T(x) - T(y)\|_C \le \gamma\|x - y\|_C$ όπου $\gamma = Ka < 1 \Leftarrow a < \frac{1}{K}$. Επομένως ο T είναι τελεστής συστολής αν $a < \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right)$ και επομένως απο προηγούμενο Λήμμα το (μοναδικό) σταθερο σημείο του T είναι η (μοναδική) λύση του ΠΑΤ (2). $\square$

Παρατήρηση: Η συνθήκη $a < \frac{1}{K}$ δεν είναι απαραίτητη και μιά άλλη απόδειξη (Bieleki) δίνει ικανή συνθήκη ύπαρξης και μοναδικότητας ως $a \leq \frac{b}{M}$ (άσκηση!). Στην απόδειξη ο χώρος $\mathcal{X}$ τώρα ορίζεται ως: $\mathcal{X} = (C^0(J, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|_L)$ όπου L η νόρμα Bieleki:

$$\|f\|_L = \max_{t \in J} \left(e^{-L|t-t_0|} \|f(t)\| \right)$$

και όπου $L \geq K$. Ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι ισοδύναμος με τον $(C^0(J, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|_C)$ και άρα πλήρης. Η απόδειξη είναι επίσης εφαρμογή του Θεωρήματος Συστολής.

Παράδειγμα: Έστω το ΠΑΤ: $x' = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$. Η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}_+$, $f = \sqrt{|x|}$, δεν είναι Lipschitz αν $0 \in I$ (ούτε τοπικά). Έστω $x_1 = 0$, $x_2 = \epsilon > 0$. Τότε:

$$|f(x_2) - x(x_1)| = \sqrt{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}|x_2 - x_1|$$

και επομένως για ϵ αυθαίρετα μικρό, $L := \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ είναι αυθαίρετα μεγάλο. Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες του Θερήματος δεν ισχύουν και δεν ξέρουμε αν υπάρχει μοναδική λύση. Στην συγκεκριμμένη περίπτωση δεν έχουμε μοναδικότητα: Δύο διακεκριμένες λύσεις είναι: (α) $x_1(t) = \frac{1}{4}t^2$ $(t \geq 0)$, $x_1(t) = 0$ $(t < 0)$, και (β) $x_2(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι η x_1 είναι συνεχώς διαφορίσιμη (ακόμα και στο $t = 0$).

Παράδειγμα (Εκτίμηση μέγιστου διαστήματος μέσω Θεωρήματος Picard-Lindelof): Έστω το ΠΑΤ $x' = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. Η εξίσωση λύνεται αναλυτικά. Αν $x \neq 0$,

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt + c' \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c' \Rightarrow \frac{1}{x} = c - t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{c-t}$$

Αρχική συνθήκη: $x(0) = x_0 \Rightarrow c = \frac{1}{x_0}$. Άρα, $x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}$. Παρατηρούμε ότι η λύση εκρύγνηται σε πεπερασμένο χρόνο $t = \frac{1}{x_0}$ και ότι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης είναι το $(-\infty, \frac{1}{t_0})$.

Το Θεώρημα Picard-Lindelof εγγυάται την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης σε διάστημα $J = [-a, a]$, όπου $a = \frac{b}{M}$, $M = \max\{|f(x)| : x \in \bar{B}_b(x_0)\}$. Παρατηρούμε ότι $f(x) = x^2$ είναι Lipschitz σε κάθε συμπαγές διάστημα $[x - 0 - b, x_0 + b]$. Έχουμε:

$$M = \max\{x^2 : x \in [x_0 - b, x_0 + b]\} = (x_0 + b)^2$$

Άρα $a = \frac{b}{M} = \frac{b}{(x_0+b)^2}$ και $\max a = a^* = \max_{b \geq 0} \frac{b}{(x_0+b)^2}$. Έστω $g(b) = \frac{b}{(x_0+b)^2}$. Η μέγιστη τιμή της $g(b)$ στο διάστημα $b \in [0, \infty)$ αντιστοιχεί στην λύση της εξίσωσης:

$$g'(b) = 0 \Rightarrow \frac{(x_0+b)^2 - 2b(x_0+b)}{(x_0+b)^4} = 0 \Rightarrow (x_0+b)(x_0-b) = 0 \Rightarrow b = b^* = x_0$$

και άρα $a^* = \frac{x_0}{4x_0^2} = \frac{1}{4x_0}$.

Μή αυτόνομα συστήματα: Έστω το μη αυτόνομο σύστημα $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Το σύστημα μετασχηματίζεται σε αυτόνομο αν ορίσουμε την επιπλέον μεταβλητή: $x_{n+1} = t$. Τότε $x'_{n+1} = 1$ και επομένως αν ορίσουμε: $y = (x, x_{n+1})$ και $\hat{f} = (f, 1)$ το ΠΑΤ γράφεται:

$$y' = (x', x'_{n+1}) = (f(x_{n+1}, x), 1), \quad (x(t_0), x_{n+1}(t_0)) = (x_0, t_0)$$

Επομένως το προηγούμενο Θεώρημα εφαρμόζεται αν η f είναι Lipschitz και ως προς t. Η υπόθεση αυτή είναι πολλές φορές περιοριστική αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 2 (Ύπαρξη και μοναδικότητα για μη αυτόνομα συστήματα): Έστω ότι $f(t, x) : J \times \bar{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz ως προς x με σταθερά Lipschitz $K > 0$ και συνεχής ως προς t στο διάστημα $J = [t_0 - c, t_0 + c]$. Τότε το ΠΑΤ: $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ έχει μοναδική λύση $x(t)$ στο διάστημα $[t_0 - a, t_0 + a]$, όπου αν $a < \min\left(c, \frac{b}{M}\right)$ και $M = \max\{\|f(t,x)\| : x \in \bar{B}_b(x_0), t \in J\}$.

Απόδειξη: Άσκηση.

3. Εξάρτηση από αρχικές συνθήκες: Εξετάζουμε την εξάρτηση της λύσης του ΠΑΤ: $x' = f(x), x(0) = y$ από την αρχική συνθήκη: $x(0) = y \in \mathbb{R}^n$. Γιά να δώσουμε έμφαση στην εξάρτηση της λύσης αό το y συμβολίζουμε την λύση ως: $u(t;y)$ όπου $u(0;y) = y$.

Λήμμα: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ για το οποίο υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε η $f : \bar{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz με σταθερά K. Έστω $M = \max\{\|f(x)\| : x \in \bar{B}_b(x_0)\}$. Τότε η οικογένεια λύσεων $u(t;y)$ του ΠΑΤ $x' = f(x)$, $x(0) = y$, υπάρχει και είναι μοναδική γι·α κάθε $y \in B_{b/2}(x_0)$ και $t \in J := [-a, a]$ όπου $a < \min\left(\frac{1}{K}, \frac{b}{2M}\right)$.

Απόδειξη: Ορίζουμε $\mathcal{V} = C^0(J, \bar{B}_b(x_0))$ το ς·υνολο των συνεχών συναρτήσεων $x : J \to \bar{B}_b(x_0)$. Το $\mathcal{V}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου $(C^0(J, \mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|_C)$ και άρα πλήρες. Ορίζουμε τον τελεστή: T_y, $T_y(u) = y + \int_0^t f(u(\tau))d\tau$. Έχουμε:

(α) $T_y : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$: Αν u συνεχής συνάρτηση, $\int_0^t f(u(\tau))d\tau$ συνεχής (και μάλιστα συνεχώς παραγωγίσιμη), άρα T_y συνεχής. Επίσης για κάθε $|t| < a$:

$$\begin{aligned}
\|T_y(u)(t) - x_0\| &= \left\| y + \int_0^t f(u(\tau))d\tau - x_0 \right\| \\
&\leq \|y - x_0\| + \left| \int_0^t \|f(u(\tau))\| d\tau \right| \\
&\leq \frac{b}{2} + Ma \leq b \Leftarrow a \leq \frac{b}{2M}
\end{aligned}$$

(β) T_y τελεστής συστολής: Έστω $u, v \in \mathcal{V}$. Τότε:

$$T_y(u)(t) = y + \int_0^t f(u(\tau))d\tau, \;\; T_y(v)(t) = y + \int_0^t f(v(\tau))d\tau$$

Επομένως για κάθε $|t| \leq a$:

$$\begin{aligned}
\|T_y(u)(t) - T_y(v)(t)\| &= \left\| \int_0^t \left(f(u(\tau)) - f(v(\tau))\right) d\tau \right\| \\
&\leq \left| \int_0^t \|f(u(\tau)) - f(v(\tau))\| \, d\tau \right| \\
&\leq \left| \int_0^t K\|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau \right| \\
&\leq K|t| \|u - v\|_C \leq Ka\|u - v\|_C
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\|T_y(u) - T_y(v)\|_C \leq Ka\|u - v\|_C$$

και T_y είναι συνάρτηση συστολής αν $Ka < 1 \Leftarrow a < \frac{1}{K}$.

Συνεπώς αν $a < \min\left(\frac{b}{2M}, \frac{1}{K}\right)$, $T_y : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *και* είναι συνάρτηση συστολής. Άρα έχει μοναδικό σταθερό σημείο που είναι η λύση του ΠΑΤ. □

Παρατήρηση:

(i) Η ανισότητα $a < \frac{1}{K}$ πάλι δεν είναι απαραίτητη και μπορεί να παραλειφθεί.

(ii) Το διάστημα $J = [-a, a]$ είναι το κοινό διάστημα λύσεων για κάθε ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(0) = y$ με $y \in \bar{B}_{b/2}(x_0)$.

(iii) Το Θεώρημα εγγυάται την ύπαρξη και μοναδικότητα της οικογένειας των λύσεων $u(t; y)$ σε διάστημα με το μισό μήκος από το αντίστοιχο μήκος του διαστήματος στο Θεώρημα Picard-Lindeloff.

Λήμμα (Gronwall): Έστω $g, k : [0, a] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $a > 0$, $k(t) \geq 0$ και

$$g(t) \leq G(t) := c + \int_0^t k(s)g(s)ds$$

για κάθε $t \in [0, a]$. Τότε, $g(t) \leq ce^{\int_0^t k(s)ds}$ για κάθε $t \in [0, a]$.

Απόδειξη: Εφόσον g και k συνεχείς, G συνεχώς διαφορίσιμη και $G(0) = c$. Παραγωγίζοντας,

$$G'(t) = k(t)g(t) \leq k(t)G(t) \Rightarrow G'(t) - k(t)G(t) \leq 0 \Rightarrow e^{-\int_0^t k(s)ds}G'(t) - e^{-\int_0^t k(s)ds}k(t)G(t) \leq 0$$

Επομένως,

$$\frac{d}{dt}\left(G(t)e^{-\int_0^t k(s)ds}\right) \leq 0 \Rightarrow G(t)e^{-\int_0^t k(s)ds} \leq G(0) = c$$

η

$$G(t) \leq ce^{-\int_0^t k(s)ds} \Rightarrow g(t) \leq G(t) \leq ce^{-\int_0^t k(s)ds}$$

που αποδεικνύει το Λήμμα. □

Θεώρημα (Εξάρτηση Lipschitz ως προς τις αρχικές συνθήκες): Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και έστω ότι υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε η $f : \bar{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz με σταθερά K. Έστω ότι το διάστημα $J = [-a, a]$ είναι κοινό διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας για λύσεις $u(t; y)$, $u : J \times \bar{B}_{b/2}(x_0) \to \bar{B}_b(x_0)$ του ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(0) = y$. Τότε η συνάρτηση $u(t; y)$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz ως προς y με σταθερά Lipschitz e^{Ka}.

Απόδειξη: Έστω $u(t; y)$ και $u(t; z)$ δύο λύσεις με αρχικές συνθήκες στο $\bar{B}_{b/2}(x_0)$, δηλαδή για $t \in [0, a]$

$$u(t; y) = y + \int_0^t f(u(\tau; y))d\tau, \quad u(t; z) = z + \int_0^t f(u(\tau; z))d\tau$$

Επομένως,

$$\|u(t; y) - u(t; z)\| \leq \|y - z\| + \int_0^t \|f(u(\tau; y)) - f(u(\tau; z))\|d\tau \leq \|y - z\| + K\int_0^t \|u(\tau; y) - u(\tau; z)\|d\tau$$

Από την ανισότητα Gronwall (με $c = \|y - z\|$ και $k(t) = K$), έχουμε:

$$\|u(t; y) - u(t; z)\| \leq \|y - z\|e^{Kt}$$

Άρα $u(t; y)$ είναι ομοιόμορφα Lipschitz ως προς y με σταθερά Lipschitz $L = e^{Ka}$. □

4. Μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης:

Το Θεώρημα Picarf-Lindeloff εγγυάται ότι αν η f είναι τοπικά Lipschitz υπάρχει μοναδική λύση σε κλειστό διάστημα $J = [t_0 - a, t_0 + a]$. Η εκτίμηση μπορεί να μην είναι ιδιαίτερα ακριβής και η λύση να ορίζεται σε πολύ μεγαλύτερο διάστημα.

Ορισμός: Το μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης, $J(t_0, x_0)$, είναι το μεγαλύτερο διάστημα του $\mathbb{R}$, $t_0 \in J(t_0, x_0)$, στο οποίο το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα: Εξετάζουμε πάλι το ΠΑΤ: $x' = x^2$, $x(0) = x_0$, με αναλυτική λύση $x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο του x_0: (i) $x_0 > 0$: $J = (-\infty, \frac{1}{x_0})$, (ii) $x_0 < 0$: $J = (\frac{1}{x_0}, \infty)$ και (i) $x_0 = 0$: $J = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Και στις τρεις περιπτώσεις το μεγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα (Μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης): Έστω E ανοικτό σύνολο, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : E \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz. Τότε υπάρχει μέγιστο ανοικτό διάστημα $J = (\alpha, \beta)$, $t_0 \in J$, τέτοιο ώστε το ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ να έχει μοναδική λύση $x : J \to E$.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $u(t; t_0, x_0)$ για την λύση του ΠΑΤ. Το Θεώρημα Picard-Lindeloff εγγυάται ότι σε κάθε κλειστή σφαίρα $\bar{B}_b(x_0) \subseteq E$ υπάρχει λύση σε διάστημα $J_0 = [t - a_0, t + a_0]$. Επιπλέον, από την απόδειξη του Θεωρήματος συνάγεται ότι $u(t; t_0, x_0) \in \bar{B}_b(x_0) \subseteq E$ και ότι είναι κλάσσης C^1 (συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση). Επομένως, θέτοντας $t_1 := t_0 + a_0$:

$$\lim_{t \to t_1} u(t; t_0, x_0) = x_1 \in \bar{B}_b(x_0)$$

και $x_1 \in E$ εφόσον E ανοικτό. Εφαρμόζουμε πάλι το Θεώρημα για το ΠΑΤ με αρχική συνθήκη αυτή τη φορά $x(t_1) = x_1$ σε σφαίρα $\bar{B}_{b_1}(x_1) \subseteq E$ που μας δίνει νέα λύση $u(t; t_1, x_1)$ σε διάστημα $J_1 = [t_1 - a_1, t_1 + a_1[$ γύρω από το σημείο $t_1 = t_0 + a_0$. Παρατηρούμε ότι $J_0 \cap J_1 \neq \emptyset$ και ότι στο $J_0 \cap J_1$ έχουμε $u(t; t_0, x_0) = u(t; t_1, x_1)$ από το μονοσήμαντο της λύσης.

Με παρόμοιο τρόπο η λύση επεκτείνεται και ορίζει μοναδική λύση σε διαδοχικά μεγαλύτερα διαστήματα. Έστω J η ένωση όλων αυτών των διαστημάτων και x η λύση που κατασκευάζεται στο J. Το διάστημα J είναι ανοικτό. Έστω για αντίφαση ότι κάποιο άκρο του J είναι κλειστό, π.χ. $J = (\alpha, \beta]$. Τότε, όπως προηγουμένως, $x(\beta) \in E$ και η λύση θα μπορούσε να επεκταθεί σε μεγαλύτερο διάστημα δεξιά του β, που είναι άτοπο. Επομένως το J είναι ανοικτό διάστημα. $\square$

Παράδειγμα: Εξετάζουμε πάλι το ΠΑΤ: $x' = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$ με λύση $x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$. Επιλέγοντας $b = x_0$ η μέγιστη τιμή της a_0 είναι $a_0 = \frac{1}{4x_0}$ και επομένως $J_0 = [-a_0, a_0] = \left[-\frac{1}{4x_0}, \frac{1}{4x_0}\right]$.

Γιά να εφαρμόσουμε πάλι το Θεώρημα Picard-Lindelof για το ΠΑΤ: $x' = x^2$, $x(a_0) = x_1$, θα πρέπει να μπορούμε να υπολογίσουμε το x_1, που γενικά δεν είναι δυνατόν. Στο παράδειγμα αυτό όμως η αναλυτική λύση είναι γνωστή και βρίσκουμε $x_1 = \frac{4x_0}{3}$. Η εφαρμογή του Θεωρήματος για το νέο ΠΑΤ δίνει: $J_2 = [t_1 - a_1, t_1 + a_1]$ όπου $a_1 = \frac{1}{4x_1} = \frac{3}{16x_0}$.

Άσκηση: Δείξτε συνεχίζοντας την διαδικασία ότι το Θεώρημα Picard-Lindelof εγγυάται (μετά από n βήματα) ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης έως χρόνο t_n, όπου

$$t_n = \frac{1}{x_0}\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

και ότι επομένως $t_n \to t_\infty = \frac{1}{x_0}$ που είναι ο (πραγματικός) χρόνος έκρηξης της λύσης. $\square$

Θεώρημα: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : E \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz. Έστω (α, β) το μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$. Αν $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο), τότε γιά κάθε συμπαγές $K \subseteq E$ υπάρχει $t \in [t_0, \beta)$ τέτοιο ώστε $x(t) \notin K$. Αντίστοιχα, αν $\alpha \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο), τότε γιά κάθε συμπαγές $K \subseteq E$ υπάρχει $t \in (\alpha, t_0]$ τέτοιο ώστε $x(t) \notin K$.

Απόδειξη: Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση για το άνω άκρο του J, $\beta \in \mathbb{R}$.

(i) Έστω ότι ο ισχυρισμός του Θεωρήματος δεν ευσταθεί. Τότε θα υπήρχε συμπαγές σύνολο $K \subseteq E$ τέτοιο ώστε $x(t) \in K$ για κάθε $t \in [t_0, \beta)$. Εφόσον η f είναι συνεχής και K συμπαγές, η f είναι φραγμένη στο K. Μάλιστα, το ελάχιστο άνω φράγμα της f ταυτίζεται με την μέγιστη τιμή:

$$M = \max\{\|f(x)\| : x \in K\}$$

(ii) Από την εξίσωση λύσης του ΠΑΤ:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau))d\tau$$

συμπεραίνουμε ότι για $t_1 \leq t_2 < \beta$:

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(x(\tau))\|d\tau \leq M|t_2 - t_1|$$

(iii) Επομένως, αν $t_j \in [t_0, \beta)$ είναι ακολουθία $t_j \to \beta$, τότε η ακολουθία $(x(t_j))$ στο $\mathbb{R}^n$ είναι Cauchy. (Εφόσον $t_j \to \beta$, γιά κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) : |t_j - \beta| < \frac{\epsilon}{2M}$ γι·α κάθε $j \geq N$. Άρα γιά $j, k \geq N$,

$$\|x(t_j) - x(t_k)\| \leq M|t_j - t_k| \leq M(|t_j - \beta| + |t_k - \beta|) \leq M\left(\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M}\right) = \epsilon$$

και η $(x(t_j))$ είναι Cauchy).

(iv) Εφόσον K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει (στο K). Έστω $x(t_j) \to x_1$.

(v) Έστω δύο ακολουθίες (t_j) και (τ_j) στο $[t_0, \beta)$, $t_j \to \beta$ και $\tau_j \to \beta$. Το'τε $t_j - \tau_j \to 0$ και:

$$\|x(\tau_j) - x_1\| \leq \|x(\tau_j) - x(t_j)\| + \|x(t_j) - x_1\| \leq M|\tau_j - t_j| + \|x(t_j) - x_1\| \to 0$$

και άρα $x(\tau_j) \to x_1$. Άρα για κάθε ακολουθία (t_j), $t_j \in [t_0, \beta)$, $t_j \to \beta$ έχουμε $x(t_j) \to x_1$. Από την αρχή της μεταφοράς το όριο:

$$\lim_{t \to \beta} x(t) = x_1$$

είναι καλά ορισμένο και $x_1 \in K$ αφού K κλειστό.

(vi) Ορίζουμε $x(\beta) = x_1$. Τότε η $x(t)$ είναι συνεχής στο (κλειστό) διάστημα $[t_0, \beta]$. Το Θεώρημα Picard-Lindelof γιά το ΠΑΤ $x' = f(x)$, $x(\beta) = x_1$, εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης σε κάποιο κλειστό διάστημα J', $\beta \in J'$. Επιπλέον $J \cap J' \neq \emptyset$. Από την μοναδικότητα λύσης, οι λύσεις στο $J \cap J'$ ταυτίζονται. Άρα η λύση του ΠΑΤ επεκτείνεται πέραν του β και άρα το $J = (\alpha, \beta)$ δεν είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας όπως έχουμε υποθέσει (άτοπο). Άρα δεν υπάρχει συμπαγές $K \subseteq E$ για το οποίο $x(t) \in K$ γιά κάθε $t \in [t_0, \beta)$. □

Πόρισμα: Αν $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο), τότε:

(i) Το όριο $\lim_{t \to \beta} x(t)$ δεν υπάρχει (ως πραγματικός αριθμός), η

(ii) $\lim_{t \to \beta} x(t) \in \partial E$

Απόδειξη: Αν $\beta \in \mathbb{R}$, τότε από το προηγούμενο Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η λύση $x(t)$ δεν μπορεί να περιορισθεί εντός συμπαγούς συνόλου $K \subseteq E$. Αν το όριο υπάρχει, τότε δεν μπορεί να είναι σημείο το E, γιατί τότε η λύση θα μπορούσε να επεκταθεί (εντός του E) όπως προηγουμένως. Επομένως, καθώς $x(t) \in E$ για κάθε $t \in [t_0, \beta)$, πρέπει να έχουμε $\lim_{t \to \beta} x(t) \in \partial E$. □

Παράδειγμα: Έστω το ΠΑΤ: $x' = f(x) = \frac{1}{x}$, $x(0) = x_0 > 0$. Εφόσον η f δεν ορίζεται στο $x = 0$, επιλέγουμε $E = \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ (εφόσον $x(0) = x_0 > 0$). Η λύση υπολογίζεται αναλυτικά με την μέθοδο διαχωρισμού μεταβλητών:

$$\int x dx = \int dt + c' \Rightarrow x^2 = 2t + c,\ x(0)^2 = x_0^2 = c^2 \Rightarrow x(t) = \sqrt{x_0^2 + 2t}$$

Έχουμε $x(t) > 0 \Rightarrow x_0^2 + 2t > 0 \Rightarrow t > -\frac{x_0^2}{2}$ και επομένως το μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης είναι: $J = \left(-\frac{x_0^2}{2}, \infty\right)$. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση,

$$\lim_{t \to \left(-x_0^2/2\right)^+} x(t) = 0 \in \partial E.$$

5. Ολική ύπαρξη λύσης

Εξετάζουμε συνθήκες κάτω από τις οποίες η λύση του ΠΑΤ υπάρχει (και είναι μοναδική) σε όλο το $J = \mathbb{R}$. Χωρίς βλάβη γενικότητας ορίζουμε το ΠΑΤ ως: $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$, δηλαδή θέτουμε $t_0 = 0$.

Θεώρημα: Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz και φραγμένη, τότε η λύση του ΠΑΤ υπάρχει (και είναι μοναδική) σε όλο το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Εφόσον η f είναι τοπικά Lipschitz η λύση υπάρχει και είναι μοναδική σε κάποιο ανοικτό διάστημα $J = (\alpha, \beta)$, $0 \in J$. Από την υπόθεση υπάρχει $m > 0$, τέτοιος ώστε: $\|f(x)\| \leq m$, $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε, αν $0 \leq t < \beta$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau))d\tau \Rightarrow \|x(t) - x_0\| \leq \int_0^t \|f(x(\tau))\|d\tau \leq mt$$

Αν $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο), τότε η $x(t)$ θα ανήκε στο συμπαγές σύνολο $x(t) \in \bar{B}_{m\beta}(x_0)$ γιά κάθε $t \in [0, \beta)$, πού είναι άτοπο από το προηγούμενο Θεώρημα. Επομένως το β δεν είναι πεπερασμένο. Παρόμοια γιά το κάτω όριο α του διαστήματος J. Άρα $J = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. □

Θεώρημα: Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ολικά Lipschitz. Τότε η λύση του ΠΑΤ υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το $J = \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Παρόμοια με την προηγούμενη απόδειξη:

$$\|x(t) - x_0\| \leq \int_0^t \|f(x(\tau))\|d\tau \leq \int_0^t \left(\|f(x(\tau)) - f(x_0)\| + \|f(x_0)\|\right) d\tau$$

για κάθε $t \in [0, \beta)$. Ο πρώτος όρος φράσσεται ως:

$$\|f(x(\tau)) - f(x_0)\| \leq K\|x(\tau) - x_0\|$$

όπου K η (ολική) σταθερά Lipschitz. Έστω $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο). Τότε:

$$\|x(t) - x_0\| \leq \beta\|f(x_0)\| + K\int_0^t \|x(\tau) - x_0\|d\tau$$

Από την ανισότητα Gronwall,

$$\|x(t) - x_0\| \leq \beta\|f(x_0)\|e^{Kt}$$

Επομένως για $0 \leq t < \beta$, η $x(t)$ περιέχεται σε συμπαγές σύνολο,

$$x(t) \in \bar{B}_{\beta\|f(x_0)\|e^{K\beta}}(x_0) = \{y : \|y - x_0\| \leq \beta\|f(x_0)\|e^{K\beta}\}$$

πο·υ αντιβαίνει σε αποτέλεσμα προηγούμενου Θεωρήματος. Άρα $\beta = \infty$. Παρόμοια, $\alpha = -\infty$ και επομένως $J = \mathbb{R}$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα, αλλά είναι χρήσιμο στην ανάλυση ευστάθειας Lyapunov:

Πόρισμα: Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz και $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και έστω ότι κάθε λύση $\phi(t, x_0)$ του ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$, στο διάστημα $J \subseteq J' = [t_0, \infty)$ στο οποίο ορίζεται ικανοποιεί την συνθήκη: $\phi(t, x_0) \in K$ για κάθε $t \in J$. Τότε η λύση του ΠΑΤ υπάρχει και είναι μοναδική σε όλο το διάστημα J'.

Άσκηση: Έστω το ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $f(x) = -x^3$, $x(0) = x_0 > 0$. Δείξτε (χωρις να υπολογίσετε την λύση αναλυτικά) ότι η λύση του ΠΑΤ είναι μοναδική σε όλο το διάστημα $[0, \infty)$. Επιβεβαιώστε το συμπέρασμα σας λύνοντας το ΠΑΤ αναλυτικά. *Υπόδειξη:* Μπορεί να έχουμε $|x(t)| = x_0$ για $t > 0$;

Γ. Χαλικιάς, 1-2-2023