1 Χώροι πηλίκα

Έστω X διανυσματικός χώρος και Y διανυσματικός υπόχωρος του X. Για κάθε $x \in X$ θεωρούμε το <u>σύμπλοκο</u> $\hat{x}$ σχετικά με τον Y,

$$\hat{x} \underset{o\rho}{=} \{x + y : y \in Y\} = x + Y$$

δηλαδή το $\hat{x}$ είναι η παράλληλη μεταφορά του Y κατά το διάνυσμα x. Παρατηρούμε ότι

$$\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x - y \in Y .$$

Ο χώρος X / Y (<u>χώρος πηλίκο</u> του X πάνω από τον Y) είναι ο χώρος όλων των συμπλόκων (όλων των παραλλήλων μεταφορών του Y), δηλαδή

$$X / Y = \left\{\hat{x} : x \in X\right\}$$

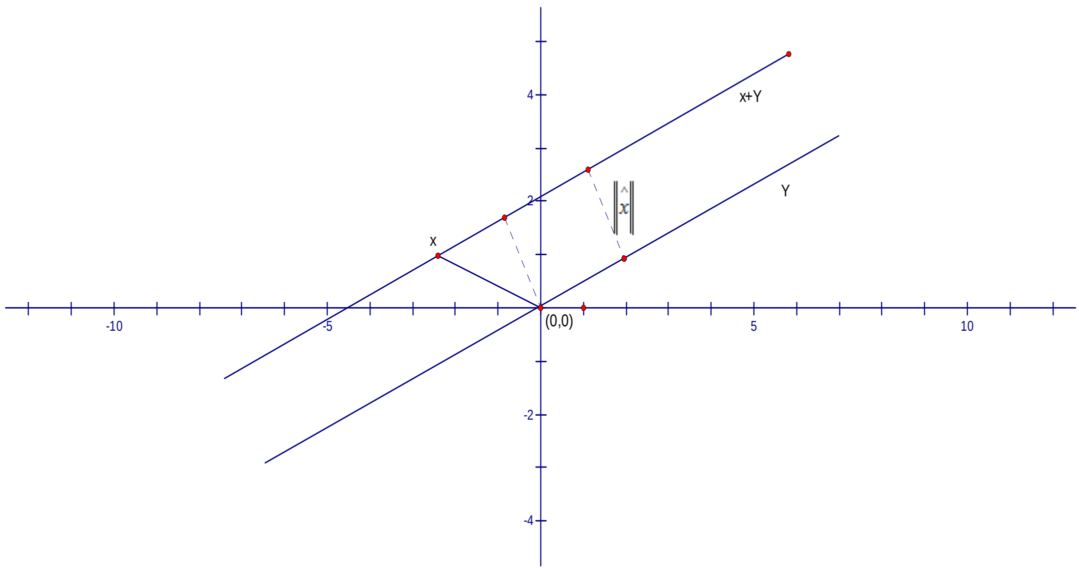
Με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού που ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο $\hat{x} + \hat{y} \underset{o\rho}{=} x \hat{+} y$ και $\lambda \hat{x} = \hat{\lambda x}, \quad x, y \in X, \quad \lambda \in K$ ($K = R$ ή C), ο X / Y γίνεται όπως εύκολα εξακριβώνεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα K με μηδέν το σύμπλοκο $\hat{0} = Y$.

Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι επί πλέον ένας (διανυσματικός) χώρος με νόρμα, ας την συμβολίσουμε με $\|\cdot\|$, και ότι ο Y είναι <u>κλειστός</u> (διανυσματικός) υπόχωρος του. Μπορούμε τότε να ορίσουμε μια νόρμα στον χώρο πηλίκο X / Y ως εξής: Έστω

$$\hat{x} = x + Y \in X / Y ,$$

Θέτομε (1) $\left\|\hat{x}\right\| \underset{o\rho}{=} \inf\left\{\|x + y\| : y \in Y\right\} = \inf\left\{\|x - y\| : y \in Y\right\} = d\left(x, Y\right).$

Όπως παρατηρούμε από τις ισότητες στην (1) η νόρμα του συμπλόκου $\hat{x}$ ορίζεται να είναι η απόσταση του x από τον υποχώρο Y ή ακόμη η απόσταση του $0 \in X$ από το σύνολο



$x+Y$, (αφού $\left\|\hat{x}\right\| = \inf\left\{\left\|0-(x+y)\right\| : y \in Y\right\} = d\left(0, x+Y\right)$). Η νόρμα που ορίζεται από τις ισότητες στην (1) ονομάζεται νόρμα πηλίκο. Στο εξής οποτεδήποτε θεωρούμε έναν χώρο πηλίκο X/Y ενός χώρου με νόρμα $\left(X, \|\cdot\|\right)$, θα θεωρούμε τον X/Y εφοδιασμένο με την νόρμα πηλίκο.

Στο παράδειγμα του σχήματος ο X είναι το Ευκλείδειο επίπεδο R^2, ο Y ένας γνήσιος μη τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του (δηλαδή μία ευθεία που διέρχεται από το $(0,0)$) και ο χώρος πηλίκο X/Y είναι το σύνολο όλων των ευθειών του επιπέδου που είναι παράλληλες με την ευθεία Y. Η νόρμα κάθε τέτοιας ευθείας είναι η απόστασή της από το σημείο $(0,0)$ του R^2.

Πρόταση 1.1 Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υποχώρος του, τότε η νόρμα πηλίκο του X/Y είναι (πράγματι) μία νόρμα στον διανυσματικό χώρο X/Y.

Απόδειξη. Αν $x \in X$ τότε $\|x\| = d\left(x, Y\right) \geq 0$ και ακόμη ότι αν

$$\left\|\hat{x}\right\| = 0 \Leftrightarrow d(x,Y) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{Y} = Y \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{0} = Y .$$

Έστω $\lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$ και $x \in X$. Τότε έχουμε, $\left\|\lambda \hat{x}\right\| = d\left(\lambda x, Y\right) =$

$$\inf\left\{\left\|\lambda x - y\right\| : y \in Y\right\} = \inf\left\{|\lambda| \cdot \left\|x - \frac{1}{\lambda} y\right\| : y \in Y\right\} = |\lambda| \inf\left\{\left\|x - \frac{1}{\lambda} y\right\| : y \in Y\right\}$$

$= |\lambda| \cdot \inf\left\{\left\|x-y\right\| : y \in Y\right\} = |\lambda| \cdot d\left(x, Y\right) = |\lambda| \cdot \left\|\hat{x}\right\|$. Αν $\lambda = 0$ η αποδεικτέα σχέση είναι προφανής.

Αποδεικνύουμε τώρα την τριγωνική ανισότητα. Έστω $x, y \in X$. Παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος $z_1, z_2 \in Y$ ισχύει ότι: $\left\|(x+y)-(z_1+z_2)\right\| \leq \left\|x-z_1\right\| + \left\|y-z_2\right\|$, συνεπώς,

$$d\left(x+y, Y\right) \leq \left\|(x+y)-(z_1+z_2)\right\| \leq \left\|x-z_1\right\| + \left\|y-z_2\right\|, \forall z_1, z_2 \in Y .$$

Έπεται ότι,

$$d\left(x+y, Y\right) \leq \inf\left\{\left\|x-z_1\right\| + \left\|y-z_2\right\| : z_1, z_2 \in Y\right\}$$
$$= \inf\left\{\left\|x-z_1\right\| : z_1 \in Y\right\} + \inf\left\{\left\|y-z_2\right\| : z_2 \in Y\right\} = d\left(x, Y\right) + d\left(y, Y\right).$$

Ισοδύναμα, $\left\|\hat{x} + \hat{y}\right\| \leq \left\|\hat{x}\right\| + \left\|\hat{y}\right\|$.

Ορισμός 1.2 Έστω Y διανυσματικός υποχώρος του διανυσματικού χώρου X. Τότε η απεικόνιση πηλίκο η κανονική απεικόνιση του X επί του X/Y είναι η απεικόνιση π που ορίζεται από τον τύπο $\pi(x)=\hat{x}=x+Y$.

Παρατηρούμε ότι η π είναι μια γραμμική απεικόνιση, με $Ker\pi=Y$ και βέβαια $\pi(X)=X/Y$

Λήμμα 1.3 Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός υποχώρος του X και $\pi: X\to X/Y$ η κανονική απεικόνιση. Τότε η εικόνα μέσω της π της ανοικτής μοναδιαίας σφαίρας του X είναι η ανοικτή μοναδιαία σφαίρα του X/Y. Δηλαδή $\pi(\mathrm{B}_X)=\mathrm{B}_{X/Y}$.

Απόδειξη Έστω $x\in X$ με $\|x\|<1$ τότε, $\|\pi(x)\|=\|x+Y\|=\inf\{\|x+y\|: y\in Y\}\le\|x\|<1$, αφού $0\in Y$. Έπεται ότι $\pi(\mathrm{B}_X)\subseteq\mathrm{B}_{X/Y}$. Έστω τώρα $x\in X$ με $\|\pi(x)\|=\|x+Y\|=\inf\{\|x+y\|: y\in Y\}<1$. Θεωρούμε $y_0\in Y$ ώστε $\|x+y_0\|<1$ και θέτομε $x_1=x+y_0$. Τότε έχουμε ότι, $\|x_1\|<1$ και $x_1+Y=(x+y_0)+Y=x+Y$. Επομένως $\hat{x}_1=\hat{x}$ ή $\pi(x_1)=\pi(x)$ με $\|x_1\|<1$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{B}_{X/Y}\subseteq\pi(\mathrm{B}_X)$ και η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση 1.4 Σημειώνουμε ότι για τις κλειστές μοναδιαίες σφαίρες ισχύει ότι, $\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right)\subseteq\hat{\mathrm{B}}_{X/Y}$ και ότι εν γένει δεν ισχύει ισότητα. Αυτό σημαίνει ότι ενδέχεται να υπάρχει $x_0\in X$ ώστε $d(x_0,Y)=1\Leftrightarrow\|\pi(x_0)\|=1$ και $\|x_0-y\|>1,\forall y\in Y$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει $x_1\in X$ με $\|x_1\|\le 1$ ώστε $\pi(x_1)=\pi(x_0)$. (Αν υπήρχε ένα τέτοιο x_1 τότε $x_1-x_0\in Y$, άρα $x_1=x_0+y_0$ για κάποιο $y_0\in Y$. Έπεται ότι $\|x_1\|=\|x_0+y_0\|\le 1$, άτοπο. Πρβλ επίσης τις ασκήσεις.)

Σημειώνουμε ότι σε κάποιες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις ισχύει ισότητα στην παραπάνω σχέση, όπως θα διαπιστώσουμε αργότερα. (Πρβλ την παρατήρηση 1.6).

Θεώρημα 1.5 Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Τότε η κανονική απεικόνιση $\pi: X\to X/Y$ είναι συνεχής (με $\|\pi\|\le 1$) γραμμική και επί του Y, η οποία είναι επιπλέον και ανοικτή. Αν $Y\neq X$, τότε $\|\pi\|=1$.

Απόδειξη Η γραμμικότητα της π και το γεγονός ότι είναι επί του Y με $\ker\pi=Y$ είναι προφανείς. Η συνέχεια της π έπεται αμέσως από το Λήμμα 1.3 ή και απευθείας αφού αν $\|x\|\le 1$ τότε $\|x+Y\|\le\|x\|\le 1$, άρα $\|\pi\|\le 1$.

Η π είναι ανοικτή από το Λήμμα αφού αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ τότε,

$$\pi\left(\mathrm{B}_X\left(x,\varepsilon\right)\right) = \pi\left(x+\varepsilon\mathrm{B}_X\right) = \pi\left(x\right)+\varepsilon\pi\left(\mathrm{B}_X\right) = \hat{x}+\varepsilon\mathrm{B}_{X/Y} = \mathrm{B}_{X/Y}\left(\hat{x},\varepsilon\right).$$

Επομένως η π απεικονίζει τις περιοχές του τυχόντος σημείου $x \in X$ σε περιοχές του $\pi\left(x\right)$ και είναι άρα ανοικτή απεικόνιση.

Αν ο υποχώρος Y του X είναι διαφορετικός του X , δηλαδή $X \neq Y$ τότε (και μόνο τότε) ο χώρος πηλίκο X/Y είναι μη τετριμμένος ($X \neq 0$). Επομένως $\mathrm{B}_{X/Y} \neq \left\{0\right\}$, και αν $y \in \mathrm{B}_{X/Y}$ με $y \neq 0$ τότε υπάρχει $x \in \mathrm{B}_X$ ώστε $\pi\left(x\right) = y$. Έπεται αμέσως από το Λήμμα 1.3 ότι $\left\|\pi\right\| = 1$.

Εύκολη συνέπεια του προηγουμένου θεωρήματος είναι και το γνωστό αποτέλεσμα του Riesz:

<u>Λήμμα </u>(Riesz). Έστω X χώρος με νόρμα και Y γνήσιος κλειστός υποχώρος του X .

Τότε : (α) Για κάθε $\theta > 0$ υπάρχει $x \equiv x_\theta \in S_X = \left\{x \in X : \left\|x\right\| = 1\right\}$ ώστε

$$d\left(x_\theta, Y\right) = \inf\left\{\left\|x_\theta - y\right\| : y \in Y\right\} \geq 1-\theta$$

(β) Αν ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε υπάρχει $x \in S_X$ του οποίου η απόσταση από τον Y είναι η μέγιστη δυνατή, δηλαδή $d\left(x,Y\right) = 1$.

<u>Απόδειξη</u> (α) Υποθέτουμε χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα ότι $\theta \in \left(0,1\right)$.

Θεωρούμε την κανονική απεικόνιση $\pi : X \to X/Y$. Επειδή ο Y είναι γνήσιος κλειστός υποχώρος του X έπεται ότι $\left\|\pi\right\| = 1$. Έτσι έχουμε,

$$1 = \left\|\pi\right\| = \sup\left\{\left\|\pi\left(x\right)\right\| : \left\|x\right\| = 1\right\} = \sup\left\{\left\|\hat{x}\right\| : \left\|x\right\| = 1\right\} = \sup\left\{d\left(x,Y\right) : \left\|x\right\| = 1\right\}.$$

Αν $0 < \theta < 1$, έπεται από τον χαρακτηρισμό του supremum (ενός φραγμένου συνόλου πραγματικών) ότι υπάρχει $x_\theta \in S_X$ ώστε $\left\|\hat{x}_\theta\right\| = d\left(x_\theta, Y\right) \geq 1-\theta$.

(β) Έστω $z \in \mathrm{B}_{X/Y}$ με $\left\|z\right\| = 1$, υπάρχει τότε $x_0 \in X$ με $\pi\left(x_0\right) = z$. Έπεται ότι, $d\left(x_0, Y\right) = \left\|\pi\left(x_0\right)\right\| = \left\|z\right\| = 1$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\left(y_n\right) \subseteq Y$ ώστε $\left\|x_0 - y_n\right\| \to 1$, είναι σαφές ότι η $\left(y_n\right)$ είναι φραγμένη. Έτσι συμπεραίνουμε από την συμπάγεια των κλειστών σφαιρών του Y – αφού ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης –ότι η $\left(y_n\right)$ έχει υπακολουθία συγκλίνουσα μέσα στον Y . Έστω $y_{k_n} \to y_0 \in Y$. Συνεπώς,

$\left\|x_0 - y_{k_n}\right\| \to \left\|x_0 - y_0\right\| = 1$. Θέτομε $x = x_0 - y_0$ και παρατηρούμε ότι, εφόσον $y_0 \in Y$, θα έχουμε ότι $\pi(x) = \pi(x_0)$ και $\|x\| = 1 = d(x_0, Y) = d(x, Y)$

<u>Παρατήρηση</u> 1.6 Παρατηρούμε ότι αυτό που στην πραγματικότητα αποδείξαμε στο δεύτερο μέρος του προηγούμενου Λήμματος είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα: Αν ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης υποχώρος του χώρου με νόρμα X και $\pi : X \to X/Y$ είναι η κανονική απεικόνιση, τότε $\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_X\right) = \hat{\mathrm{B}}_{X/Y}$, (πρβλ και την παρατήρηση 1.4).

Υπενθυμίζουμε ακόμα ότι αν H είναι χώρος Hilbert και F γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε για κάθε $x \in \mathrm{H}$ με $x \notin F$ υπάρχει ακριβώς ένα $y \in F$ ώστε $\|x - y\| = d(x, F)$. Έτσι αν $d(x, F) = 1 = \|\pi(x)\|$, τότε θέτοντας $x_1 = x - y$ έχουμε ότι $\pi(x) = \pi(x_1)$ και $\|x_1\| = 1$. Συνεπώς και στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\pi\left(\hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}}\right) = \hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{H}/F}$. (Πρβλ. τα αποτελέσματα της παραγράφου 4.2 και την παρατήρηση 4.2.13.)

<u>Πόρισμα</u> 1.7 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης και $X_1 \underset{\neq}{\subset} X_2 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} X_n \underset{\neq}{\subset} \dots$, ακολουθία υποχώρων του X πεπερασμένης διάστασης.

Τότε : (α) Υπάρχει μία ακολουθία $(x_n) \subseteq X$ έτσι ώστε, $1 = \|x_n\| = d(x_n, X_{n-1}), n \geq 2$.

(β) Ιδιαίτερα έχουμε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο με νόρμα υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq S_X$ ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n \neq m$

<u>Απόδειξη</u>. (α) Έστω $x_1 \in X_1$ με $\|x_1\| = 1$. Προχωρώντας με επαγωγή και με την βοήθεια του ισχυρισμού (β) του Λήμματος Riesz για το ζεύγος X_{n-1}, X_n επιλέγομε την ακολουθία (x_n) με τις ζητούμενες ιδιότητες. Από αυτό που μόλις αποδείξαμε έπεται εύκολα και η ύπαρξη μιας ακολουθίας $(x_n) \subseteq S_X$ ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n, m \in N$ με $n \neq m$.

Παρόλα αυτά θα δώσουμε και μια απευθείας απόδειξη αυτού του ισχυρισμού.

(β) Έστω λοιπόν $x_1 \in S_X$, θέτομε $X_1 = \langle x_1 \rangle \underset{\neq}{\subset} X$. Από το Λήμμα του Riesz υπάρχει $x_2 \in S_X : d(x_2, X_1) = 1$. Θέτομε $X_2 = \langle x_1, x_2 \rangle \underset{\neq}{\subset} X$ και συνεχίζουμε με επαγωγή. Αν τα $x_1, \dots, x_n \in S_X$ έχουν ορισθεί θέτομε $X_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ και επειδή $\dim X_n < \infty$ και $\dim X = \infty$ υπάρχει $x_{n+1} \in S_X$ ώστε $d(x_{n+1}, X_n) = 1$. Από την κατασκευή μας είναι φανερό ότι $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ και $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n \neq m$.

<u>Παρατηρήσεις</u> 1) Έστω X χώρος με νόρμα άπειρης διάστασης

(α) Είναι δυνατό να αποδειχθεί με χρήση του θεωρήματος Hahn-Banach ότι υπάρχει $(x_n) \subseteq X$ ώστε $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ και $\|x_n - x_m\| > 1, \forall n \neq m$. (δες το [D] σελίδα7).

(β) Επίσης αποδεικνύεται (Θεώρημα των Odell-Elton, δες το [D] σελίδα 240) ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$ και $\|x_n - x_m\| \geq 1 + \delta, \forall n \neq m$

Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έπεται ένας σημαντικός χαρακτηρισμός των χώρων με νόρμα πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 1.8 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Ο X είναι πεπερασμένης διάστασης

(ιι) Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα $\hat{\mathrm{B}}_X$ του X είναι συμπαγές σύνολο

Απόδειξη (ι) $\Rightarrow$ (ιι) Είναι γνωστό ότι αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση τότε η $\hat{\mathrm{B}}_X$ είναι συμπαγές σύνολο.

(ιι) $\Rightarrow$ (ι) Αν ο X είχε άπειρη διάσταση τότε από το προηγούμενο αποτέλεσμα θα υπήρχε μία ακολουθία $(x_n) \subseteq S_X$ ώστε $\|x_n - x_m\| \geq 1, \forall n, m \in N$ με $n \neq m$

Είναι σαφές ότι η (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και αυτό αντιφάσκει με το γεγονός ότι η (x_n) περιέχεται στο συμπαγές σύνολο $\hat{\mathrm{B}}_X$.

Παρατήρηση 1.9 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y κλειστός υποχώρος του X .
Θεωρούμε την κανονική απεικόνιση $\pi : X \to X / Y$

(α) Αν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x' \in X$ ώστε $\pi(x') = \pi(x)$ και $\|x'\| < \|\pi(x)\| + \varepsilon$.
Πράγματι, έστω $y_0 \in Y : \|x - y_0\| < d(x, Y) + \varepsilon = \|\pi(x)\| + \varepsilon$ θέτομε $x' = x - y_0$, τότε $x' - x = -y_0 \in Y$ και άρα $\pi(x) = \pi(x')$, επίσης $\|x'\| = \|x - y_0\| < \|\pi(x)\| + \varepsilon$.

(β) Αν $x_1, x_2 \in X$ και $z \in \pi(x_1) = x_1 + Y$ τότε, $d(z, \pi(x_2)) = \|\pi(x_1) - \pi(x_2)\|$.

Πράγματι, αν $z \in x_1 + Y$ τότε,

$$d(z, \pi(x_2)) = \inf\{\|z - (x_2 + y)\| : y \in Y\} = \inf\{\|(z - x_2) - y\| : y \in Y\} = \left\|z - \hat{x}_2\right\| = \left\|\hat{z} - \hat{x}_2\right\|$$

$$= \left\|\hat{x}_1 - \hat{x}_2\right\| = \|\pi(x_1) - \pi(x_2)\|,$$ εφόσον $z \in x_1 + Y \Leftrightarrow \hat{z} = \hat{x}_1$.

Θεώρημα 1.10 Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός υποχώρος του X , τότε ο χώρος πηλίκο X / Y είναι χώρος Banach.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω $\left(\hat{x}_n\right)$ ακολουθία Cauchy στον χώρο X/Y. Επιλέγομε με επαγωγή μια υπακολουθία $\left(\hat{x}_{n_k}\right)$ της $\left(\hat{x}_n\right)$ ώστε να ισχύει,

$$(1)\quad \left\|\hat{x}_{n_k}-\hat{x}_{n_{k+1}}\right\|<\frac{1}{2^k}, k=1,2,\ldots$$

(Για $\varepsilon=\frac{1}{2}$ υπάρχει $n_1\in N: n>m\geq n_1$ τότε $\left\|\hat{x}_n-\hat{x}_m\right\|<\frac{1}{2}$. Κατόπιν για $\varepsilon=\frac{1}{2^2}$, επιλέγουμε $n_2>n_1: n>m\geq n_2$ τότε $\left\|\hat{x}_n-\hat{x}_m\right\|<\frac{1}{2^2}$. Συνεχίζουμε με επαγωγή και έτσι εντοπίζουμε μία υπακολουθία $\left(n_k\right)$ των φυσικών αριθμών ώστε να ισχύει η (1)).

Ακολούθως επιλέγομε με επαγωγή μία ακολουθία $z_{n_k}\in\hat{x}_{n_k}, k=1,2,\ldots$, ώστε $\left\|z_{n_k}-z_{n_{k+1}}\right\|<\frac{1}{2^k}, k=1,2,\ldots$

Έστω $z_{n_1}\in\hat{x}_{n_1}$, από την προηγούμενη παρατήρηση $d\left(z_{n_1},\hat{x}_{n_2}\right)=\left\|\hat{x}_{n_1}-\hat{x}_{n_2}\right\|<\frac{1}{2}$

Έπεται ότι υπάρχει $z_{n_2}\in\hat{x}_{n_2}$ ώστε $\left\|z_{n_1}-z_{n_2}\right\|<\frac{1}{2}$. Επειδή $z_{n_2}\in\hat{x}_{n_2}$ έπεται ότι $d\left(z_{n_2},\hat{x}_{n_3}\right)=\left\|\hat{x}_{n_2}-\hat{x}_{n_3}\right\|<\frac{1}{2^2}$ άρα υπάρχει $z_{n_3}\in\hat{x}_{n_3}$ ώστε $\left\|z_{n_2}-z_{n_3}\right\|<\frac{1}{2^2}$. Προχωρούμε με επαγωγή στην επιλογή της $\left(z_{n_n}\right)$. Η $\left(z_{n_n}\right)$ είναι μια ακολουθία Cauchy. Πράγματι, αν $\varepsilon>0$ τότε υπάρχει $k_0\in N:\frac{1}{2^{k_0}}<\varepsilon$. Αν $\lambda>\mu\geq k_0+1$ τότε,

$\left\|z_{n_\lambda}-z_{n_\mu}\right\|\leq\left\|z_{n_\mu}-z_{n_{\mu+1}}\right\|+\ldots+\left\|z_{n_{\lambda-1}}-z_{n_\lambda}\right\|\leq\frac{1}{2^\mu}+\ldots+\frac{1}{2^{\lambda-1}}<\frac{1}{2^{k_0}}<\varepsilon$. Επειδή ο X είναι χώρος Banach υπάρχει $x\in X: z_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|}x$. Από τη συνέχεια της κανονικής απεικόνισης π, έπεται ότι $\pi\left(z_{n_k}\right)=\hat{x}_{n_k}\to\pi\left(x\right)=\hat{x}$ στον χώρο X/Y. Επειδή η $\left(\hat{x}_n\right)$ είναι ακολουθία Cauchy στον X/Y και έχει υπακολουθία συγκλίνουσα, έπεται ότι και η ίδια είναι συγκλίνουσα.

<u>Παράδειγμα</u> 1.11 Θεωρούμε τον χώρο πηλίκο ℓ_∞/c_0 τότε η νόρμα πηλίκο δίνεται από τον τύπο, $\left\|\hat{x}\right\|=\limsup_{n\to\infty}\left|x_n\right|$, όπου $x\in\ell_\infty, x=\left(x_n\right)$.

Πράγματι, αν $x \in c_0 \Leftrightarrow \lim x_n = 0$ τότε, $\left\|\hat{x}\right\| = d\left(x, c_0\right) = 0 = \lim\left|x_n\right|$

Υποθέτουμε ότι $x = \left(x_n\right) \in \ell_\infty$ κα $x \notin c_0$ ι, ισοδύναμα ότι $x = \left(x_n\right)$ είναι μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών η οποία δεν είναι μηδενική, δηλαδή ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\left|x_n\right| = a > 0 \text{ και } \left(x_n\right) \text{ φραγμένη.}$$

Παρατηρούμε ότι: 1) Έστω $y = \left(y_n\right) \in c_0$ τότε

$\limsup\left|x_n - y_n\right| = \limsup\left|x_n\right| = a$ (Αν, $\left|x_{k_n} - y_{k_n}\right|, n \geq 1$, είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $\left|x_n - y_n\right|, n \geq 1$ τότε $y_{k_n} \to 0$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{k_n} - y_{k_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{k_n}\right| \leq a$. Επειδή υπάρχει υπακολουθία $\left(x_{m_n}\right)$ της $\left(x_n\right)$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{m_n}\right| = a$ έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{m_n} - y_{m_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|x_{m_n}\right| = a$, άρα έχουμε το συμπέρασμα).

2) $$a \leq d\left(x, c_0\right) = \left\|\hat{x}\right\|$$

Πράγματι, αν $y = \left(y_n\right) \in c_0$ τότε από την (1) $a = \limsup\limits_n\left|x_n - y_n\right| \leq \sup\limits_{n\geq 1}\left|x_n - y_n\right|$ $= \left\|x - y\right\| \Rightarrow a \leq d\left(x, c_0\right)$.

Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο ότ ι $a < d\left(x, c_0\right)$.

Θέτομε $x^n = \left(x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...\right) \in c_0, n \geq 1$.

Έπεται ότι, $a < d\left(x, c_0\right) \leq \left\|x - x^n\right\| = \sup\left\{\left|x_k\right| : k \geq n+1\right\}, \forall n \geq 1$.

Συνεπώς, $a < d\left(x, c_0\right) \leq \lim\limits_n\left[\sup\left\{\left|x_k\right| : k \geq n+1\right\}\right] = \limsup\limits_n\left|x_n\right| = a$, έτσι έχουμε καταλήξει σε αντίφαση.

<u>Πρόταση</u> 1.12 Έστω X, Z χώροι Banach και $T : X \to Z$ φραγμένος γραμμικός τελεστής επί του Z. Τότε ο χώρος πηλίκο $X / KerT$ είναι ισόμορφος του Z.

<u>Απόδειξη</u> Ορίζουμε $F : X / KerT \to Z$ με $F\left(x + KerT\right) = T\left(x\right)$. Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι ένας (καλά ορισμένος) γραμμικός τελεστής ο οποίος είναι φραγμένος , $1-1$ και επί του Z. Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης θα έχουμε το συμπέρασμα.
Παρατηρούμε ακόμη ότι $T = Fo\pi$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/KerT \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

(I) Ο T είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής .

Έστω $x, x' \in X$ ώστε,

$x + KerT = x' + KerT \Leftrightarrow x - x' \in KerT \Leftrightarrow T(x - x') = 0 \Leftrightarrow T(x) = T(x')$. Άρα ο T είναι καλά ορισμένος. Ο T είναι επίσης γραμμικός αφού,

$F\left(\lambda(x + KerT) + \mu(y + KerT)\right) = F(\lambda x + \mu y + KerT) = T(\lambda x + \mu y) =$
$\lambda T(x) + \mu T(y) = \lambda F(x + KerT) + \mu(y + KerT)$.

(II) Ο T είναι $1-1$ και επί του Z . Έστω
$F(x + KerT) = F(y + KerT) \Leftrightarrow T(x) = T(y) \Leftrightarrow T(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in KerT$
$\Leftrightarrow x + KerT = y + KerT$. Ο T είναι επί, αφού αν $z \in Z$ τότε (ο T είναι επί) υπάρχει $x \in X = T(x) = z$, άρα $F(x + KerT) = z$.

(III) Ο T είναι φραγμένος, με $\|F\| = \|T\|$. Έστω $x + KerT \in X / KerT$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $y \in x + KerT$ με $\|y\| < \|x + KerT\| + \varepsilon$ (παρατήρηση 1.9).

Συνεπώς $\|F(x + KerT)\| = \|F(y + KerT)\| = \|T(y)\| \le \|T\| \cdot \|y\| < \|T\|\left(\|x + KerT\| + \varepsilon\right)$.

Εφόσον η ανισότητα ισχύει για κάθε θετικό ε , έπεται ότι,

$$\|F(x + KerT)\| \le \|T\| \cdot \|x + KerT\| .$$

Συνεπώς $\|F\| \le \|T\|$ και ο F είναι φραγμένος. Επειδή δε,
$\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|T(x)\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|F(x + KerT)\| \le \sup\limits_{\|x + KerT\| \le 1} \|F(x + KerT)\| = \|F\|$, συμπεραίνουμε ότι, $\|F\| = \|T\|$

Πόρισμα 1.13 Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X υπάρχει ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος Y του $\ell_1(N)$ ώστε ο χώρος πηλίκο $\ell_1(N)/Y$ να είναι ισόμορφος με τον X .

Απόδειξη Ως γνωστό επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος υπάρχει ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : \ell_1(N) \to X$ ο οποίος είναι επί του X . Θέτομε $Y = KerT$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε το συμπέρασμα.

Παρατήρηση 1.14 Υπενθυμίζουμε εν συντομία το αποτέλεσμα που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο Πόρισμα, δηλαδή ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach X είναι συνεχής γραμμική εικόνα του ℓ_1. Έστω $D = \{x_n, n \ge 1\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της B_X .

Ορίζουμε $T:\ell_1 \to X$ με $T\left(\left(\lambda_n\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$, επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα ο T είναι ένας καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής ο οποίος είναι φραγμένος με $\|T\|\le 1$. Αποδεικνύεται ακόμη ότι ο T είναι και επί του Y. Έστω $x\in \mathrm{B}_X \Leftrightarrow \|x\|<1$, εφόσον το D είναι πυκνό υπάρχει στην B_X (η B_X δεν έχει μεμονωμένα σημεία) υπακολουθία $\left(x_{m_n}\right)$ της $\left(x_n\right)$ με $x_{m_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Θέτομε $z_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)e_{m_n}, n\ge 1$ (όπου $\left(e_n\right)$ η συνήθης βάση του ℓ_1), τότε $z_n\in \mathrm{B}_{\ell_1}$ και $T\left(z_n\right)\xrightarrow{\|\cdot\|} x$, άρα $x\in\overline{T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)}$. Έτσι αποδείξαμε ότι $\mathrm{B}_X\subseteq\overline{T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)}$. Από ένα γνωστό Λήμμα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης έπεται ότι $\mathrm{B}_X\subseteq T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)$ από όπου συμπεραίνουμε ότι ο T είναι επί του X. Αξίζει να σημειωθεί ότι ισχύει προφανώς και η σχέση $T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)\subseteq \mathrm{B}_X$, και συνεπώς $\mathrm{B}_X=T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)$. Έπεται ότι αν $F:\ell_1/Y\to X$, όπου $Y=KerT$, είναι ο τελεστής του θεωρήματος 1.12, τότε $F\left(\mathrm{B}_{\ell_1/Y}\right)=T\left(\mathrm{B}_{\ell_1}\right)=\mathrm{B}_X$. Από όπου έπεται ότι ο F είναι μια ισομετρία (γιατί;) και άρα ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με ένα πηλίκο του χώρου ℓ_1.

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα εφαρμογή των χώρων πηλίκων είναι και η ακόλουθη.

<u>Πρόταση</u> 1.15 Έστω X χώρος με νόρμα, Z κλειστός υποχώρος του X και Y υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο $Y+Z$ είναι κλειστός υποχώρος του X .

<u>Απόδειξη</u> . Έστω $\pi: X\to X/Z$ η κανονική απεικόνιση. Ο $\pi\left(Y\right)$ είναι πεπερασμένης διάστασης υποχώρος του X/Z και άρα κλειστός υποχώρος του X/Z . Αφού η π είναι συνεχής ο $\pi^{-1}\left(\pi\left(Y\right)\right)$ είναι κλειστός υποχώρος του X . Παρατηρούμε ότι,

$$x\in\pi^{-1}\left(\pi\left(Y\right)\right)\Leftrightarrow \pi\left(x\right)\in\pi\left(Y\right)\Leftrightarrow \exists y\in Y:\pi\left(x\right)=\pi\left(y\right)\Leftrightarrow x-y\in Z \Leftrightarrow x\in Y+Z .$$

Έπεται ότι $Y+Z=\pi^{-1}\left(\pi\left(Y\right)\right)$ και ο $Y+Z$ είναι κλειστός υποχώρος του X .