Αλγεβρική Γεωμετρία 1/6/2021

$\mathcal{C}$ κατηγορία η οποία έχει για αντικείμενα

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{X}_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & \mathfrak{p} \end{array}$$

B σχήμα.

$\mathcal{X}$ σχήμα.

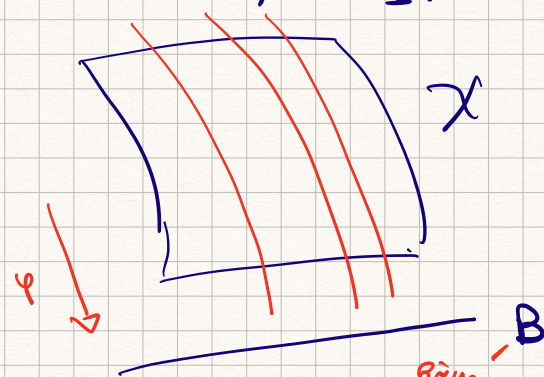
$\mathfrak{p}$ σημείο του B (πρώτο ιδεώδες)

$\mathcal{X}_{\mathfrak{p}} = \underbrace{\mathcal{X} \times_B \{\mathfrak{p}\}}_{} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$

B affine $\operatorname{Spec} R$

$\mathfrak{p}$ σημείο του B αντιστοιχεί σε ένα πρώτο ιδεώδες $I(\mathfrak{p})$

$\operatorname{Spec} B/I(\mathfrak{p})$ ⟵ γεωμετρικό αντικείμενο που αντιστοιχεί στο $\mathfrak{p}$.



βάση χώρος παραμέτρων.

φ: flat-(επίπεδο) μορφισμός (μας εξασφαλίζει ότι οι ίνες μεταβάλλονται ομαλά)

smooth μορφισμός ⇝ οι προεικόνες $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ να είναι ομαλές καμπύλες γένους g.

$k = \mathbb{C}$ αλγεβρική καμπύλη ⟺ διάσταση 1 → Krull διάσταση
→ Διάσταση ως μιγαδική πολλαπλότητα επιφάνεια Riemann.

$k \neq \mathbb{C}$ σώμα

$$g = \dim H^0(X, \Omega_X) = \Gamma(X, \Omega_X)$$

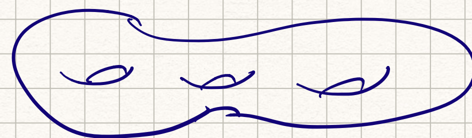
ορισμός μη τοπολογικός

Zariski συνομολογία sheaves (ούτε αυτό το έχουμε

sheaf διαφορικών (δεν το έχουμε)

ορίσει

Γενος καμπυλες είναι κλειστες προσανατολισμενες πολ/τες διαστασης 1 μιγαδικης ή 2 πραγματικης.



g – πλήθος από τις τρύπες

$g \in \mathbb{N}$

$\mathcal{C}_g$: Αντικείμενα "οικογένειες καμπυλων γενους g"

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\cong"'] & X' \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

$B \times_{B'} X'$

Καρτεσιανο διαγραμμα

$X \equiv X' \times_{B'} B$

Ποτε δυο καμπύλες είναι ισομορφες? Ποτε δυο οικογενειες είναι ισόμορφες;

$F : B \in \text{Schemes} \longrightarrow \{$ κλασεις ισομορφίας καμπυλων πανω από το B $\}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\sigma", "\cong"'] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Ερωτημα:
Είναι ο συναρτητης F αναπαραστάσιμος;

$$\varphi : F(\cdot) \xrightarrow{\cong} h_M(\cdot) = \mathrm{Hom}_{Sch.}(\cdot, M)$$

moduli space (fine)

Αν ο συναρτητης είναι αναπαραστάσιμος έχουμε πολύ σημαντικες ιδιοτητες και δίνει μοναδικοτητα στην επιλογη διαφορων κατασκευων.

$\mathcal{D} \in F(M)$ $\qquad h_M(M) = \mathrm{Hom}_{Sch.}(M, M)$

$\mathcal{D} \xrightarrow{\mathbb{1}} \underline{M}$ $\qquad\qquad$ $M \xrightarrow{Id} M$

οικογένεια καμπυλών με βάση
το $\underline{M}$ universal curve.
(έχει την μεγαλύτερη δυνατή βάση)

οποιαδήποτε άλλη καμπύλη

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\mathbb{1}"] \\ B \arrow[r, "\zeta"'] & M \end{tikzcd}$$

$\varphi \in F(B)$ — κλάσεις ισομορφισμού καμπυλών με βάση το B

$\downarrow$

$\zeta \in Hom_{Sch}(B, M)$

$$X = B \times_M \mathcal{D}$$

Κάθε άλλη οικογένεια είναι ένα ινώδες γινόμενο με την $\zeta : B \longrightarrow \underline{M}$.

$k = Spec\, \mathbb{C}$

$Hom_S(Spec\,\mathbb{C}, M) =$ κλειστά γεωμετρικά σημεία του $\underline{M}$

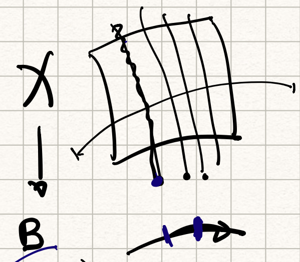
Πχ για ένα affine scheme $\underline{Spec R}$
Τα σημεία είναι πρώτα ιδεώδη I
Κάθε σημείο $R \longrightarrow R/I \cong k$
$Spec\,R \longleftarrow Spec\,k$
σημείο

$X \to Spec\,\mathbb{C}$

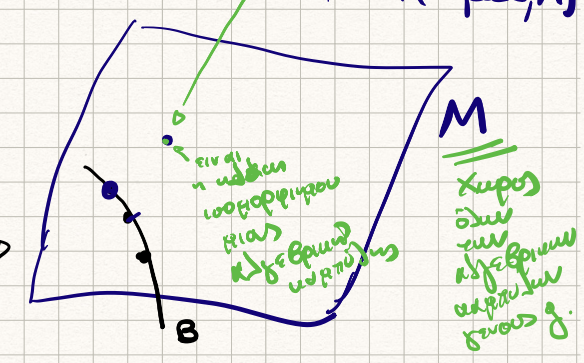
κανονικό

είναι το ίδιο με καμπύλες πάνω από το $\mathbb{C}$
(όλοι οι δακτύλιοι είναι $\mathbb{C}$-άλγεβρες $\mathbb{C} \hookrightarrow R$)

$F(Spec\,\mathbb{C}) =$ κλάσεις ισομορφισμού καμπυλών πάνω από το $\mathbb{C}$ $\xleftrightarrow{1-1}$ $M(\mathbb{C}) = Hom(Spec\,\mathbb{C}, M)$



Spec $\mathbb{C}$



Ο moduli χώρος δεν είναι αναπαραστάσιμος (στην κατηγορία)

(των σχημάτων)

1) Ύπαρξη αυτομορφισμών.

Οι καμπύλες έχουν αυτομορφισμούς $X \xrightarrow{\sigma} X$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & \operatorname{Spec}\mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0$$

Έχει αυτομορφισμούς

$$x \longrightarrow y \longrightarrow z \qquad S_3$$

$$\delta_{\alpha,\varepsilon} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \zeta^{\alpha} x \\ \zeta^{\varepsilon} y \end{pmatrix}$$

$$\zeta^4 = 1$$

Οι οικογένεια

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \pi \\ \operatorname{Spec}\mathbb{C} \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \\ \downarrow \pi\circ\sigma \\ \operatorname{Spec}\mathbb{C} \end{array}$$

Θα πάνε στο ίδιο σημείο.

(2) Ισομορφισμούς από αλγεβρικές καμπύλες.

Πότε δυο αλγεβρικές είναι ισόμορφες (πάνω από ένα σώμα).

$g = 0$ Υπάρχει μοναδική αλγεβρική καμπύλη $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (Εικασία Poincare)

$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong$ σφαίρα του Riemann $\mathbb{P}^1$

$g = 1$ Καμπύλες γένους 1 πάνω από $\mathbb{C}$

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad \text{affine}$$

$$zy^2 = x^3 + \alpha x z^2 + b z^3 \quad \text{προβολ.}$$

Θ. Riemann-Roch

Εξαρτάται από δυο παραμέτρους a, b

$$\Delta = -16(4\alpha^3 + 27b^2)$$

[διακρίνουσα του $x^3 + \alpha x + b$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \longrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

$f(x) \in k[x] \longrightarrow$ Διακρίνουσα.

Ελλειπτική καμπύλη $\Delta \neq 0$ ισοδύναμα αν το $x^3 + \alpha x + b$ έχει απλές ρίζες

Taxicab numbers

$$j = 1728 \, \frac{4\alpha^3}{4\alpha^3 + 27b^2}$$

$$j : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Fourier ανάπτυγμα

$$j(z) = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \ldots$$

αναπαραστάσεις απλής

Σ, Σ' είναι ισόμορφες πάνω από ένα αλγεβρικά

κλειστο σωμα $\Leftrightarrow$ εχουν
την ιδια j invariant.

της ομαδας "τερας"

Εχουμε μια μεθοδο να ταξινομησουμε καμπυλες γενους 1.

$$\mathbb{A}^1 = M \qquad\qquad E \longrightarrow j(E)$$

Το $\mathbb{A}^1$ δεν αναπαριστα τον moduli συναρτητη για γενους 1 καμπυλες

$$Y^2Z = X^3 - tZ^2 \qquad t \text{ παραμετρος}$$

$$\subseteq \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$$

$$\underset{\sim}{\mathbb{C}[t]} \longleftrightarrow \underset{\sim}{\mathbb{C}[X,Y,Z,t]} \Big/ \langle Y^2Z - X^3 + tZ^2 \rangle$$

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[t] = \mathbb{A}^1 \longleftarrow \mathcal{E}_t$$

$t = 0$ $\quad Y^2Z = X^3$ η οποια δεν εχει γενος 1 και ειναι ιδιομορφη

$$X^3 - t = X^3 + \alpha x + \beta \qquad \alpha = 0, \quad \beta = -t$$

το οποιο εχει 3 διαφορετικες ριζες αν $t \neq 0$.

$$j = \frac{4\alpha^3}{4\alpha^3 + 27\beta^2} = \frac{0}{27t^2} = 0$$

Για καθε ινα (Θεωρω διαφορετικες ινες με specialization)

$$\left.\begin{aligned} t = 2 \qquad & y^2 = x^3 - 2 \\ t = 1 \qquad & y^2 = x^3 - 1 \end{aligned}\right\} \text{ εχουν την ιδια } j\text{-invariant.}$$

$$\underset{\sim}{(\mathcal{E}_t \longrightarrow \mathbb{A}^1)} \rightsquigarrow M_1 = \mathbb{A}^1 \qquad j = 0 \qquad \underline{\text{μοναδικο σημειο}}$$

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow \{j = 0\}$$

ολες οι ινες ειναι ιδιες

$$E_1 = x^2 z = x^3 - t z^3 \rightsquigarrow j = 0$$

$\longrightarrow \mathbb{C}(t)$

$E_1 \times (\mathbb{A}^1_t \setminus \{0\})$ τετριμμένο γινόμενο

Δεν έχει t, δεν μεταβάλλεται πάνω από το t

Τετριμμένη οικογένεια.

$\mathcal{E}_t$ έχει ισόμορφες ίνες αλλά δεν είναι τετριμμένη.

$$\mathcal{E}_t \not\cong E_1 \times (\mathbb{A}^1_t \setminus \{0\})$$ Δεν είναι ισόμορφες ως οικογένειες.

Δεν έχουμε δηλαδή κριτήριο που να εξακριβώνει ότι δυο οικογένειες είναι ισόμορφες ή όχι. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε την generic ίνα: Δηλαδή να δούμε τις οικογένειες πάνω από το $\mathbb{C}(t)$

Τότε έχουν την ίδια j-invariant αλλά όμως δεν αρκεί. Γιατί μόνο αν το σώμα είναι αλγ. κλειστό ίδια j-invariant $\Longrightarrow$ ισόμορφες ελλειπτικές καμπύλες.

Οι $\mathcal{E}_t, \mathcal{E}_1$ γίνονται ισόμορφες στο $\mathbb{C}(t^{1/6})$

Ο moduli functor δεν αναπαραστάσιμος.

__Λύσεις.__

1) Επεκτείναμε την κατηγορία των Schemes σε κάτι γενικότερο (Algebraic spaces ή Stacks)

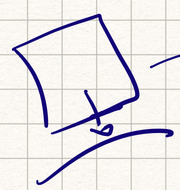
Stack = { γεννιούνται από αυτό που στην γεωμετρία ονομάζεται orbifold
καλύμματα των ανοιχτών γίνονται στην etale τοπολογία και όχι στην Zariski

2) Ισχυρότερη έννοια ισομορφισμού ώστε να φάμε τους αυτομορφισμούς. (pointed curves, level structure στην ιακωβιανή)

3) Coarse moduli space

$\Psi: F(\cdot) \longrightarrow h_M(\cdot)$

υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των συναρτητών που δεν είναι ισομορφισμός



$B \longrightarrow M$

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

Καλές ιδιότητες

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] & B \\ X' \arrow[u] \arrow[r] & B' \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

$\phi: X \to B \longleftrightarrow X: B \to \underline{M}$

$X': B' \longrightarrow M$

$X \circ \xi$

<u>Ορισμός</u> M σχήμα $\Psi_M: F \longrightarrow h_M$

1) $\Psi_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}} : \underline{F}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}) \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} h_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}} = M(\mathbb{C})$

συνάρτηση ανάμεσα σε σύνολα.

2) M' είναι άλλο σχήμα εφοδιασμένο με φυσικό μετασχηματισμό $\Psi_{M'}: F \longrightarrow h_{M'}$

τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\pi: M \longrightarrow M'$ ώστε ο επαγόμενος $\Pi: h_M \longrightarrow h_{M'}$ να ικανοποιεί την $\Psi_{M'} = \Pi \circ \Psi_M$

• Το M_g το coarse moduli space υπάρχει και είναι αλγεβρικό σύνολο (συνεκτικό) διάστασης $3g-3$ $(g \geq 2)$

Επίσης κατασκευάζει μια καλή συμπαγοποίηση: stable curves.

Infinetesimal deformation και θα κατασκευάσουμε τον εφαπτόμενο χώρο στον moduli space.