Ποιοτική Θεωρία

<u>Το μοντέλο του Malthus</u>: Έστω $P(t)$ ο πληθυσμός σε χρόνο t. Η υπόθεση ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι ανάλογος της τρέχουσας τιμής σημαίνει ότι:

$$\frac{dP}{dt} = kP \,, \qquad P(0) = P_0 > 0$$

όπου k η σταθερά αναλογίας. Η λύση είναι $P(t) = P_0 e^{kt}$.
Έχουμε: (i) $P(t) = P_0$ αν $k=0$, (ii) $P(t)\uparrow$ αν $k>0$, και (iii) $P(t)\downarrow$ αν $k<0$. Στην πράξη ο χρόνος είναι διακριτός. Έστω ότι από μετρήσεις:

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} = \ell \,, \qquad P(0) = P_0$$

όπου ℓ = σταθερά. Έχουμε (i) $\ell = 1 \Rightarrow P(n) = P_0$ (ii) $\ell > 1$, $P_n = P_0 e^{kn}$ και

$$\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{P_0 e^{k(n+1)}}{P_0 e^{kn}} = e^k = \ell \Rightarrow k = \ln \ell > 0$$

και (iii) $\ell < 1 \Rightarrow e^k = \ell \Rightarrow k = \ln \ell < 0$.

<u>Το μοντέλο Verhulst (Λογιστικό μοντέλο)</u>

Τροποποίηση μοντέλου Malthus ως προς την απεριόριστη αύξηση του πληθυσμού (όταν $k>0$). Επιθυμούμε να διατηρήσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά του μοντέλου Malthus για μικρό πληθυσμό αλλά αν ο πληθυσμός είναι δυσανάλογα μεγάλος για τα περιβαλλοντικά δεδομένα, τότε ο πληθυσμός πρέπει να μειώνεται. Εισάγουμε τη νέα μεταβλητή N (περιβαλλοντική χωρητικότητα). Πρέπει να έχουμε $P' \approx kP$ αν $P \approx 0$, $P' < 0$ αν $P > N$. Το απλούστερο μοντέλο είναι:

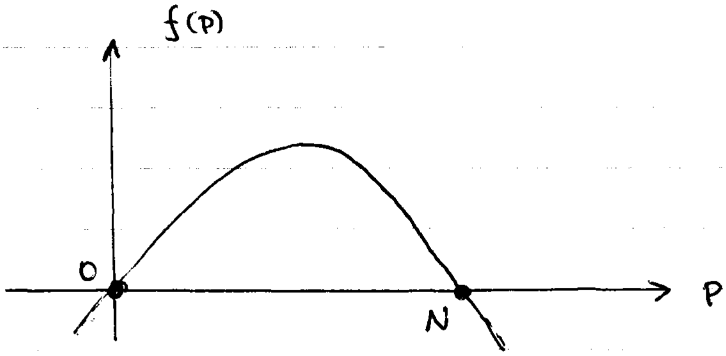
$$\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P(t)}{N}\right) P(t).$$

Ποιοτική ανάλυση λογιστικού μοντέλου

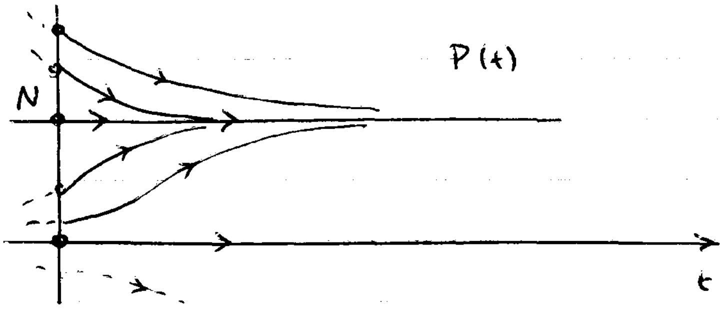
Θέτουμε $f(P) = k\left(1-\frac{P}{N}\right)P$, οπότε η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dP}{dt} = f(P) = k\left(1-\frac{P}{N}\right)P$$

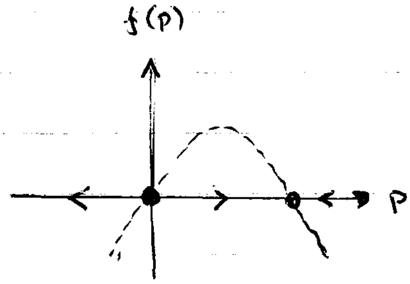
Ποιοτική πληροφορία από τό γράφημα της $f(P)$:



Αν $P=0$ η $P=N$, $\frac{dP}{dt}=0$ και ο πληθυσμός παραμένει σταθερός, δηλ. $f(P)=0 \Leftrightarrow P=0$ η $P=N$. (σημεία ισορροπίας)
Αν $0 < P(0) < N$, οπότε $f(P) > 0$, έχουμε $P'(t) > 0$ και ο πληθυσμός αυξάνει $P(t)\uparrow$. Καθώς ο $P(t)$ πλησιάζει τήν περιβαλλοντική χωρητικότητα N, ο $f(P)$ πλησιάζει το μηδέν, ~~η αύξηση~~ ο ρυθμός αύξησης ελαττώνεται και $P(t) \to N$.
Αν $P(0) > N$, τότε $P'(t) = f(P) < 0$ και ο πληθυσμός πάλι μειώνεται τείνοντας πρός τό N.



Λύσεις εξίσωσης γιά διάφορες τιμές του P(0).



Διάγραμμα φάσης

Διάγραμμα φάσης

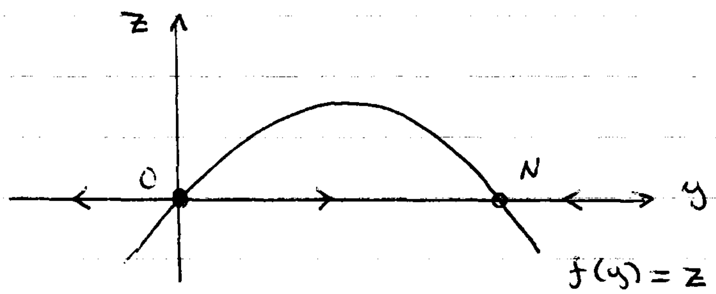
Ορισμός: Η εξίσωση $y' = f(t,y)$ λέγεται αυτόνομη αν η f δεν εξαρτάται από την μεταβλητή t, δηλ. είναι της μορφής $f(y)$.

Ορισμός: Ο χώρος φάσης της εξίσωσης $y' = f(y)$ είναι ο άξονας των y. Το $\bar{y}$ λέγεται σημείο ισορροπίας αν $f(\bar{y}) = 0$. Το διάγραμμα φάσης είναι ο άξονας των y μαζί με τα σημεία ισορροπίας και τα βέλη που καταδεικνύουν το πρόσημο της κλίσης της λύσης.

Παράδειγμα: Θεωρούμε το λογιστικό μοντέλο:

$$\frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{N}\right)y \quad , \quad k, N > 0$$

Τα σημεία ισορροπίας είναι $\{0, N\}$. Το διάγραμμα φάσης είναι:



Ορισμός: Συμβολίζουμε τη λύση $y(t)$ του Π.Α.Τ: $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ με $\varphi(t, y_0)$. Εξ' ορισμού ισχύει ότι $\varphi(0, y_0) = y_0$.

Έστω ότι ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων του Π.Α.Τ. Τότε, αν $\bar{y}$ σημείο ισορροπίας, $\varphi(t, \bar{y}) \equiv \bar{y}$ για όλα τα t. (η σταθερή λύση $y(t) = y_0$ ικανοποιεί τόσο την δ.ε. όσο και την αρχική συνθήκη και από το μονοσήμαντο των λύσεων είναι η μοναδική λύση).

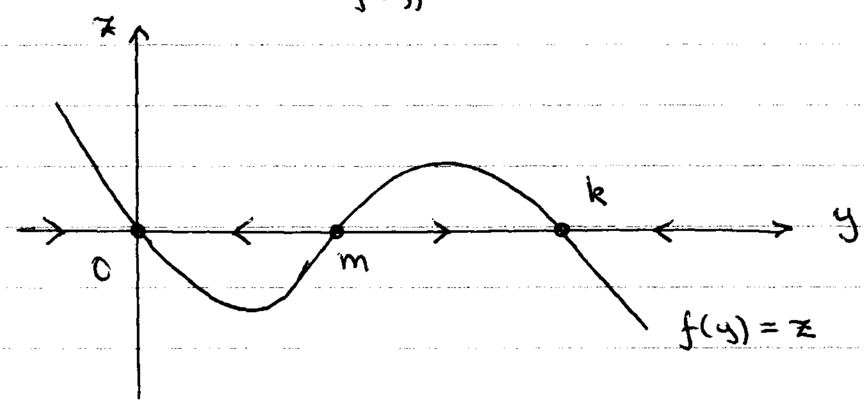
Αν y_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας, τότε η $\varphi(t, y_0)$ δεν είναι ποτέ ίση με σημείο ισορροπίας (Αν υπήρχε $T : \varphi(T, y_0) = \bar{y}$

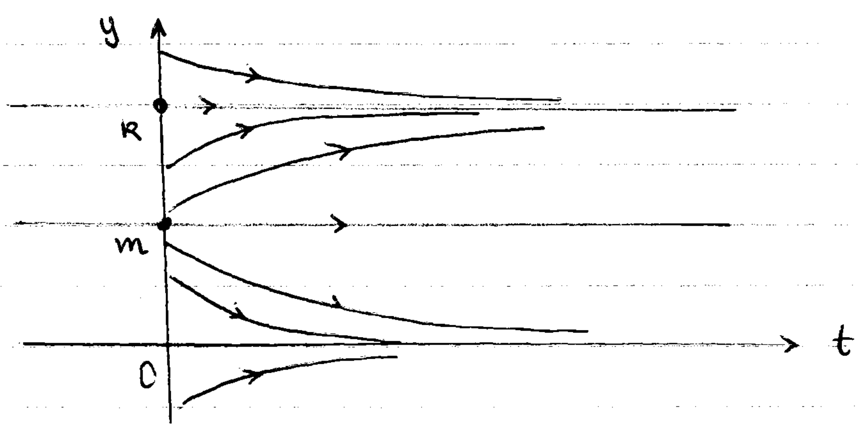
όπου $\bar{y}$ σημείο ισορροπίας, τότε θεωρώντας το Π.Α.Τ: $y' = f(y)$, $y(T) = y_0$, προκύπτει ότι $y(t) \equiv \bar{y}$. Άρα $\varphi(t, y_0) \equiv \bar{y} \Rightarrow$ $\varphi(0, y_0) = y_0 = \bar{y}$, άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι το y_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας).

Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι αν y_0 δεν είναι σημείο ισορροπίας τότε η $t \to f(\varphi(t, y_0))$ δεν αλλάζει πρόσημο στο χρόνο (διότι αν άλλαζε τότε λόγω συνέχειας θα υπήρχε $T \in \mathbb{R}$: $f(\varphi(T, y_0)) = 0$ πού θα αντιστοιχούσε σε σημείο ισορροπίας - που αντιβαίνει το συμπέρασμα της προηγούμενης παραγράφου). Επομένως σε αυτήν την περίπτωση $\varphi(t, y_0) \uparrow$ ~~ή~~ η $\varphi(t, y_0) \downarrow$ (αύξουσα η φθίνουσα). Επίσης, λόγω μοναδικότητας της λύσης, η $\varphi(t, y_0)$ δεν μπορεί να φτάσει σε σημείο ισορροπίας σε πεπερασμένο χρόνο.

<u>Παράδειγμα:</u> Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y'(t) = \underbrace{a y \left(1 - \frac{y}{k}\right)(y - m)}_{f(y)} \qquad a, m, k > 0, \quad m < k$$



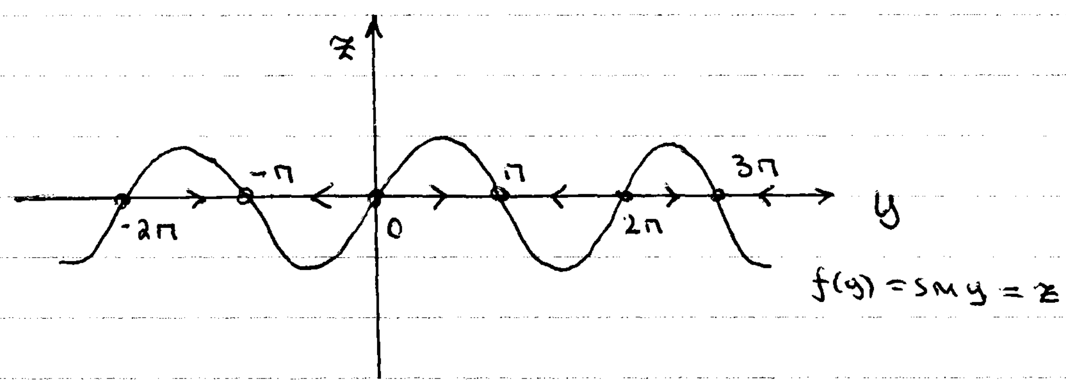


δηλ.

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,y_0) = \begin{cases} k & \text{και } \varphi \text{ φθίνουσα, αν } y_0 > k \\ k & \text{και } \varphi \text{ αύξουσα, αν } y_0 \in (m,k) \\ 0 & \text{και } \varphi \text{ φθίνουσα, αν } y_0 \in (0,m) \\ 0 & \text{και } \varphi \text{ αύξουσα, αν } y_0 < 0 \end{cases}$$

<u>Ορισμός</u> : Το σημείο ισορροπίας $\bar{y}$ λέγεται ευσταθές (κατά-Lyapunov) αν $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |y - \bar{y}| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |\varphi(t,y) - \varphi(t,\bar{y})| < \varepsilon$ γιά $t \geq 0$. Το $\bar{y}$ λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές και επιπλέον $\exists\, \eta > 0$: $|y_0 - \bar{y}| < \eta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \varphi(t,y_0) = \bar{y}$. Τέλος, ενα σημείο ισορροπίας y_0 λέγεται ασταθές αν δεν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov).

<u>Παράδειγμα</u>: Η αυτόνομη δ.ε.: $y' = \sin y$ έχει σημεία ισορροπίας $y = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Το διάγραμμα φάσης είναι



Τα σημεία ισορροπίας $y = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ είναι ασταθή σημεία ισορροπίας και τά $y = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ ασυμπτωτικά ευσταθή

<u>Παράδειγμα</u>: Θεωρούμε την αυτόνομη εξίσωση:

$$y'(t) = f(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ -y^3 \sin\left(\frac{1}{y}\right), & y \neq 0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής και συνεχώς παραγωγίσιμη στό $y=0$:

$$|f(y)| = |y^3 \sin(1/y)| \leq |y^3| \to 0 \quad \text{καθώς} \quad y \to 0.$$

Επίσης:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^3 \sin(1/h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (-h^2) \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

Και επίσης:

$$f'(y) = -3y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) - y^3 (-y^{-2}) \cos(1/y)$$

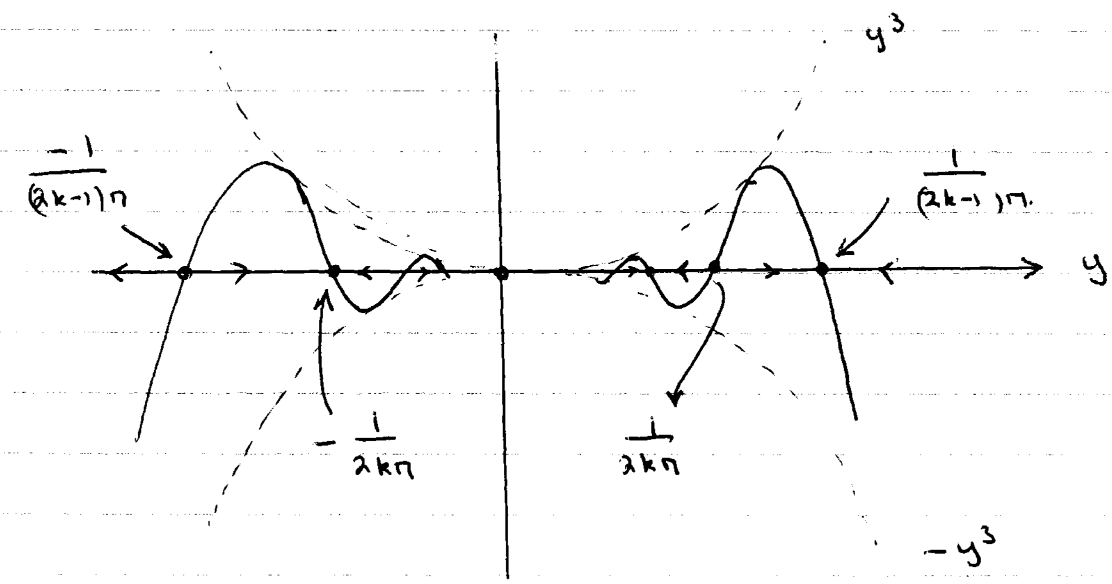
$$\Rightarrow f'(y) = -3y^2 \sin(1/y) + y \cos(1/y) \qquad (y \neq 0)$$

$$\Rightarrow |f'(y)| \leq 3y^2 \left|\sin \frac{1}{y}\right| + |y| \left|\cos \frac{1}{y}\right|$$

$$\leq 3y^2 + |y| \to 0 \quad \text{καθώς} \quad y \to 0$$

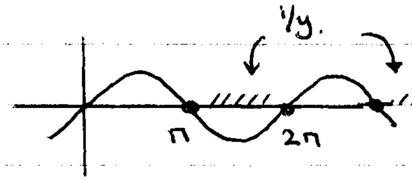
Τά σημεία ισορροπίας δίδονται από $\frac{1}{\bar{y}} = n\pi \quad (n \neq 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{n\pi} \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ μαζί με τό $\bar{y} = 0$.



Γιά $y>0$ έχουμε: $-y^3\sin\left(\frac{1}{y}\right)>0 \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$$\Rightarrow (2k-1)\pi < \frac{1}{y} < 2k\pi \quad (k\in\mathbb{N})$$



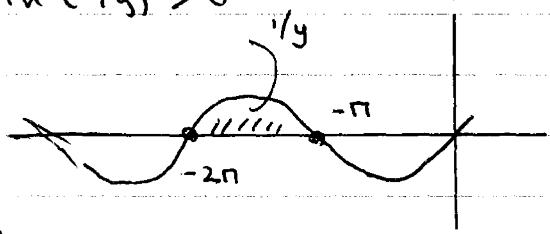
$$\Rightarrow \frac{1}{(2k-1)\pi} > y > \frac{1}{2k\pi} \quad (k\in\mathbb{N})$$

Επομένως $\bar{y}=\frac{1}{(2k-1)\pi}$ $(k\in\mathbb{N})$: σημεία ασυμπτωτικής ευστάθειας.

$\bar{y}=\frac{1}{2k\pi}$ $(k\in\mathbb{N})$: ασταθής ~~ευστ~~ ισορροπία.

Παρόμοια, γιά $y<0$.

$$-y^3\sin(1/y)>0 \Rightarrow \sin(1/y)>0$$



$$\Rightarrow -2k\pi < \frac{1}{y} < -(2k-1)\pi$$

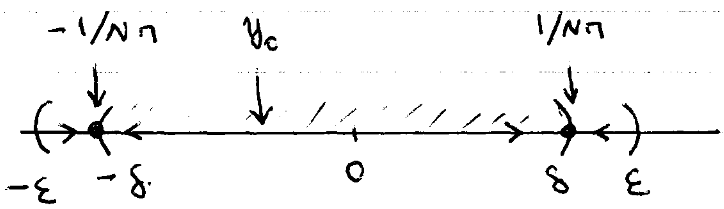
$$\Rightarrow -\frac{1}{2k\pi} > y > -\frac{1}{(2k-1)\pi} \quad (k\in\mathbb{N}).$$

Επομένως: $\bar{y}=-\frac{1}{(2k-1)\pi}$ $(k\in\mathbb{N})$: σημεία ασταθούς ισορ-ροπίας

$\bar{y}=-\frac{1}{2k\pi}$ $(k\in\mathbb{N})$: σημεία ~~ευστ~~ ασυμπ. ευστάθειας.

Το $\bar{y}=0$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας: Δοθέντος $\varepsilon>0$ επιλέγουμε ως N τον μικρότερο ακέραιο ώστε $\frac{1}{N\pi}<\varepsilon$ και θέτουμε $\delta=\frac{1}{N\pi}$.

$|y_0|<\delta \Rightarrow$
$|\varphi(t,y_0)|<\frac{1}{N\pi}$
$\forall t$



Εφόσον τα σημεία $-\frac{1}{N\pi}$ και $\frac{1}{N\pi}$ είναι σημεία ισορροπίας, τότε, αν $|y_0|<\delta$,

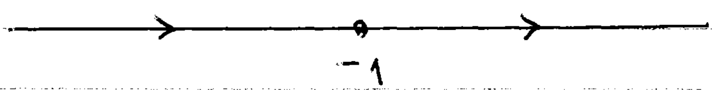
$$-\frac{1}{N\pi} \le \varphi(t,y_0) \le \frac{1}{N\pi} \qquad \forall t \geq 0$$

$$\Rightarrow |\varphi(t,y_0)| < \varepsilon \qquad \forall t \geq 0 \qquad (\text{ευστάθεια})$$

Το $\bar{y}=0$ δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθές: Έστω $0<y_0<\delta$. Τότε επιλέγουμε N^* τέτοιο ώστε $0<\frac{1}{N^*\pi}<\cancel{\delta}\,y_0$. Εφόσον το $1/N^*\pi$ είναι σημείο ισορροπίας έχουμε $\varphi(t,y_0) > 1/N^*\pi$ $\forall t \geq 0$ και επομένως $\varphi(t,y_0) \not\to 0$ καθώς $t \to +\infty$.

<u>Παράδειγμα</u>: Θεωρούμε την εξίσωση: $y' = (1+y)^2$

Έχουμε σημείο ισορροπίας $\bar{y}=-1$ και $f(y)>0$ $\forall y \in \mathbb{R}$. Συνεπώς το διάγραμμα φάσης είναι:

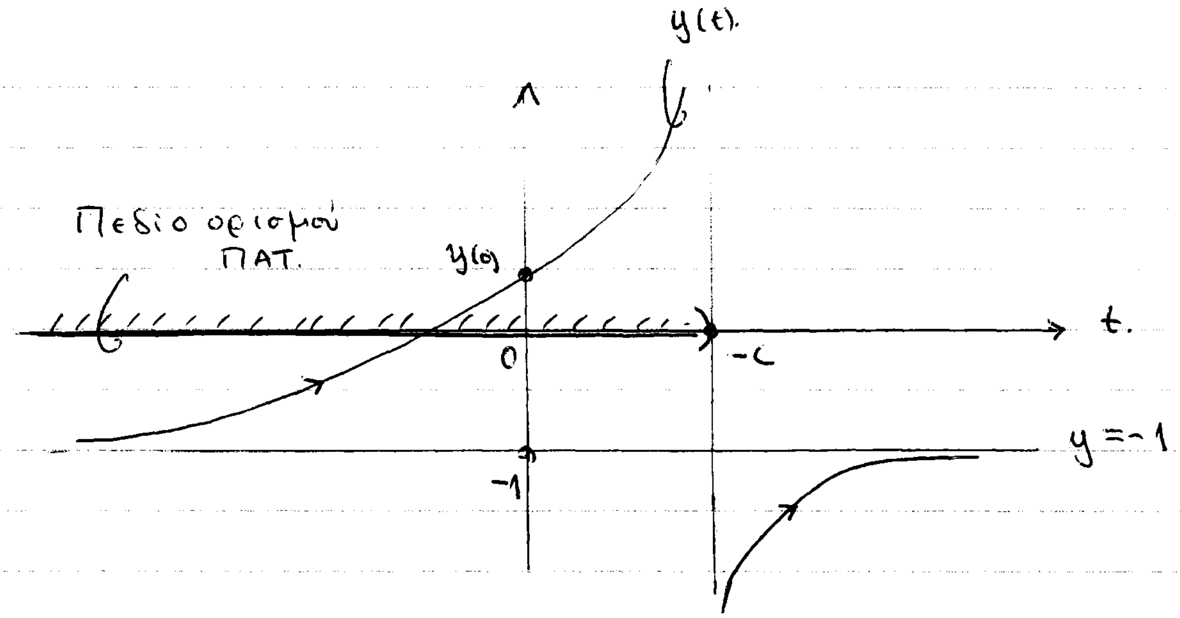


Εφόσον $y'>0$ $\forall y$ όλες οι λύσεις είναι αύξουσες. Η λύση της εξίσωσης είναι

$$\int \frac{dy}{(1+y)^2} = \int dt + c \Rightarrow -\frac{1}{1+y} = t+c$$

$$\Rightarrow 1+y = -(t+c)^{-1} \Rightarrow y = -1 - \frac{1}{t+c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

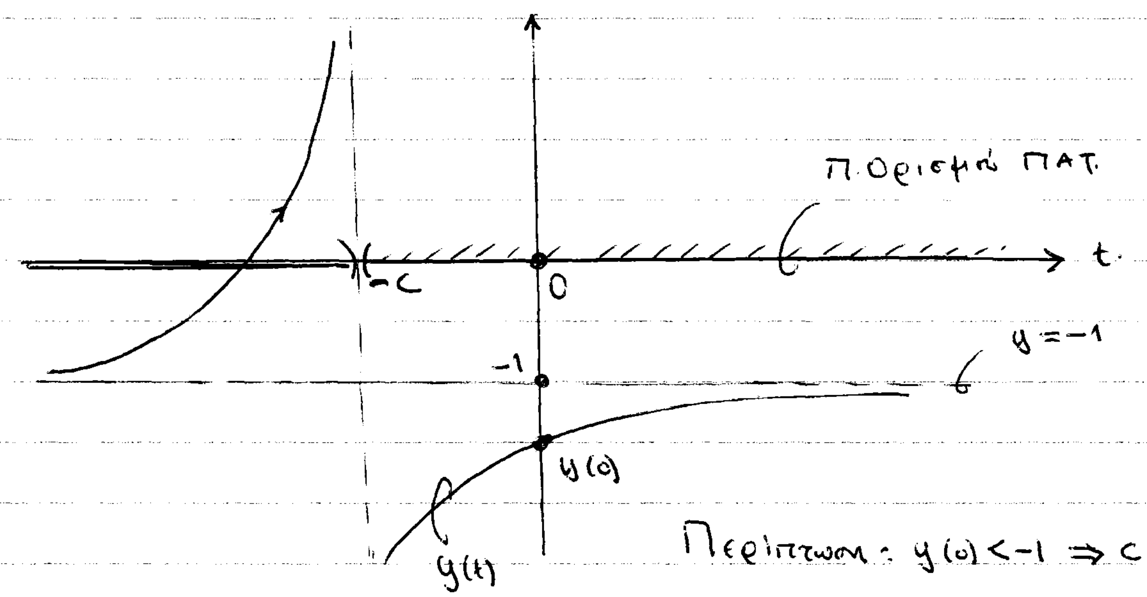
Έστω ότι $y(0) > -1 \Rightarrow -1-\frac{1}{c} > -1 \Rightarrow \frac{1}{c} < 0 \Rightarrow c<0$ και επομένως οι λύσεις ορίζονται στο διάστημα $(-\infty,-c)$ το οποίο περιέχει το $t=0$, και εκρήγνυνται αφού $\lim_{t\to -c^-} y(t) = +\infty$



Περίπτωση: $y(0) > -1 \Rightarrow c < 0$.

Αν $y(0) < -1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{c} < -1 \Rightarrow \frac{1}{c} > 0 \Rightarrow c > 0$, τότε

$$y(t) = -1 - \frac{1}{t+c} \qquad -\infty < t < -c < 0$$



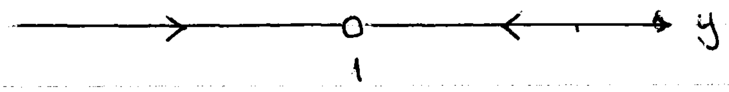
Περίπτωση: $y(0) < -1 \Rightarrow c > 0$

Τό διάγραμμα φάσης δεν παρέχει καμμία πληροφορία γιά την έκρηξη της λύσης ή τό πεδίο ορισμού της.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω ~~η διαφορική εξίσωση~~ τό Π.Α.Τ.:

$$y' = \frac{1}{1-y}, \quad y(0) = 2$$

Αν $y>1$ τότε $y'<0$ ενώ αν $y<1$ τότε $y'>0$. Αν $y=1$ η εξίσωση δεν ορίζεται και ο χώρος φάσης είναι $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.



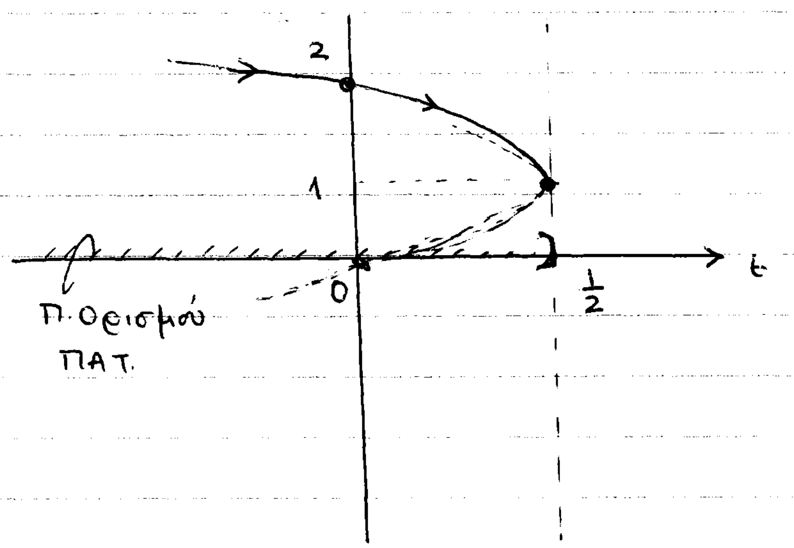
Στήν περίπτωση που $y(0)=2$ η λύση τείνει στό 1 από τά δεξιά (σέ πεπερασμένο χρόνο). Η λύση είναι:

$$\int (1-y)\,dy = \int dt + c \Rightarrow y - \frac{y^2}{2} = t + c$$

$$\Rightarrow c = 2 - \frac{4}{2} = 0 \quad \text{Άρα} \quad y - \frac{y^2}{2} = t \Rightarrow y^2 - 2y + 2t = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4-8t}}{2} \Rightarrow y(t) = 1 \pm \sqrt{1-2t}$$

Η αρχική συνθήκη $y(0)=2$ αντιστοιχεί στή θετική ρίζα, δηλ. $y(t) = 1 + \sqrt{1-2t}$. Τό πεδίο ορισμού είναι $(-\infty, \frac{1}{2})$ καί $y(t) \to 1$ καθώς $t \to \frac{1}{2}$

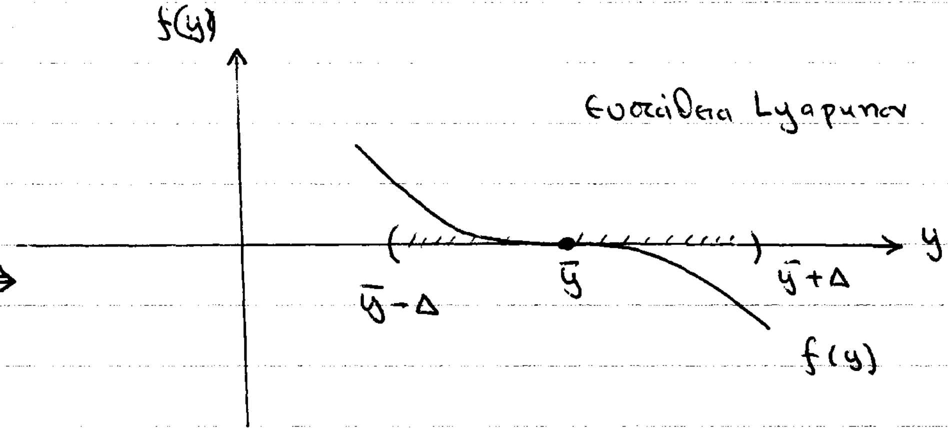


Τό διάγραμμα φάσης πάλι δεν δίνει σημαντικές πληροφορίες γιά την λύση του Π.Α.Τ.

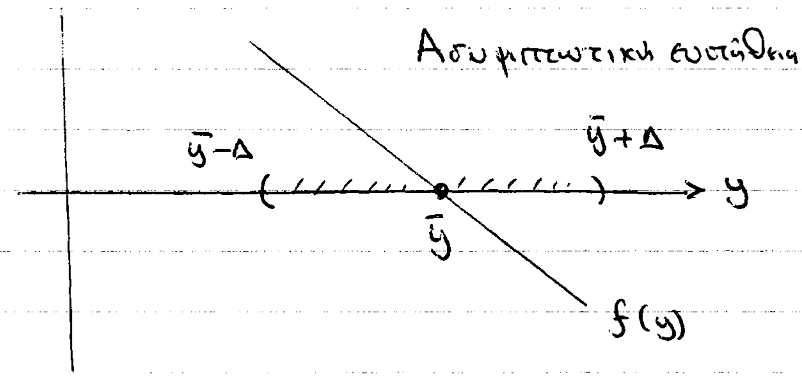
Γραμμικοποίηση.

Λήμμα: (α) Ένα σημείο ισορροπίας της αυτόνομης δ.ε. $y' = f(y)$ είναι ευσταθές αν $\exists\, \Delta > 0 : (y-\bar{y}) f(y) \leq 0 \quad \forall y$ μέ $|y-\bar{y}| < \Delta$.
(β) Αν υπάρχη $\Delta > 0 : (y-\bar{y}) f(y) < 0 \quad \forall y$ μέ $|y-\bar{y}| < \Delta$ τότε τό $\bar{y}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. (γ) Αν $\exists\, \Delta > 0 : (y-\bar{y}) f(y) > 0$ γιά τά y μέ $0 < y-\bar{y} < \Delta$ $(-\Delta < y-\bar{y} < 0)$, τότε τό $\bar{y}$ είναι ασταθές.

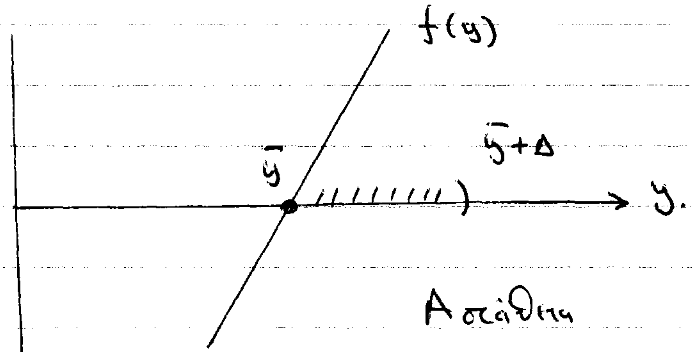
$y \in (\bar{y}-\Delta, \bar{y}+\Delta) \Rightarrow$
$(y-\bar{y}) f(y) \leq 0$



$y \in (\bar{y}-\Delta, \bar{y}+\Delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow (y-\bar{y}) f(y) < 0.$



$y \in (\bar{y}, \bar{y}+\Delta) \Rightarrow$
$\Rightarrow (y-\bar{y}) f(y) > 0$



Απόδειξη:

(α) Έχουμε: $\frac{d}{dt}|y(t)-\bar{y}|^2 = 2(y(t)-\bar{y})\,y'(t) =$

$$= 2(y(t)-\bar{y})\,f(y)$$

συνεπώς αν $0<|y(0)-\bar{y}|<\Delta$, τότε $\frac{d}{dt}|y(t)-\bar{y}|^2 \leq 0$, κατ' αρχήν γιά t κοντά στό 0 λόγω συνέχειας της λύσης ως προς t καί επομένως γιά αυτά τά t η απόσταση $|y(t)-\bar{y}|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t. Τέλος, $|y(t)-\bar{y}|<\Delta$ $\forall t\geq 0$ διότι η απόσταση $|y(t)-\bar{y}|$ είναι συνεχώς φθίνουσα καθώς βρισκόμαστε πάντα μέσα στό διάστημα γιά τό οποίο $\frac{d}{dt}|y(t)-\bar{y}|^2<0$. Επιλέγοντας $\delta=\varepsilon$ στόν ορισμό της ευστάθειας καταλήγουμε στό συμπέρασμα.

(β) Όπως στό (α), η απόσταση $|y(t)-\bar{y}|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t. Συνεπώς τό όριο $\lim_{t\to\infty}|y(t)-\bar{y}|$ υπάρχει. Έστω ότι

$$\lim_{t\to+\infty}|y(t)-\bar{y}| = \ell$$

οπου $\ell>0$. Θέτουμε $M=\max\{2(y-\bar{y})f(y)\}$ όπου τό max υπολογίζεται στό σύνολο $\Sigma=\{y : \ell\leq|y-\bar{y}|\leq\Delta\}$. Παρατηρούμε ότι $M<0$ καί ότι η $y(t)\in\Sigma$ γιά $t\geq 0$. Όπως καί προηγουμένως

$$\frac{d}{dt}|y(t)-\bar{y}_*|^2 = 2(y(t)-\bar{y})f(y) \leq M<0$$

καί ολοκληρώνοντας

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|y(s)-\bar{y}|^2\,ds \leq \int_0^t M\,ds \Rightarrow |y(t)-\bar{y}|^2 \leq |y(0)-\bar{y}|^2 + Mt$$

που οδηγεί σέ άτοπο καθώς $t\to\infty$. Συνεπώς $\ell=0$ καί τό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.