<u>Παράρτημα 2</u>

Παρατηρήσεις, ασκήσεις και Διορθώσεις

<u>Παράγραφος 1</u>

1) Σελίδα , 1: Παρατηρούμε τα ακόλουθα για το χώρο πηλίκο X/Y:

(α) $Y=\{0\} \Rightarrow X/Y \cong X$ και

(β) $X=Y \Rightarrow \quad X/Y \cong \{0\}$

Επίσης από τον τύπο (1) έπεται ιδιαίτερα ότι : $\left\|\hat{x}\right\| \leq \|x\|, x\in X$.

2) Σελίδα 2. Το θεώρημα 1.5 και το Λήμμα 1.3 είναι καλύτερα να συγχωνευθούν στο ακόλουθο,

<u>Θεώρημα</u>: Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υπόχωρος του X και $\pi: X\to X/Y$ η κανονική απεικόνιση τότε έχουμε:

1) $\|\pi(x)\| \leq \|x\|, x\in X$ και άρα $\|\pi\|\leq 1$. Ιδιαίτερα η π είναι συνεχής.
2) $\pi(B_X)=B_{X/Y}$ και άρα η π είναι ανοικτή απεικόνιση.
3) Αν $Y\neq X$, τότε $\|\pi\|=1$.

Παρατηρούμε ότι, αν υποθέσουμε ότι ο X είναι χώρος Banach τότε από το θεώρημα 1.10 και ο X/Y θα είναι χώρος Banach και συνεπώς ο ισχυρισμός (2) είναι συνέπεια (και) του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης.

3)Σελίδα, 4, γραμμή -5. Διορθώστε σε « $z\in \hat{B}_{X/Y}$ με $\|z\|=1$».

4)Σελίδα 7:

Γραμμή , 11. Συμπληρώστε σε, « Έστω $z_{n_i} \in \hat{x}_{n_i}$, από την παρατήρηση 1.9 (β)»

Γραμμή, -6. Διορθώστε σε « Πράγματι, αν $\varepsilon>0$ τότε υπάρχει $k_0\in N: \dfrac{1}{2^{k_0}}<\varepsilon$. Αν $\lambda>\mu\geq k_0+1$ ».

5)Σελίδα, 9:

Γραμμές 3, 6, 9 , αντικατάστησε το T με το F .

6) Γραμμή , 13, αντικατάστησε , « ο T είναι φραγμένος» με το « ο F είναι φραγμένος».

Δεύτερη απόδειξη του ισχυρισμού ΙΙΙ (Ο F είναι φραγμένος με $\|F\|=\|T\|$.)

$$\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|F(x+KerT)\| =$$ (με χρήση του λήμματος 1.3)

$$= \sup_{\|x+KerT\|<1} \|F(x+KerT)\| = \|F\|.$$

Σημειώνουμε ότι η απόδειξη του γεγονότος ότι ο τελεστής F είναι φραγμένος δεν χρειάζεται την υπόθεση ότι ο X είναι πλήρης χώρος με νόρμα (χώρος Banach).

7)Σελίδα , 10: Πρβλ. την απόδειξη του Πορίσματος 1.13 με την άσκηση 11 (σελ. 30) της παραγράφου 3.

<u>Παράγραφος 2</u>

1)Σελίδες, 11, 12, 13, παρατηρήσεις: Έστω $P: X \to Y \subseteq X$ γραμμική προβολή. Τότε η P ταυτίζεται ουσιαστικά με την απεικόνιση πηλίκο $\pi: X \to X/Z$, όπου $Z = KerP$.

Πράγματι, ορίζουμε, $F: X/Z \to Y: F(x+Z) = P(x), x \in X$. Τότε η απεικόνιση F είναι αλγεβρικός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων X/Z και Y.

Δείτε και το διάγραμμα $P = Fo\pi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/Z \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Ανάλογα, αν ο X είναι χώρος με νόρμα, ο Y κλειστός υπόχωρος του X και $P: X \to Y \subseteq X$ φραγμένη προβολή με $Z = KerP$, τότε η $\pi: X \to X/Z$ είναι βέβαια φραγμένη (με $\|\pi\| \leq 1$) και «ταυτίζεται» με την P.

Στην περίπτωση αυτή η απεικόνιση $F: X/Z \to Y$ (με $F(x+Z) = P(x), x \in X$) είναι τοπολογικός ισομορφισμός και οι χώροι με νόρμα X/Z και Y είναι (τοπολογικά)ισόμορφοι.(Πρβλ την Πρόταση 1.12 καθώς και την άσκηση 10.)

2) Σελίδα 15, γραμμές -8 και- 9. Συντομότερα μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$$F_k(x-y) = F_k(x) - F_k(y) = F_k(x) - \Lambda_k(y) = F_k(x) - F_k(x) = 0.$$

3)Σελίδα 16: Σχετικά με την παρατήρηση 2.7.1 σημειώνουμε ότι αν $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ τότε η άλγεβρα του δίσκου $A\left(\bar{D}\right)$ (δηλαδή όλες οι

συνεχείς συναρτήσεις $f: \bar{D} \to C$ ώστε $f\big|_D$ είναι ολόμορφη συνάρτηση) μπορεί να ταυτισθεί με τον κλειστό υπόχωρο του $C(T)$ όπου $T = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\} =$ (ο κλειστός μοναδιαίος κύκλος) , που παράγεται από το σύνολο $\left\{e^{in\theta} : n \geq 0\right\}$. Αυτός είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f \in C(T)$ ώστε $\hat{f}(n) = 0, n = -1,-2,-3,....$, όπου $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$ είναι ο

$n-$οστος συντελεστής Fourier της f. Αποδεικνύεται ότι η άλγεβρα του δίσκου $A\left(\bar{D}\right)$

(ταυτιζόμενη όπως παραπάνω με τον υπόχωρο του $C(T)$) δεν είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του χώρου Banach $C(T)$. (Πρβλ το βιβλίο [R] Σ. 128-130.)

4)Σελίδα 16: Σχετικά με την παρατήρηση 2.7 (2), σημειώνουμε ότι αν ο H είναι χώρος Hilbert και ο F είναι κλειστός υπόχωρος του H, τότε ο χώρος πηλίκο H/F (με τη νόρμα πηλίκο) είναι ισομετρικός με το ορθογώνιο συμπλήρωμα $F^{\perp}$ του F και συνεπώς είναι χώρος Hilbert. (Πράγματι, η απεικόνιση $P: H \to H : P(x) = x - y$, όπου $y \in F$ το μοναδικό στοιχείο του F ώστε $\|x-y\| = d(x,F)$ είναι ορθογώνια προβολή με $P(H) = F^{\perp}$ και $KerP = F$. Έστω $\pi : H \to H/F$ η κανονική απεικόνιση τότε, όπως έπεται από την πρόταση 1.12, η $\phi : H/F \to F^{\perp}$ είναι τοπολογικός ισομορφισμός, η οποία είναι επί πλέον ισομετρία. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

<u>Παράγραφος 3.1.</u>

1)Σχετικά με το πόρισμα 3.1.12, παρατηρούμε ότι ο μονοδιάστατος υπόχωρος $F = \langle x_0 \rangle$ του E είναι επιπλέον κλειστός. (Πρβλ. την άσκηση 7)

2)Σχετικά με την άσκηση 5, πρβλ. και την πρόταση 3.14 (ιχ).

3)Σχετικά με την άσκηση 11, σημειώνουμε ότι η ακόλουθη ασθενέστερη μορφή του ισχυρισμού (α) αποδεικνύεται ευκολότερα: (α') Έστω A κυρτό υποσύνολο του τ.δ.χ. E. Αν $x \in A^0$ και $y \in A$ τότε $[x,y) \subseteq A^0$. (Άσκηση).

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του (α') (την οποία θα χρησιμοποιήσουμε και στην παράγραφο 5) , είναι η ακόλουθη:

Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $x, y \in S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ με $x \neq y$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ ώστε το $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S_X$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[x,y] \subseteq S_X$. (Άσκηση.)

Παράγραφος 3.2.

1)Σελίδα 34, γραμμή 3:

Αντί του, «τότε $P_k\left(y-x\right)\le\varepsilon\le\varepsilon_k-P_k\left(x-y\right),k=1,2,...,n$ »

Να γραφεί « τότε $P_k\left(y-x\right)<\varepsilon\le\varepsilon_k-P_k\left(x-y\right),k=1,2,...,n$ ».

2)Σελίδα 35, γραμμές 5 και 6: Διαγράψτε το « ότι $x_a+y_a\xrightarrow{\tau}x+y$ και $\lambda_a x_a\xrightarrow{\tau}\lambda x$ »

3) Σελίδα 36, παράδειγμα 3.26 (2): Παρατηρείστε ότι ημινόρμα $p_\gamma\left(f\right)=\left|f\left(\gamma\right)\right|$, προέρχεται από το γραμμικό συναρτησοειδές $\delta_\gamma:E\to K$ ώστε $\delta_\gamma\left(f\right)=f\left(\gamma\right)$.

Παράγραφος 3.3

1)Σελίδα 41: παρατηρούμε ότι οι ισχυρισμοί (ι)-(ιv) της Πρότασης 3.3.3 είναι επίσης ισοδύναμοι με τον ακόλουθο ισχυρισμό, (v) p συνεχής σε κάποιο $x\in E$. (Άσκηση.)

2)Σχετικά με το θεώρημα 3.3.7 παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(α) $p_A\left(x\right)=0\Leftrightarrow x\in tA\quad\forall t>0\Leftrightarrow H_A\left(x\right)=\left(0,+\infty\right)$).

(β) Αν ο E είναι πραγματικός χώρος τότε η υπόθεση ότι το κυρτό σύνολο A είναι ισορροπημένο στον ισχυρισμό (ιιι) μπορεί να αντικατασταθεί από την (ισοδύναμη) υπόθεση ότι το A είναι συμμετρικό, δηλαδή $x\in A\Rightarrow -x\in A$.

3)Σελίδα 45, γραμμή 4:

Αντί του , « $x\in H_B\left(x\right)$ », να γραφεί « $t\in H_B\left(x\right)$ ».

4)Σελίδα 45: Σχετικά με την παρατήρηση (2), σημειώνουμε ότι αν το $X\subseteq S_1$ δεν είναι συμμετρικό τότε βέβαια και το κυρτό $A=\hat{B}\left(0,1\right)\setminus X$ δεν είναι συμμετρικό (ισορροπημένο). Παρόλα αυτά το συναρτησοειδές του Minkowski p_A του A είναι (η Ευκλείδεια) νόρμα.

Επίσης χρήσιμη είναι και η ακόλουθη απλή παρατήρηση:

Αν E είναι διανυσματικός χώρος και $A\subseteq B\subseteq E$ κυρτά και απορροφούντα υποσύνολα του E, τότε $p_B\le p_A$.

5)Σελίδα 46: Παρατηρούμε ότι αν το σύνολο U της Πρότασης 3.3.8 δεν είναι ισορροπημένο, τότε το υπογραμμικό συναρτησοειδές p_U δεν είναι (από την Πρόταση 3.2.4) ημινόρμα.

Έτσι , επιλέγοντας το ανοικτό και κυρτό U να μην είναι ισορροπημένο, έχουμε παράδειγμα υπογραμμικού συναρτησοειδούς $P \geq 0$, το οποίο δεν είναι ημινόρμα.

6)Σελίδα 53-54: Σημειώνεται ότι η ιδιότητα (α) του παραδείγματος 3.3.17 αποδεικνύεται ότι ισχύει (με τον ίδιο τρόπο) και για τον χώρο c_0 των μηδενικών ακολουθιών με την τοπολογία T_P της σύγκλισης κατά σημείο.

7) Σελίδα 55: Από την πρόταση 3.3.18 έπεται ιδιαίτερα ότι αν $\Lambda_1, \Lambda : E \to K$ είναι γραμμικά συναρτησοειδή ώστε $Ker\Lambda_1 \subseteq Ker\Lambda$, τότε υπάρχει $a \in K$ ώστε $\Lambda = a\Lambda_1$ Δηλαδή τα Λ_1 και Λ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

8) Σελίδα 58, άσκηση 10:Το αποτέλεσμα που περιγράφεται στην άσκηση αυτή δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση της τοπικής κυρτότητας του χώρου E . Για ένα παράδειγμα πρβλ. την άσκηση 2 (σελ.77-78) της παραγράφου 3.5, καθώς και την υπόδειξή της.

Παράγραφος 3.4

1)Σελίδα 62, γραμμή 3: Διορθώστε σε, « και Μ τυχών θετικός».

2)Μια ποιο άμεση απόδειξη του γεγονότος ότι ο $(C(\Omega), T_C)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος (παράδειγμα 3.4.1) έπεται και από το κλασσικό προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass.

Θεώρημα (Weierstrass) Έστω $K \subseteq R^d$ συμπαγές τότε η άλγεβρα των περιορισμών των πολυωνύμων $\{p(x_1,....,x_d) : p \text{ πολυώνυμο } d-\text{μεταβλητών}\}$ επί του K είναι πυκνή στο χώρο Banach $C(K)$.

Από το αποτέλεσμα αυτό εύκολα αποδεικνύουμε ότι το σύνολο των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές περιορισμένων επί του Ω είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $(C(\Omega), T_C)$.

3)Ανάλογες παρατηρήσεις ισχύουν και για το παράδειγμα 3.4.3, όπου τα πολυώνυμα $p : I \to R$ με ρητούς συντελεστές είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του χώρου $C^\infty(I)$, με την τοπολογία T που ορίζεται εκεί. Το βασικό επιχείρημα περιέχεται στο ακόλουθο λήμμα που είναι (πάλι) συνέπεια του προσεγγιστικού θεωρήματος του Weierstrass.

Λήμμα . Έστω $-\infty < a < b < +\infty$. Αν $f : [a,b] \to R$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση της κλάσης $C^N (N \geq 1)$, τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n), ώστε για κάθε $k = 1,2,...,N$ να ισχύει $p_n^{(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(k)}$, ομοιόμορφα επί του $[a,b]$.

Η απόδειξη του Λήμματος αφήνεται ως άσκηση. Σημειώνουμε ότι η παρούσα παρατήρηση μπορεί να θεωρηθεί ως (εκτενέστερη) απόδειξη για την άσκηση 10 της παραγράφου 3.5.

4)Στα παραδείγματα 3.4.2 και 3.4.3 χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη γενική παρατήρηση: Έστω (E,T) απειροδιάστατος (τοπικά κυρτός) τ.δ.χ. με την ιδιότητα Heine-Borel τότε η τοπολογία του E δεν επάγεται από νόρμα. Για την απόδειξη πρβλ. Τα θεωρήματα 3.3.15-16 και την παρατήρηση που ακολουθεί το θεώρημα 3.3.16.

Παράγραφος 3.5

1)Σελίδα 71, γραμμή -2. Να γραφεί$\left(E_R, \|\cdot\|\right)$ αντί του $\left(E, \|\cdot\|\right)$.

2)Σελίδα 75, γραμμή 7: Συμπληρώστε την γραμμή 6 με τη φράση « f γραμμικό συναρτησοειδές και».

3)Σχετικά με το πόρισμα 3.5.3 αξίζει να παρατηρήσουμε τον δυϊσμό μεταξύ (συνεχών) γραμμικών συναρτησοειδών $\Lambda : E \to K$ και (συνεχών) ημινορμών $p : E \to [0,+\infty)$. Αν Λ γραμμικό συναρτησοειδές τότε $p = |\Lambda|$ είναι βέβαια ημινόρμα

(παράδειγμα 3.2.3 (1)) και αν p ημινόρμα (με $p \neq 0$) τότε (πόρισμα 3.5.3) υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές Λ (με $\Lambda \neq 0$) ώστε $|\Lambda| \leq p$.

4)Σχετικά με το πόρισμα 3.5.10, παρατηρούμε ότι η απόδειξή του απλοποιείται με τη χρήση του λήμματος 3.3.18. Πράγματι, $Kerf = M_0 \subseteq Ker\left(\Lambda|_M\right)$, συνεπώς υπάρχει $a \in K$ ώστε $\Lambda|_M = af$, επειδή $\Lambda(x_0) = f(x_0) = 1$, έπεται ότι $a = 1$.

Επίσης σημειώνουμε ότι, μια άλλη απόδειξη αυτού του πορίσματος είναι δυνατή, με χρήση της αναλυτικής μορφής του θεωρήματος Hahn-Banach (θεώρημα3.5.2) και της άσκησης 5 της παραγράφου3.3 (Άσκηση).

5)Σχετικά με την άσκηση 4 (γ) (σελίδα 78), σημειώνουμε ότι ο υποκείμενος πραγματικός χώρος E_R του E_C είναι ο $E \times E$ με την πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού περιορισμένη στο R.

Παράγραφος 4.1

1)Σελίδα 82, παρατήρηση (5): Αν ο X είναι απειροδιάστατος χώρος με νόρμα τότε οι περιοχές του $0 \in X$ δεν είναι φραγμένα σύνολα (ούτε και) στην ασθενή τοπολογία, εφόσον τότε ο X θα ήταν χώρος με νόρμα (θεώρημα 3.3.15) και συνεπώς μετρικοποιήσιμος.

2)Σελίδα 82, γραμμή -5: Διορθώστε σε $0 = N_0 < N_1 < \ldots < N_k < \ldots$

3)Σελίδα 84, γραμμή 14: Διορθώστε σε, $\sum_{j=1}^{N_1} \left|x_1(j)\right| \geq \frac{9}{10}$

4)Σελίδα 85: Σχετικά με την απόδειξη του θεωρήματος 4.13 (Mazur), παρατηρούμε ότι το γεγονός ότι το σύνολο $U = \{x \in X : \operatorname{Re}\Lambda(x) < \lambda_1\}$ είναι ασθενώς ανοικτό προκύπτει αμέσως (και) από τον ορισμό της ασθενούς τοπολογίας.

5)Σελίδα 88, γραμμή 6: Διορθώστε σε, $\Phi(x_i^*) \xrightarrow{\tau} \Lambda$.

6)Σελίδα 90, γραμμή 5: Συμπληρώστε την γραμμή 5 με « $\Leftrightarrow \varphi(x_i) \xrightarrow{w^*} \varphi(x)$ ».

7) Σελίδα 90, γραμμή- 7: διορθώστε την ανισότητα σε $\operatorname{Re} x^*(x_0^*) \le \lambda_1 < \lambda_2 \le \operatorname{Re} x_0^{**}(x_0^*)$.

8)Σελιδα 92, γραμμές 2-6: Διορθώστε σε « $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$. Για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε $(y^* o T)(x_n) = y^*(T(x_n)) \to y^*(y)$, εφόσον $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ και $(y^* o T)(x_n) \to (y^* o T)(x) = y^*(T(x))$, εφόσον $y^* o T \in X^*$ και $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.»

9) Στην απόδειξη της Πρότασης4.1.14 χρησιμοποιήσαμε το ακόλουθο στοιχειώδες αποτέλεσμα: Αν $\{A_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια μη κενών υποσυνόλων του R και $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ τότε $\sup A = \sup_{i \in I} (\sup A_i)$.

<u>Παράγραφος 4.2</u>

1)Σχετικά με την παρατήρηση 4.2.5 (2), σημειώνουμε ότι το γεγονός ότι κάθε ασθενώς συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach είναι norm φραγμένο, έπεται και απευθείας όπως στην απόδειξη της κατεύθυνσης « $\Rightarrow$ » του θεωρήματος 4.2.4

2)Το σχόλιο μετά τον ορισμό 4.2.11, συμπληρώνεται ως εξής: Αν $A \subseteq H$ κλειστό και κυρτό, τότε, για κάθε $x \in H$ υπάρχει <u>ακριβώς ένα</u> $y \in A$ έτσι ώστε $d(x, y) = d(x, A)$.

3)Ο ισχυρισμός (α) της άσκησης (1) (σελ. 100), δεν χρειάζεται την υπόθεση ότι ο X είναι χώρος Banach . Η υπόθεση αυτή χρειάζεται στον ισχυρισμό (β) της ίδιας άσκησης. (Γιατί;)

Επίσης σημειώνουμε ότι ο ισχυρισμός (α) είναι συνέπεια της ασθενούς κάτω ημισυνέχειας της νόρμας (πρβλ. και την άσκηση 16 αυτής της παραγράφου)

Αντίστοιχα ο (β) είναι συνέπεια της ασθενούς * κάτω ημισυνέχειας της (δυϊκής) νόρμας του X^*. Περαιτέρω ο (α) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να απλοποιήσει την απόδειξη του θεωρήματος 4.2.12 (Πώς;)

4)Σχετικά με τον ισχυρισμό (β) της άσκησης 14, αυτής της παραγράφου, παρατηρούμε ότι αν ο X είναι χώρος Banach πεπερασμένης διάστασης, τότε βέβαια $X \cong X^*$, αλλά ο X δεν είναι αναγκαία ισομετρικός με τον ℓ_2^n, όπου $n = \dim X$.

Παράγραφος 5.

1)Σχετικά με το παράδειγμα 5.2 (3), σημειώνουμε ότι αν K είναι ανοικτό και κυρτό υποσύνολο ενός τ.δ.χ. E, τότε το K δεν έχει ακραία σημεία. Ιδιαίτερα ο ίδιος ο E δεν έχει ακραία σημεία.

2)Σχετικά με το παράδειγμα 5.4 (4), παρατηρούμε περαιτέρω ότι, αν $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x\in S_X$ ώστε $x=\lambda y+(1-\lambda)z$ με $0<\lambda<1$ και $y,z\in \hat{B}_X$ με $y\neq z$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $[y,z]\subseteq S_X$. (Πρβλ και τις παρατηρήσεις της παραγράφου 3.1 του παρόντος παραρτήματος.) Ειδικότερα παρατηρούμε ότι αν $X=\ell_2^2$, τότε κάθε μη κενό υποσύνολο της $S_X=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ είναι ακραίο υποσύνολο της $\hat{B}_X=\{(x,y):x^2+y^2\leq 1\}$, εφόσον $ex\left(\hat{B}_X\right)=S_X$.

3)Γραμμή -1 , σελίδα 111 (απόδειξη του θεωρήματος Krein – Milman) : Διορθώστε σε

« από τους ισχυρισμούς (β) και (δ) της ίδιας πρότασης έχουμε το συμπέρασμα».

4)Στην παρατήρηση 5.7 (1) της σελίδας 112, προσθέστε και το ακόλουθο σχόλιο: Έτσι στον χώρο $\ell_p, 0<p<1$, κάθε συμπαγές και κυρτό σύνολο έχει ακραία σημεία, εφόσον από την άσκηση 2 (σελίδα 77) της παραγράφου 3.5, ισχύει ότι $\ell_p^*=\ell_\infty$.

5)Σελίδα 114, γραμμή- 7 (παράδειγμα 5.11 (1)): Διορθώστε σε $y(n)=\begin{cases} x(n), n\neq n_0 \\ x(n_0)+\frac{1}{4}, n=n_0\end{cases}$

και $z(n)=\begin{cases} x(n), n\neq n_0 \\ x(n_0)-\frac{1}{4}, n=n_0\end{cases}$.

6)Το παράδειγμα που περιγράφεται στην παρατήρηση 5.16 μας πληροφορεί επιπλέον ότι, αν X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach και $K\subseteq X$ είναι norm συμπαγές τότε η $co(X)$ είναι σχετικά αλλά όχι αναγκαία συμπαγές υποσύνολο του X, όπως συμβαίνει στις πεπερασμένες διαστάσεις.

7)Η άσκηση 7 (θεώρημα Καραθεοδωρή)έπεται ιδιαίτερα ότι στην περίπτωση των πεπερασμένων διαστάσεων, ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο $K\subseteq R^n$, ισούται με την κυρτή θήκη των ακραίων σημείων του, δηλαδή $K=co(ex(K))$ (η κλειστότητα δεν χρειάζεται). Σημειώνουμε ότι και το (σχετιζόμενο και) ενδιαφέρον Λήμμα 5.13 αποδίδεται επίσης στον Καραθεοδωρή.

8)Σχετικά με την άσκηση 10 (σελίδα 126), η υπόδειξη της άσκησης μας πληροφορεί επιπλέον ότι ένας χώρος με νόρμα $\left(X,\|\cdot\|\right)$ είναι γνήσια κυρτός αν και μόνο αν $x,y\in S_X$ και $x\neq y\Rightarrow\|x+y\|<2$. (Πρβλ. και την παρατήρηση (2) παραπάνω).

Ασκήσεις

1) Έστω E διανυσματικός χώρος και $p_1,p_2,\ldots,p_N$, ημινόρμες επί του E . Αποδείξτε ότι:

(α) Οι $\lambda\cdot p_1$ ($\lambda>0$), $p_1+p_2+\ldots+p_N$, $\max\left\{p_1,p_2,\ldots,p_N\right\}$ και $\left(p_1^{\lambda}+p_2^{\lambda}+\ldots+p_N^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$, $1\leq\lambda<+\infty$, είναι ημινόρμες επί του E .

(β) Οι $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\left(|x_2|+|x_3|\right)^2}$ και $\|x\|=\max\left(|x_1\pm x_2|,|x_2\pm x_3|,|x_1\pm x_3|\right)$, όπου , $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)$ είναι νόρμες επί του R^3 . Γενικεύονται αυτές οι νόρμες στον R^n ;

γ) Έστω $\left(X,\|\cdot\|\right)$ και $\left(Y,\|\cdot\|\right)$ χώροι με νόρμα, $a,\beta,\gamma>0$ και $p\in\left[1,+\infty\right)$, τότε ο τύπος,

$\|(x,y)\|=\left[a\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)+\beta\cdot\max\left(\|y\|\cdot\gamma,\|x\|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$ όπου $\left(x,y\right)\in X\times Y$, ορίζει νόρμα επί του $X\times Y$.

[Υπόδειξη. Για το (α): Για την $\left(p_1^{\lambda}+\ldots+p_N^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ χρησιμοποιήστε την ανισότητα Minkowski. Για τα (β) και (γ) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (α).]

2)α) Έστω $\left(E,T\right)$ τοπικά κυρτός χώρος. Ένα κυρτό ισορροπημένο και φραγμένο υποσύνολο του E ονομάζεται δίσκος. Έστω F η γραμμική θήκη ενός δίσκου $D\subseteq E$. Αποδείξτε ότι το συναρτησοειδές του Minkowski $p_D:F\to R$ του D στον F είναι μια νόρμα.

(β) Έστω K κλειστό κυρτό ισορροπημένο και φραγμένο υποσύνολο ενός χώρου Banach X (το K ονομάζεται τότε ένας δίσκος Banach) και Y η γραμμική θήκη του K . Έστω $\|\cdot\|_K$ η νόρμα επί του Y η οποία ορίζεται από το συναρτησοειδές του Minkowski $p_K:Y\to R$

($\|x\|_K=p_K\left(x\right),x\in Y$). Αποδείξτε ότι ο $\left(Y,\|\cdot\|_K\right)$ είναι ένας χώρος Banach. Ποια είναι η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $\hat{B}_Y$ του Y ;

[Υπόδειξη: Για το (β): Έστω $\left(x_n\right)$ ακολουθία Cauchy στον $\left(Y,\|\cdot\|_K\right)$ τότε είναι και Cauchy στον X , έστω $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|}x_0$. Αν U είναι κλειστή σφαίρα (με κέντρο O) στον $\left(Y,\|\cdot\|_K\right)$ τότε είναι και κλειστό υποσύνολο του X . Έστω N φυσικός αριθμός με

$n, m \geq N \Rightarrow x_n - x_m \in U$. Τότε $x_n - x_0 \in U$ για κάθε $n \geq N$ άρα $x_0 \in Y$ και συνεπώς $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_K} x_0$.

3)Έστω $A \subseteq c_{oo}$ (= ο χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών) κυρτό και συμμετρικό σύνολο ώστε $e_n \in A, \forall n \geq 1$ (όπου (e_n) η συνήθης βάση του c_{oo}). Αποδείξτε ότι: (α) Το A είναι απορροφούν υποσύνολο του c_{oo} .

(β) Αν επιπλέον $A \subseteq [-1,1]^N$, τότε το συναρτησοειδές Minkowski p_A του A είναι νόρμα και ισχύει $\|x\|_\infty \leq p_A(x) \leq \|x\|_1 , x \in c_{oo}$.

(Μάλιστα το A είναι ένας δίσκος στον (c_{oo}, T_p) .)

[<u>Υπόδειξη</u>: Για το (α): Έστω $x = \sum_{k=1}^{N} x_k e_k \in c_{oo}$ ώστε $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |x_k| \leq 1$. Τότε $x \in A$, εφόσον το A είναι απόλυτα κυρτό (πρβλ. την άσκηση 1 της παραγράφου 3.1). Για το (β): παρατηρούμε ότι αν $x \in c_{oo}$ τότε , $\|x\|_1 \leq 1 \Rightarrow x \in A \Rightarrow \|x\|_\infty \leq 1$.]

4)Έστω p_o, p_1, p_2 τρία μη συνευθειακά σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου R^2 . Θέτομε $A = \{ p_i - p_j : 0 \leq i \neq j \leq 2 \}$ και $K = c_o(A)$. Αποδείξτε ότι $ex(K) = A$.

[<u>Υπόδειξη</u> : Το K είναι ένα κυρτό εξάγωνο με κορυφές τα σημεία του A .]