5 Το θεώρημα Krein-Milman –Βασικές ιδιότητες συμπαγών και κυρτών συνόλων.

Ορισμός 5.1 Έστω X διανυσματικός χώρος και $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό σύνολο. Ένα σημείο $x \in \mathrm{K}$ λέγεται ακραίο (extreme) σημείο του K, αν δεν είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δύο άλλων σημείων του K. Δηλαδή, αν $0 < \lambda < 1, y, z \in \mathrm{K}$ και

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z \text{ τότε } y = z = x .$$

Το σύνολο των ακραίων σημείων του K συμβολίζεται με $ex(\mathrm{K})$.

Παρατηρούμε ότι: Αν $x \in \mathrm{K}$ τότε, $x \in ex(\mathrm{K})$ αν και μόνο αν το $\mathrm{K} \setminus \{x\}$ είναι κυρτό.

Παραδείγματα 5.2 1) Έστω $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου $R^2 = \ell_2^2$ που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Θεωρούμε το κλειστό τρίγωνο Δ με κορυφές τα $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$

($\Delta = co\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma\} = \{\lambda \mathrm{A} + \mu \mathrm{B} + \nu \Gamma : \lambda + \mu + \nu = 1, \lambda, \mu, \nu \geq 0\}$). Τα ακραία σημεία του Δ είναι οι κορυφές του, δηλαδή $ex(\Delta) = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma\}$. Γενικότερα αν K είναι ένα (κλειστό) κυρτό πολύγωνο στο R^2, όπου με τον όρο κυρτό πολύγωνο εννοούμε την κυρτή θήκη $co(F)$ ενός πεπερασμένου υποσυνόλου F του R^2, τότε τα ακραία σημεία του K είναι οι κορυφές του.

2) Έστω $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του επιπέδου. Τα ακραία σημεία του D είναι τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου $\mathrm{T} = \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = 1\}$, δηλαδή $ex(D) = \mathrm{T}$. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται σε κάθε Ευκλείδειο χώρο $R^n = \ell_2^n, n \geq 1$. (Άσκηση.)

3) Ένα κυρτό σύνολο δεν έχει κατ' ανάγκη ακραία σημεία. Για παράδειγμα αν K είναι μια ευθεία ή ένα ημιεπίπεδο (κλειστό ή ανοικτό) ή ακόμη ένας ανοικτός δίσκος του Ευκλείδειου επιπέδου, τότε το K δεν έχει ακραία σημεία.

Η έννοια του ακραίου σημείου έχει την ακόλουθη χρήσιμη γενίκευση.

Ορισμός 5.3 Έστω X διανυσματικός χώρος και $\mathrm{K} \subseteq X$ κυρτό. Ένα υποσύνολο $A \neq \varnothing$ του K λέγεται ακραίο υποσύνολο του K αν , οποτεδήποτε ένα σημείο του A είναι εσωτερικό ενός ευθύγραμμου τμήματος του K, τότε αναγκαία τα άκρα του τμήματος ανήκουν στο A. Αναλυτικά η συνθήκη εκφράζεται ως εξής:

Αν $x, y \in \mathrm{K}, 0 < \lambda < 1$ και $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$ τότε $x, y \in A$.

Παρατηρούμε ότι αν $x \in \mathrm{K}$, τότε το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ακραίο σύνολο του K ακριβώς όταν το x είναι ακραίο σημείο του K. Έτσι τα ακραία σημεία ενός κυρτού συνόλου είναι τα ακραία μονοσύνολα του.

<u>Παραδείγματα</u> 5.4 1) Έστω K ένα κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X, τότε το ίδιο το K είναι ακραίο υποσύνολο του K. Επίσης κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου $ex(\mathrm{K})$ είναι ακραίο υποσύνολο του K (βέβαια ενδέχεται- όπως διαπιστώσαμε – να ισχύει $ex(\mathrm{K}) = \varnothing$.). Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού έστω $\varnothing \neq A \subseteq ex(\mathrm{K})$ και $x \in A$ ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ με $0 < \lambda < 1$ και $y, z \in \mathrm{K}$, επειδή $x \in ex(\mathrm{K})$ έπεται ότι $x = y = z \in A$, συνεπώς το A είναι ακραίο υποσύνολο του K.

2) Έστω $\mathrm{K} = [a,b]$ ένα ευθύγραμμο τμήμα στον διανυσματικό χώρο X

($\mathrm{K} = \{\lambda a + (1-\lambda) b : \lambda \in [0,1]\}$). Τότε τα ακραία υποσύνολα του K είναι βέβαια το ίδιο το K και κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου $ex(\mathrm{K}) = \{a,b\}$.

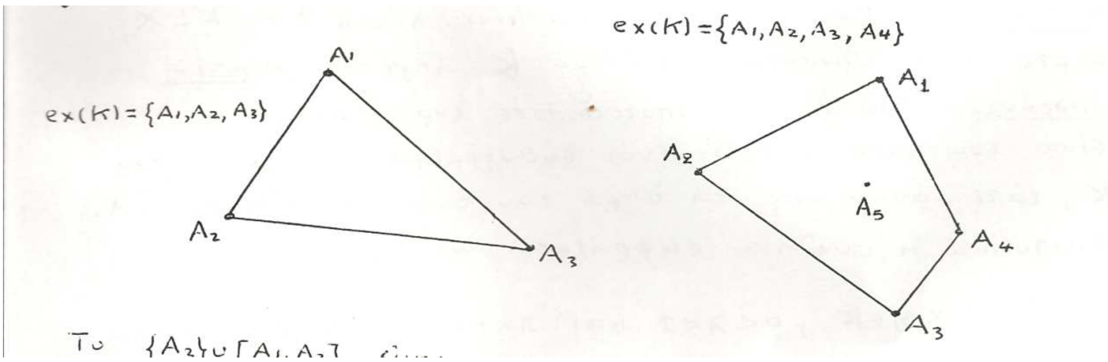
3) Έστω K ένα κλειστό κυρτό πολύγωνο του Ευκλείδειου επιπέδου R^2, (π.χ. K είναι ένα τρίγωνο). Τα ακραία υποσύνολα του K είναι τα ακόλουθα:

(α) Το ίδιο το K.

(β) Οι κορυφές του K και κάθε υποσύνολο των κορυφών του.

(γ) Κάθε πλευρά του K (η οποία περιέχει τα άκρα της) και κάθε υποσύνολο του K το οποίο είναι ένωση πλευρών είτε κορυφών του K.

$ex(\mathrm{K}) = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\}$ $\qquad$ $ex(\mathrm{K}) = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4\}$



Το $\{\mathrm{A}_2\} \cup [\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_3]$ είναι ακραίο υποσύνολο του $\mathrm{K} = co\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3\}$ Το $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ δεν είναι ακραίο υποσύνολο του K.	Το $[\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_4] \cup [\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3]$ είναι ακραίο υποσύνολο του $\mathrm{K} = co\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5\}$ $= co\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4\}$

4) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τότε η $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ είναι ακραίο υποσύνολο της $\hat{B}_X$. Πράγματι, έστω $\|x\| = 1$. Αν $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ με $0 < \lambda < 1$ και $y, z \in \hat{B}_X$, τότε

$1 = \|x\| = \|\lambda y + (1-\lambda) z\| \leq \lambda \|y\| + (1-\lambda)\|z\| \leq \lambda + 1 - \lambda = 1$. Κατά συνέπεια $\lambda \|y\| + (1-\lambda)\|z\| = 1$, από όπου συμπεραίνουμε ότι $\|y\| = \|z\| = 1$.

Σημείωση 5.4.1 Στο παράδειγμα (4) χρησιμοποιήσαμε την απλή παρατήρηση ότι:

Αν $a, b \in C, \quad |a|, |b| \leq 1, \quad 0 < \lambda < 1$ και $1 = |\lambda \alpha + (1-\lambda) b|$ τότε $|a| = |b| = 1$ και $a = b$.

(Άσκηση) (Πρβλ. επίσης και το παράδειγμα 5.11 (3).)

Πρόταση 5.5 Έστω X διανυσματικός χώρος και $K \subseteq X$ κυρτό σύνολο. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Αν $x \in K$ τότε το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του K αν και μόνο αν το x είναι ακραίο σημείο του K.

(β) Αν A ακραίο και κυρτό υποσύνολο του K και B ακραίο υποσύνολο του A, τότε το B είναι ακραίο υποσύνολο του K. Ειδικότερα, αν το x είναι ακραίο σημείο του A τότε το x είναι ακραίο σημείο του K.

(γ) Αν $(A_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια ακραίων υποσυνόλων του K τότε και η ένωση $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι ακραίο υποσύνολο του K. Επίσης, αν $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, τότε και η τομή $\bigcap_{i \in I} A_i$ είναι ακραίο υποσύνολο του K.

(δ) Αν $\Lambda : X \to R$ ¨είναι $R-$γραμμικό συναρτησοειδές και υπάρχει $x_0 \in K$ ώστε $\Lambda(x_0) = \sup\{\Lambda(x) : x \in K\}$, τότε τα σύνολο $A = \{y \in K : \Lambda(y) = \Lambda(x_0)\}$ είναι ακραίο και κυρτό υποσύνολο του K.

Απόδειξη. Οι ισχυρισμοί (α) – (γ) αφήνονται ως άσκηση. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό (δ). Προφανώς το A είναι κυρτό ως τομή της μεταφοράς κατά x_0 του υπερεπιπέδου $Ker\Lambda$ με το K, δηλ., $A = (x_0 + Ker\Lambda) \bigcap K$. Έστω $y, z \in K$ και $0 < \lambda < 1$ ώστε $\lambda y + (1-\lambda) z \in A$ τότε $\Lambda(x_0) = \Lambda(\lambda y + (1-\lambda) z) = \lambda \Lambda(y) + (1-\lambda) \Lambda(z)$.

Ας υποθέσουμε ότι $\{y, z\} \underset{\neq}{\not\subset} A$ και έστω ότι π.χ. το $y \notin A$. Τότε $\Lambda(y) \neq \Lambda(x_0)$ συνεπώς $\Lambda(y) < \Lambda(x_0)$ και επειδή $\Lambda(z) \leq \Lambda(x_0)$ θα έχουμε ότι

$\Lambda(x_0) = \lambda \Lambda(y) + (1-\lambda) \Lambda(z) < \lambda \Lambda(x_0) + (1-\lambda) \Lambda(x_0) = \Lambda(x_0)$, άτοπο.

…………………………………………

<u>Σημείωση</u>. Έστω K κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου και A ένα ακραίο και κυρτό υποσύνολο του K, τότε το A ονομάζεται και έδρα ή (face) του K. Για παράδειγμα οι «έδρες» ενός τριγώνου στο R^2 είναι οι πλευρές του και οι κορυφές του. Η έννοια της έδρας ενός κυρτού συνόλου είναι ποιο φυσιολογική στην περίπτωση του $R^3\left(=\ell_2^3\right)$ όπου οι «έδρες» ενός κυρτού πολύεδρου(π.χ. ενός τετραέδρου) είναι οι συνήθεις έδρες, οι ακμές του αλλά και οι κορυφές του.

……………………………………………..

Αν το K είναι ένα κυρτό πολύγωνο στο Ευκλείδειο επίπεδο R^2 (π.χ. τρίγωνο, παραλληλόγραμμο η γενικότερα κυρτό $n-$γωνο, $n\geq 3$) τότε είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το $ex(K)$ είναι το σύνολο των κορυφών του και περαιτέρω ότι ισχύει $K=co\big(ex(K)\big)$

(πρβλ. το παράδειγμα 5.4 (3)).

Πρόκειται στη συνέχεια να αποδείξουμε ένα πολύ γενικότερο και σημαντικό αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα</u> 5.6 (Krein-Milman) Έστω X ένας (Hausdorff) τοπικά κυρτός χώρος. Αν το K είναι μη κενό κυρτό και <u>συμπαγές</u> υποσύνολο του X τότε το K είναι η κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου των ακραίων σημείων του. Δηλαδή

$$K=c\ell co\big(ex(K)\big)$$

(Ιδιαίτερα το K <u>έχει</u> ακραία σημεία.)

<u>Απόδειξη</u> Υποθέτομε (για απλότητα) ότι ο X είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος. Θα μας χρειασθεί ο ακόλουθος ισχυρισμός ο οποίος είναι συνέπεια του Λήμματος του Zorn.

<u>Ισχυρισμός</u>. Για κάθε μη κενό ακραίο, κυρτό και κλειστό υποσύνολο $S\subseteq K$ ισχύει ότι, $S\bigcap ex(K)\neq\varnothing$.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού</u>. Έστω $\mathcal{P}$ η οικογένεια όλων των μη κενών ακραίων κλειστών και κυρτών υποσυνόλων του K. Επειδή $K\in\mathcal{P}$ έχουμε ότι $\mathcal{P}\neq\varnothing$. Παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(α) Η τομή S των μελών κάθε μη κενής υποοικογένειας της $\mathcal{P}$ ανήκει στην $\mathcal{P}$ εκτός αν $S=\varnothing$.

(β) Αν $S\in\mathcal{P}$, $\Lambda\in X^*$ και $\mu=\max\{\Lambda(x):x\in S\}$ τότε το $S_\Lambda=\{x\in S:\Lambda(x)=\mu\}$ ανήκει στην $\mathcal{P}$.

Το (α) έπεται εύκολα από τον ισχυρισμό (γ) της Πρότασης 5.5. Για το (β) παρατηρούμε ότι επειδή το S συμπαγές και η Λ συνεχής συνάρτηση υπάρχει $x_0\in S$ ώστε $\Lambda(x_0)=\mu$, από τον ισχυρισμό (δ) της ίδιας Πρότασης έχουμε το συμπέρασμα.

Επιλέγομε τώρα κάποιο μέλος S της p , και θέτομε

$$p' = \{S' \in p : S' \subseteq S\}.$$

Επειδή $S \in p'$ το $S \neq \varnothing$. Ορίζουμε μια σχέση (μερικής) διάταξης στο p' ως εξής

$$S_1 \leq S_2 \Leftrightarrow S_2 \subseteq S_1$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το μερικά διατεταγμένο σύνολο (p' , $\leq$) είναι επαγωγικό (αν C είναι αλυσίδα στο p' τότε η C έχει προφανώς την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, επειδή τα μέλη της C είναι κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς K, έπεται ότι $\mathrm{M} = \bigcap C \neq \varnothing$. Έτσι το M είναι ένα άνω φράγμα της C). Από το Λήμμα του Zorn υπάρχει ένα μεγιστικό στοιχείο έστω M_0 στο p' δηλαδή, αν $S' \in p'$ και $\mathrm{M}_0 \leq S'$ τότε $S' = \mathrm{M}_0$

Έπεται τότε ότι δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του M_0 που να ανήκει στην p . Από το γεγονός αυτό και το (β) συμπεραίνουμε ότι κάθε $f \in X^*$ είναι σταθερή συνάρτηση επί του M_0. Επειδή ο X είναι τοπικά κυρτός και άρα ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X , το M_0 θα έχει μόνο ένα σημείο. Έτσι από τον ισχυρισμό (α) της πρότασης 5.5 αν $\mathrm{M}_0 = \{x\}$ τότε το x θα είναι ένα ακραίο σημείο του K, το οποίο ανήκει στο S .

Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος. Θέτομε $\mathrm{H} = co\left(ex(\mathrm{K})\right)$. Είναι σαφές ότι το $\mathrm{H} \neq \varnothing$ και ότι $\overline{\mathrm{H}}$ κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του K. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathrm{K}$ ώστε $x_0 \notin \overline{\mathrm{H}}$. Από το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $\Lambda \in X^*$ ώστε $\Lambda(x) < \Lambda(x_0)$ για κάθε $x \in \overline{\mathrm{H}}$. Θέτομε

$$\mathrm{K}_\Lambda = \{x \in \mathrm{K} : \Lambda(x) = \mu\}, \text{ όπου } \mu = \max\{\Lambda(x) : x \in \mathrm{K}\} \geq \Lambda(x_0).$$

Έπεται τότε από το (β) ότι $\mathrm{K}_\Lambda \in p$.Επειδή το K_Λ δεν τέμνει (προφανώς) το $\overline{\mathrm{H}}$, οπότε ούτε το $ex(\mathrm{K}) \subseteq \overline{\mathrm{H}}$, καταλήγουμε σε αντίφαση.

…………………………………………….

Παρατήρηση 5.7 1) Το θεώρημα Krein – Milman ισχύει και με την ασθενέστερη υπόθεση ότι ο X είναι ένας Hausdorff τ.δ.χ. ώστε ο συζυγής του X^* διαχωρίζει τα σημεία του (πρβλ. [R] σελίδα 70-71).

2) Αν $0 < p < 1$, τότε στον χώρο L_p, ο οποίος μελετήθηκε στο παράδειγμα 3.4.4, υπάρχει συμπαγές και κυρτό σύνολο το οποίο δεν έχει ακραία σημεία ([F-H-H-M-Z] σελίδα 110). Βέβαια αυτό δεν αντιφάσκει με το θεώρημα Krein- Milman αφού $L_p^* = \{0\}$.

Άμεση συνέπεια των θεωρημάτων Krein- Milman και Alaoglou είναι και το ακόλουθο.

<u>Θεώρημα</u> 5.8 Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε

$$\hat{B}_{X^*} = c\ell_{w^*} co\left(ex\hat{B}_{X^*} \right).$$

Δηλαδή, η $\hat{B}_{X^*}$ ισούται με την ασθενώς* κλειστή κυρτή θήκη των ακραίων σημείων της.

<u>Απόδειξη</u> Η $\hat{B}_{X^*}$ είναι από το θεώρημα του Alaoglou ένα συμπαγές και βέβαια κυρτό σύνολο. Έτσι το συμπέρασμα έπεται αμέσως από το θεώρημα Krein- Milman.

<u>Πόρισμα</u> 5.9 Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach. Τότε

$$\hat{B}_X = c\ell_w co\left(ex\hat{B}_X \right)$$

<u>Απόδειξη</u> Η $\hat{B}_X$ είναι ένα ασθενώς συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του X . Από το θεώρημα Krein- Milman έπεται το συμπέρασμα.

…………………………………………..

Στις ασκήσεις (θα διατυπώσουμε και) θα περιγράψουμε την απόδειξη κάποιων χρήσιμων αποτελεσμάτων σχετικών με το θεώρημα Krein- Milman όπως ένα είδος μερικού αντιστρόφου του θεωρήματος Krein- Milman (άσκηση 5), καθώς και την (ισχυροποιημένη) μορφή του θεωρήματος στην περίπτωση των πεπερασμένων διαστάσεων που είναι το θεώρημα Καραθεοδωρή (άσκηση 7).

Ακολουθούν μια βοηθητική Πρόταση και μια σειρά παραδειγμάτων υπολογισμού των ακραίων σημείων σφαιρών κλασσικών χώρων Banach.

<u>Πρόταση</u> 5.10 Έστω $\left(X, \|\cdot\| \right)$ χώρος με νόρμα. Τότε, (α) $ex\left(\hat{B}_X \right) \subseteq S_X$ και

(β) Αν $x \in ex\left(\hat{B}_X \right)$ τότε $cx \in ex\left(\hat{B}_X \right)$ για κάθε $c \in K$ με $|c| = 1$.

<u>Απόδειξη</u> (α) Έστω $\|x\|<1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: (ι) $x=0$, τότε,

$0=x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}(-y)$ για κάθε $y\in X$ με $\|y\|\leq 1$.

(ιι) $x\neq 0$, τότε $x=\lambda y+(1-\lambda)0$, όπου $y=\frac{x}{\|x\|}$ και $\lambda=\|x\|$. Έπεται ότι το x δεν μπορεί να είναι ακραίο σημείο της $\hat{B}_X$.

(β) Έστω $x\in ex\left(\hat{B}_X\right)$ και $c\in K$ με $|c|=1$. Αν το cx δεν ήταν ακραίο σημείο της $\hat{B}_X$ τότε, $cx=\lambda z+(1-\lambda)y$ για $0<\lambda<1$ και $z,y\in\hat{B}_X$. Κατά συνέπεια, $x=\lambda\frac{z}{c}+(1-\lambda)\frac{y}{c}$ και επειδή $\frac{z}{c},\frac{y}{c}\in\hat{B}_X$ έπεται ότι $x\notin ex\left(\hat{B}_X\right)$, άτοπο.

<u>Παραδείγματα</u> 5.11 1) $ex\left(\hat{B}_{c_0}\right)=\varnothing$.

Έστω $x=(x(n))\in c_0$ με $\|x\|=1$. Επειδή $x(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ υπάρχει $n_0\in N:|x(n_0)|<\frac{1}{4}$.

Θέτομε, $y(n)=\begin{cases}x(n), & n\neq n_0\\ x(n)+\frac{1}{4}, & n=n_0\end{cases}$ και $z(n)=\begin{cases}x(n), & n\neq n_0\\ x(n)-\frac{1}{4}, & n=n_0\end{cases}$.

Οι ακολουθίες , $y=(y(n))$ και $z=(z(n))$ είναι βέβαια μηδενικές και $\|z\|=\|y\|=1$. Επι πλέον $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$ με $y\neq z$. Επομένως το x δεν μπορεί να είναι ακραίο σημείο της $\hat{B}_{c_0}$.

2) $ex\left(\hat{B}_{\ell_1}\right)=\left\{\lambda e_n:|\lambda|=1,n\in N\right\}$.

Υποθέτομε (για απλότητα) ότι ο ℓ_1 είναι διανυσματικός χώρος επί του R, δηλαδή,

$\ell_1=\left\{(a_n)\subseteq R:\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<+\infty\right\}$.

(I) $\{\pm e_n:n\in N\}\subseteq ex\left(\hat{B}_{\ell_1}\right)$.

Αρκεί από την πρόταση 5.10 να αποδείξουμε ότι $e_n \in ex\left(\hat{B}_{\ell_1}\right)$ για κάθε $n \geq 1$. Έστω

$n_0 \in N$, $x = \left(x(n)\right), y = \left(y(n)\right)$ στοιχεία της $\hat{B}_{\ell_1}$ και $\lambda \in (0,1)$ ώστε $e_{n_0} = \lambda x + (1-\lambda) y$

Θα αποδείξουμε ότι $e_{n_0} = x = y$ και άρα το e_{n_0} θα είναι ακραίο σημείο της $\hat{B}_{\ell_1}$.

Παρατηρούμε ότι $\lambda x(n) + (1-\lambda) y(n) = \begin{cases} 0, & n \neq n_0 \\ 1, & n = n_0 \end{cases}$.

Επειδή $\left|x(n_0)\right| \leq \|x\|_1 \leq 1$, $\left|y(n_0)\right| \leq \|y\|_1 \leq 1$ και $\lambda x(n_0) + (1-\lambda) y(n_0) = 1$, έπεται ότι $x(n_0) = y(n_0) = 1$. (Πρβλ. την Σημείωση 5.4.1). Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty}\left|x(n)\right| = \|x\|_1 \leq 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\left|y(n)\right| = \|y\|_1 \leq 1$, έπεται ότι $x(n) = 0 = y(n)$ για κάθε $n \neq n_0$. Κατά συνέπεια $e_{n_0} = x = y$.

(II) $ex\left(\hat{B}_{\ell_1}\right) \subseteq \left\{\pm e_n : n \in N\right\}$

Υποθέτομε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότι υπάρχει $x \in ex\left(\hat{B}_{\ell_1}\right)$ με $x \neq \pm e_n$ για κάθε $n \geq 1$. Όπως γνωρίζουμε $\|x\|_1 = 1$ (Πρόταση 5.10). Έστω $x = \left(x(n)\right)$, θέτομε $n_0 = \min\left\{n \in N : x(n) \neq 0\right\}$. Συνεπώς $x(n) = 0$ για κάθε $n = 1, 2, ..., n_0 - 1$. Επειδή $x \neq \pm e_n$ για κάθε $n \geq 1$ έχουμε ότι $0 < \left|x(n_0)\right| < 1$ (αν $\left|x(n_0)\right| = 1$ τότε κατ' ανάγκη $x = e_{n_0}$ ή $x = -e_{n_0}$, άτοπο). Θέτομε $\lambda = \left|x(n_0)\right|$ και ορίζουμε $y = \left(y(n)\right)$ με

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n \leq n_0 \\ x(n), & n > n_0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι, $\dfrac{\|y\|}{1-\lambda} = \dfrac{1}{1-\lambda}\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left|x(n)\right| = \dfrac{1-\lambda}{1-\lambda} = 1$.

Θέτομε τώρα, $y_1 = e_{n_0}$ αν $x(n_0) > 0$ ή $y_1 = -e_{n_0}$ αν $x(n_0) < 0$ και $y_2 = \dfrac{y}{1-\lambda}$. Τότε $x = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$ με $0 < \lambda < 1$, άτοπο.

3) Αν $1 < p < +\infty$, τότε $ex\left(\hat{B}_{\ell_p}\right) = S_{\ell_p}$.

Έστω $x \in \ell_p$ με $\|x\|_p = 1$. Υποθέτομε ότι υπάρχουν $y, z \in \hat{B}_{\ell_p}$ και $t \in (0,1)$ ώστε $x = ty + (1-t)z$. Είναι βέβαια τότε σαφές ότι $\|y\|_p = \|z\|_p = 1$.

Επίσης έχουμε ότι

$1 = \|x\|_p = \|ty + (1-t)z\|_p \le t\|y\|_p + (1-t)\|z\|_p \le t + (1-t) = 1$, συνεπώς $\|ty + (1-t)z\|_p = \|ty\|_p + \|(1-t)z\|_p$.

Επειδή έχουμε ισότητα στην ανισότητα Minkowski, έπεται ότι τα διανύσματα $(1-t)z$ και ty είναι ομόρροπα, δηλαδή υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $(1-t)z = \lambda(ty) = (\lambda t)y$. Έπεται ότι $1-t = \lambda t$ και συνεπώς $z = y$.

4) $ex\left(\hat{B}_{\ell_\infty}\right) = \left\{x \in \ell_\infty : |x(n)| = 1, n \ge 1\right\}$.

Υποθέτουμε για απλότητα ότι $K = R$.

(I) $ex\left(\hat{B}_{\ell_\infty}\right) \subseteq \left\{x \in \hat{B}_{\ell_\infty} : |x(n)| = 1, n \ge 1\right\}$.

Έστω $x = (x(n))$ ακραίο σημείο της $\hat{B}_{\ell_\infty}$. Ας υποθέσομε ότι υπάρχει $n_0 \in N$ ώστε $|x(n_0)| < 1$. Τότε υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ ώστε $x(n_0) = \lambda(-1) + (1-\lambda)1 = 1 - 2\lambda$.

Θέτομε $y(n) = \begin{cases} x(n), n \ne n_0 \\ -1, \quad n = n_0 \end{cases}$ και $z(n) = \begin{cases} x(n), n \ne n_0 \\ 1, \qquad n = n_0 \end{cases}$.

Προφανώς τα διανύσματα $y = y(n)$ και $z = z(n)$ ανήκουν στην $\hat{B}_{\ell_\infty}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda y(n) + (1-\lambda)z(n) = \begin{cases} \lambda x(n) + (1-\lambda)x(n) = x(n), & n \ne n_0 \\ \lambda(-1) + (1-\lambda)1 = 1 - 2\lambda = x(n_0), & n = n_0 \end{cases}.$$

Κατά συνέπεια $x(n) = \lambda y(n) + (1-\lambda)z(n), \quad n \ge 1$. Άρα $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ με $\lambda \in (0,1)$ και $y, z \in \hat{B}_{\ell_\infty}$, άτοπο. Έπεται ότι, $|x(n)| = 1$ για κάθε $n \ge 1$

(II) $\left\{x \in \ell_\infty : |x(n)| = 1, n \ge 1\right\} \subseteq ex\left(\hat{B}_{\ell_\infty}\right)$

Έστω $x=(x(n))\in \ell_\infty$ ώστε $|x(n)|=1$ για κάθε $n\geq 1$. Ας υποθέσουμε ότι

$x=\lambda y+(1-\lambda)z$, όπου $y,z\in \hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty}$ και $\lambda\in(0,1)$. Τότε έχουμε για κάθε $n\geq 1$,

$1=|x(n)|=|\lambda y(n)+(1-\lambda)z(n)|$.

Επειδή $0\leq |y(n)|,|z(n)|\leq 1$, έπεται από την Σημείωση 5.4.1 ότι $y(n)=z(n)$ για κάθε $n\geq 1$. Άρα $x=y=z$ και το x είναι ακραίο σημείο της $\hat{\mathrm{B}}_{\ell_\infty}$.

5) $ex\left(\hat{\mathrm{B}}_{L_1}\right)=\varnothing$.

Πράγματι, θα αποδείξουμε ότι κάθε $f\in L_1=L_1[0,1]$ με $\|f\|_1=1$ μπορεί να γραφεί ως $f=\dfrac{g+h}{2}$, όπου $\|g\|_1=\|h\|_1=1$ και $g\neq h$.

Έστω λοιπόν $f\in L_1$ με $\|f\|_1=1$. Θεωρούμε $x\in(0,1)$ ώστε $\int_0^x |f(t)dt|=\dfrac{1}{2}$ και θέτομε

$h=2f\cdot x_{[0,x]}$, $g=2f\cdot x_{(x,1]}$.

Παρατηρούμε ότι $\int_0^1 |g(t)|dt=\int_0^1 |h(t)|dt=1$, δηλαδή $\|g\|_1=\|h\|_1=1$ και $f=\dfrac{g+h}{2}$.

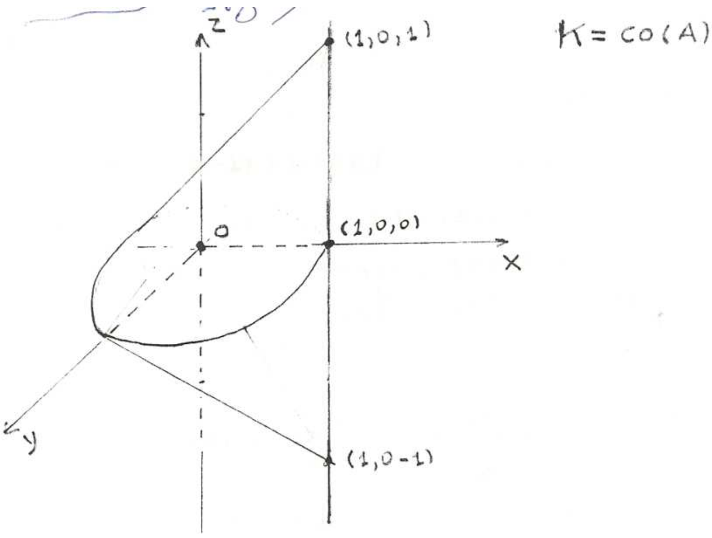
Εφόσον $g\neq h$, έπεται ότι η f δεν μπορεί να είναι ακραίο σημείο της $\hat{\mathrm{B}}_{L_1}$.

<u>Παρατήρηση</u> 5.12 1) Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα του χώρου c_0 αλλά και του L_1 δεν έχει ακραία σημεία όπως έπεται από τα παραδείγματα 5.11 (1) και (5). Έπεται από το θεώρημα 5.8 ότι κανείς από αυτούς τους χώρους δεν είναι (γραμμικά) ισομετρικός με τον συζυγή ενός χώρου με νόρμα.

2) Το σύνολο των ακραίων σημείων ενός συμπαγούς και κυρτού συνόλου δεν είναι αναγκαία συμπαγές. Αυτό φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα: Έστω K η κυρτή θήκη στον R^3 του συνόλου

$\mathrm{A}=\{(1,0,1),(1,0,-1)\}\cup\{(x,y,0):x^2+y^2=1\}$.

Το K είναι βέβαια συμπαγές υποσύνολο του R^3 (ένας διπλός κώνος). Αλλά το $ex(\mathrm{K}) = \mathrm{A} \setminus \{(1,0,0)\}$ δεν είναι συμπαγές.



Σημειώνουμε ότι ένα παράδειγμα όπως το προηγούμενο δεν μπορεί να βρεθεί στο Ευκλείδειο επίπεδο. Πράγματι αποδεικνύεται ότι αν K είναι συμπαγές και κυρτό (μη κενό) υποσύνολο του R^2 τότε το $ex(\mathrm{K})$ είναι κλειστό και άρα συμπαγές υποσύνολο του K.

(Άσκηση 12)

Από την άλλη μεριά, όπως θα αποδείξουμε, η κυρτή θήκη ενός συμπαγούς υποσυνόλου του Ευκλείδειου χώρου $R^n \left(= \ell_2^n\right)$ είναι συμπαγές (και κυρτό) σύνολο.

<u>Λήμμα</u> 5.13 Αν $\mathrm{E} \subseteq R^n$ και $x \in co(\mathrm{E})$ τότε υπάρχει $\mathrm{E}' \subseteq \mathrm{E}$ με $|\mathrm{E}'| \leq n+1$ ώστε $x \in co(\mathrm{E}')$.

<u>Απόδειξη</u> Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι αν $k > n$ και αν $x = \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i$ με $x_i \in R^n$, $t_i > 0$ και $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$ τότε το x είναι κυρτός συνδυασμός k το πλήθος από τα x_i.

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\varphi : R^{k+1} \ni (a_1,...,a_{k+1}) \to \varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1} a_i \right) \in R^{n+1}$$

Επειδή $k > n$, έπεται ότι $Ker\varphi \neq \{0\}$. Έστω λοιπόν $(a_1,...,a_{k+1}) \in Ker\varphi$ με $(a_1,...,a_{k+1}) \neq 0$. Θεωρούμε $i_0 \leq k+1$ ώστε $\frac{|a_{i_0}|}{t_{i_0}} = \max\left\{ \frac{|a_i|}{t_i} : i = 1,2,...,k+1 \right\}$, άρα $a_{i_0} \neq 0$. Επιλέγομε $\lambda \in R$ ώστε $\lambda a_{i_0} = t_{i_0}$ και θέτομε $c_i = t_i - \lambda a_i$, $i = 1,2,...,k+1$. Τότε

$c_i \geq 0$ για κάθε $i = 1,2,\ldots,k+1$.(Πράγματι, $\frac{a_i}{t_i} \leq \frac{|a_i|}{t_i} \leq \frac{|a_{i_0}|}{t_{i_0}}$, αν $a_i = 0$ προφανώς

$c_i = t_i > 0$, αν $a_i \neq 0$, τότε $\frac{t_i}{|a_i|} \geq \frac{t_{i_0}}{|a_{i_0}|} \Rightarrow t_i \geq a_i \frac{t_{i_0}}{a_{i_0}} = \lambda a_i$) και $c_{i_0} = 0$.

Έπεται ότι, $\sum_{i=1}^{k+1} c_i = \sum_{i=1}^{k+1} t_i - \lambda \sum_{i=1}^{k+1} a_i = 1 - \lambda \cdot 0 = 1$ ($\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 0$, εφόσον $\varphi(a_1,\ldots,a_{k+1}) = (0,0)$)

και άρα $x = \sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{k+1} c_i x_i$.

<u>Πρόταση</u> 5.14 Έστω $\mathrm{K} \subseteq R^n$ συμπαγές σύνολο τότε η $co(\mathrm{K})$ είναι συμπαγές σύνολο.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $S_n = \left\{ (t_1,\ldots,t_n) \in R^n : t_i \geq 0, i = 1,\ldots,n \text{ και } \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$. Τότε το S_n είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς κύβου $[0,1]^n$ και άρα συμπαγές σύνολο.

Από το Λήμμα 5.13, $x \in co(\mathrm{K})$ αν και μόνο αν $x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i$ για κάποιο $t = (t_1,\ldots,t_{n+1}) \in S_{n+1}$ και $x_1,\ldots,x_{n+1} \in \mathrm{K}$.

Έπεται ότι η συνεχής απεικόνιση

$$F : S_{n+1} \times \mathrm{K}^{n+1} \to co(\mathrm{K}) : F(t_1,\ldots,t_{n+1},x_1,\ldots,x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i$$

είναι επί της κυρτής θήκης $co(\mathrm{K})$ του K και άρα η $co(\mathrm{K})$ είναι συμπαγές σύνολο.

…………………………………………..

Στην συνέχεια πρόκειται να εξετάσουμε πως γενικεύεται το προηγούμενο αποτέλεσμα σε απειροδιάστατους χώρος Banach.

Θα χρειαστούμε την ακόλουθη απλή <u>παρατήρηση</u>:

Η κυρτή θήκη $co(F)$ ενός πεπερασμένου υποσυνόλου F ενός Hausdorff τ.δ.χ. X είναι συμπαγές σύνολο. (Έστω, $F = \{x_1,\ldots,x_n\} \subseteq X$, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\varphi : S_n \to co(F) : \varphi(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ είναι συνεχής και επί).

Επίσης υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (M,d) λέγεται ότι είναι <u>ολικά φραγμένο</u>, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το A μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος ανοικτών σφαιρών του χώρου (M,d) ακτίνας ε. Αν ο χώρος (M,d) είναι πλήρης τότε κάθε ολικά φραγμένο υποσύνολο A του M είναι σχετικά συμπαγές, δηλαδή η κλειστότητά του $c\ell A$ είναι συμπαγές υποσύνολο του (M,d).

<u>Θεώρημα</u> 5.15 (Θεώρημα συμπάγειας του Mazur) Έστω X χώρος Banach και K norm συμπαγές υποσύνολο του X τότε η κυρτή θήκη $co(\mathrm{K})$ είναι norm σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X (δηλαδή η $c\ell_{\|\cdot\|}co(\mathrm{K})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X).

<u>Απόδειξη</u>. Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι (εφόσον ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος) η $co(\mathrm{K})$ είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού το K είναι συμπαγές υπάρχει $F\subseteq \mathrm{K}$ πεπερασμένο ώστε $\mathrm{K}\subseteq F+\varepsilon \hat{\mathrm{B}}_X$ ($=\bigcup\left\{\hat{\mathrm{B}}_X(y,\varepsilon): y\in F\right\}$). Άρα

$\mathrm{K}\subseteq co(F)+\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X$ και επειδή το $co(F)+\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X$ είναι κυρτό έπεται ότι

$co(\mathrm{K})\subseteq co(F)+\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X$. Όμως το σύνολο $co(F)$ είναι συμπαγές ως κυρτή θήκη πεπερασμένου συνόλου. Επομένως υπάρχει $F_1\subseteq co(F)$ πεπερασμένο ώστε

$co(F)\subseteq F_1+\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X$. Έπεται ότι,

$$co(\mathrm{K})\subseteq co(F)+\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X\subseteq\left(F_1+\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X\right)+\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X=F_1+2\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X.$$

(Μάλιστα ισχύει $\overline{co(\mathrm{K})}\subseteq F_1+2\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X$, εφόσον το $F_1+2\varepsilon\hat{\mathrm{B}}_X$ είναι κλειστό σύνολο.)

Άρα το σύνολο $co(\mathrm{K})$ είναι ολικά φραγμένο στον χώρο X.

……………………………………………..

<u>Παρατήρηση</u> 5.16 Η υπόθεση της πληρότητας του χώρου X είναι αναγκαία (το αποτέλεσμα δεν ισχύει γενικά σε χώρο με νόρμα). Έστω $X=c_{00}$ (ο χώρος των τελικά μηδενικών ακολουθιών πραγματικών αριθμών) εφοδιασμένος με την sup-norm $\|\cdot\|_\infty$ και (e_n) η συνήθης βάση Hamel του X. Υπενθυμίζουμε ότι η πλήρωση του $\left(c_{00},\|\cdot\|_\infty\right)$ είναι ο χώρος Banach c_0. Θέτομε $x_n=\frac{1}{n}e_n$, $n\geq 1$ και $\mathrm{K}=\{x_n,n\geq 1\}\bigcup\{0\}$. Τότε $\|x_n\|_\infty=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ και έτσι το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Αλλά η $co(\mathrm{K})$ δεν είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X. Για να το αποδείξουμε θεωρούμε μια ακολουθία (a_n) θετικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$ (π.χ. $a_n=\frac{1}{2^n}, n\geq 1$). Θέτομε $t_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$,

$n \geq 1$, τότε η ακολουθία $y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + t_n x_{n+1}$, $n \geq 1$ περιέχεται στη κυρτή θήκη $co(\mathrm{K})$ του K, όμως δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στον χώρο X. Πράγματι, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η (y_n) είναι συγκλίνουσα στον χώρο c_0 με όριο την ακολουθία $y = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, ...\right)$, όμως το $y \notin c_{00}$. Επίσης σημειώνουμε ότι από το θεώρημα 5.15 η $co(\mathrm{K})$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του χώρου Banach c_0.

Παρατηρούμε ότι το ίδιο σύνολο K περιέχεται στον χώρο Hilbert ℓ_2 και είναι συμπαγές αφού $\|x_n\|_2 = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Με ανάλογους συλλογισμούς καταλήγουμε στο γεγονός ότι η $co(\mathrm{K})$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του ℓ_2, βέβαια η $co(\mathrm{K})$ είναι norm σχετικά συμπαγές στον ℓ_2, αφού αυτός είναι πλήρης χώρος.

……………………………………………………

Το ανάλογο του θεωρήματος 5.15 για ασθενώς συμπαγή υποσύνολα χώρων Banach ισχύει.

<u>Θεώρημα</u> 5.17 (Krein-Smulian) K είναι ασθενώς συμπαγές υποσύνολο ενός χώρου Banach X τότε η $co(\mathrm{K})$ είναι ασθενώς σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X (Η $c\ell_w co(\mathrm{K})$ είναι ασθενώς συμπαγές στον X .).

Για την απόδειξη του θεωρήματος Krein παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία ([F-H-H-M-P-Z] και [F-H-H-M-Z]).

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με κάποια αποτελέσματα που αφορούν την ύπαρξη ακραίων σημείων στην κλειστή μοναδιαία σφαίρα χώρων Banach της μορφής $C(\mathrm{K})$.

<u>Πρόταση</u> 5.18 Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff. Αν B συμβολίζει την κλειστή μοναδιαία σφαίρα του του $C(\mathrm{K})$, τότε μία συνάρτηση $f \in \mathrm{B}$ είναι ακραίο σημείο της B αν και μόνο αν $|f(t)| = 1$ για κάθε $t \in \mathrm{K}$.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $f \in \mathrm{B}$ με $|f(t)| = 1$ για κάθε $t \in \mathrm{K}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $f_1, f_2 \in \mathrm{B}$ και $\lambda \in (0,1)$ ώστε $f = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2$. Άρα

$$1 = |\lambda f_1(t) + (1-\lambda) f_2(t)| \text{ για κάθε } t \in \mathrm{K}$$

Επειδή $|f_1(t)|, |f_2(t)| \leq 1$, για κάθε $t \in \mathrm{K}$, έπεται από την σημείωση 5.4.1 ότι $f_1(t) = f_2(t)$ για κάθε $t \in \mathrm{K}$ και άρα $f = f_1 = f_2$. Έτσι έχουμε ότι $f \in ex(\mathrm{B})$.

Έστω τώρα $f \in ex(\mathrm{B})$, συνεπώς $\|f\|_\infty = 1$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $t_0 \in \mathrm{K}$ με $|f(t_0)| < 1$. Επειδή η f είναι συνεχής υπάρχει ανοικτή περιοχή V του t_0 και $\delta \in (0,1)$, ώστε $|f(t)| < 1-\delta$ για κάθε $t \in V$. Έστω $g : \mathrm{K} \to [0,1]$ συνεχής ώστε $g(t_0) = 1$ και $g(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathrm{K} \setminus V$ (συνάρτηση Urysohn). Αν $0 < \varepsilon < \delta$, τότε οι συναρτήσεις $f_1 = f + \varepsilon g$ και $f_2 = f - \varepsilon g$ ανήκουν στη B (πράγματι, $|f \pm \varepsilon g| = |f|$ επί του $\mathrm{K} \setminus V$ και $|f \pm \varepsilon g| \leq |f| + \varepsilon |g| \leq 1 - \delta + \varepsilon < 1$ επί της V), $f_1 \neq f_2$ και $f = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2$. Έπεται ότι η f δεν είναι ακραίο σημείο της B, άτοπο.

Πόρισμα 5.19 Έστω K συμπαγής και συνεκτικός χώρος. (Π.χ. $\mathrm{K} = [0,1]$). Αν με $C(\mathrm{K})$ συμβολίσουμε τον χώρο Banach των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του K, τότε οι σταθερές συναρτήσεις $f_1 = 1$ και $f_2 = -1$ είναι τα μόνα ακραία σημεία της B.

Απόδειξη Επειδή ο K είναι συνεκτικός χώρος, οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathrm{K} \to R$ με $|f(t)| = 1$ για κάθε $t \in \mathrm{K}$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις $f_1 = 1$ και $f_2 = -1$. Η παρατήρηση αυτή σε συνδυασμό με την πρόταση 5.18 αποδεικνύουν τον ισχυρισμό μας.

Παρατήρηση 5.20 1) Παρατηρούμε ότι όπως έπεται από την πρόταση 5.18 η κλειστή μοναδιαία σφαίρα B ενός χώρου Banach της μορφής $C(\mathrm{K})$ έχει πάντοτε ακραία σημεία, μάλιστα $2 \leq |ex(\mathrm{B})|$ και από το πόρισμα 5.19 ενδέχεται να ισχύει $|ex(\mathrm{B})| = 2$.

2) Καθόσον αφορά τον χώρο Banach $C(\mathrm{K})$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του K - ακόμα και αν ο K είναι συνεκτικός-η κατάσταση είναι διαφορετική. Πράγματι αν $f : \mathrm{K} \to R$ είναι συνεχής (πραγματική) συνάρτηση τότε η $g = e^{if}$ είναι ακραίο σημείο της B, αφού

$$|g(t)| = \left|e^{if(t)}\right| = 1 \text{ για κάθε } t \in \mathrm{K}.$$

Περαιτέρω αποδεικνύεται, προκειμένου για τον χώρο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων $C(K)$, ότι,

$$\mathrm{B} = c\ell_{\|\cdot\|} co(ex(\mathrm{B})).$$

Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος παραπέμπουμε στην βιβλιογραφία (Πρβλ. το [B]).