Αλγ. Γεωμετρία 27/5/2021

Moduli spaces από (αλγεβρικές καμπύλες) Algebraic Varieties)

Οι αλγεβρικές καμπύλες είναι το καλύτερα κατανοητό κομμάτι των αλγεβρικών συνόλων που καταλαβαίνουμε.

Αλγεβρική καμπύλη: Projective scheme ακέραιο διάστασης 1.

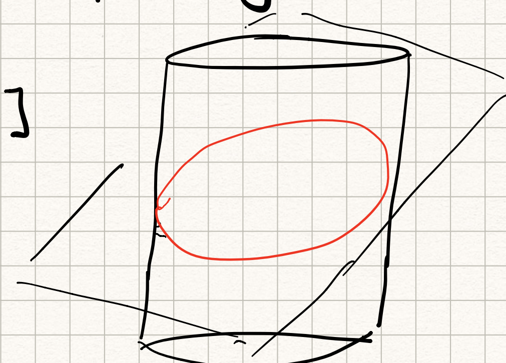
$$x^2+y^2=1 \rightsquigarrow x^2+y^2=z^2$$

$$V(x^2+y^2-z^2) \subset \mathbb{P}^2_k \qquad \text{Διάσταση } 1.$$

Επίπεδες: Δίνονται από μια μόνο εξίσωση.

$x^2+y^2=0$ στο $k[x,y,z]$

$3x+5y=6$



Σύστημα εξισώσεων $\rightsquigarrow$ I ιδεώδες του $k[x_0,\dots,x_n]$

$\dim V(I)=1.$

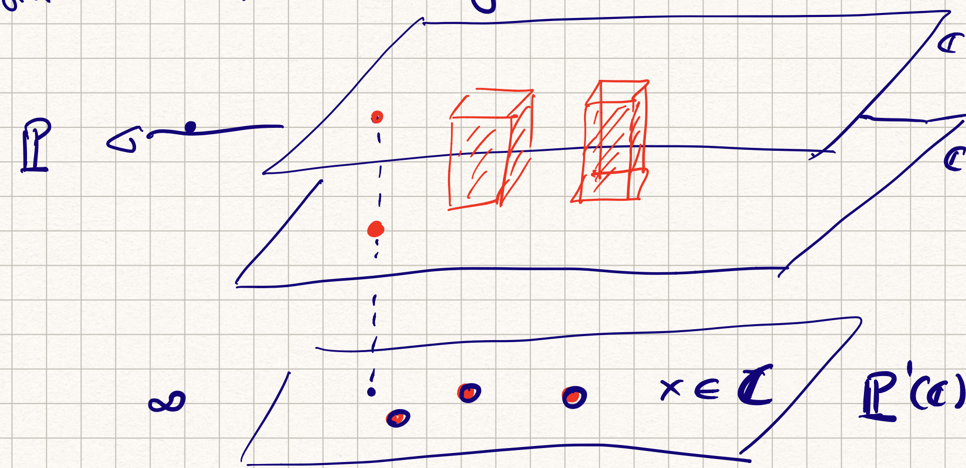
Αλγεβρικές καμπύλες $\xrightarrow[\text{υπερ. της } \mathbb{C}]{}$ Riemann Surface.

$$\sqrt{f(x)} \rightsquigarrow y^2=f(x) \rightsquigarrow \text{αλγεβρική καμπύλη}$$

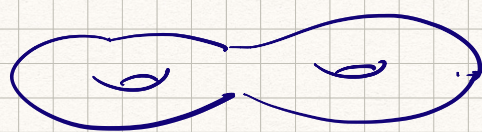
$x\in\mathbb{C}$ $\quad y = \pm\sqrt{f(x)}$

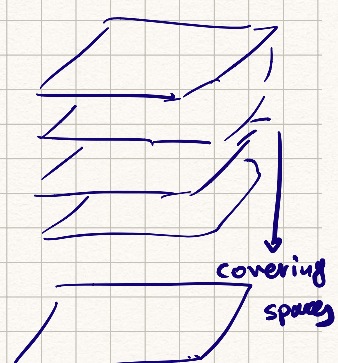
$x \in \mathbb{C}$ $\quad y_0, y_1 = \pm\sqrt{f(x)}$

για όλα τα x εκτός από π.χ. το πλήθος x για τα οποία το $f(x) = 0$



Τοπολογία





$y^2 = f(x)$ $\qquad$ $y^n = f(x)$

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}(x)\left(\sqrt[n]{f(x)}\right) \\ | \\ \mathbb{C}(x) \end{array}$$

Galois επεκτάσεις $\longleftrightarrow$ (covering spaces)

Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών.

$f(x,y) \in \mathbb{C}[x][y]$ ορίζει μια αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{C}(x)$.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(y) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{C}(x)(y) \\ | \\ \mathbb{C}(x) \end{array} \qquad y \in f(x,y)$$

Δυο αλγεβρικές καμπύλες (μη ιδιόμορφες) αν έχουν το ίδιο σώμα συναρτήσεων είναι ισόμορφες.

Δηλαδή μπορούμε να τις μελετήσουμε με θεωρία σωμάτων.

(Σε παραπάνω διαστάσεις αυτό είναι λάθος)
Υπάρχουν παραδείγματα αλγεβρικών επιφανειών με το ίδιο σώμα που δεν είναι ισόμορφα.

Αλγεβρική Γεωμετρία $\longleftrightarrow$ Αλγεβρική Θ. Αριθμών

Επιφάνειες Riemann

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$?

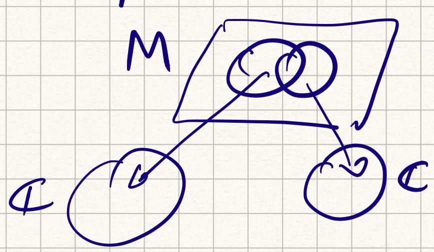
$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i z^i \qquad\qquad \alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i p^i \in \mathbb{Z}_p$$

p-αδικοί αριθμοί

$$z^{(z-\alpha)} \longrightarrow p$$

συμπαγείς

Μια μιγαδική αλγεβρική πολ/τα διάστασης 1. $\longleftrightarrow$ Αλγεβρικές Καμπύλες πάνω από το $\mathbb{C}$



συμπαγές σύνολο

δίνεται από αλγεβρικές εξισώσεις

Γένος $\quad G \qquad \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \supset X$

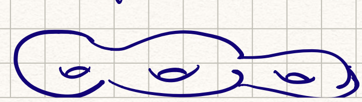
$$f_i(x_0, \dots, x_n)$$

$$\bigcap f_i^{-1}(0)$$

συμπαγές ως κλειστό μέσα στο συμπαγές σύνολο $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

αντίστροφη εικόνα του $\{0\}$

Κάθε προσανατολίσιμη επιφάνεια διάστασης 2 είναι ομοιομορφική



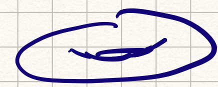
συνεκτικό άθροισμα ...

τομ

$\mathbb{N} \ni g$ - το πλήθος τρύπες

Ταξινόμηση

$g=0$ $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ προβολική ευθεία

$g=1$ Σ  Ελλειπτικές Καμπύλες / Αυτές αποκτούν πολλές διαφορετικές αλγεβρικές δομές

$g \geq 2$  → M_g "moduli space των αλγεβρικών καμπυλών" χώρος

$3g-3$.

g → γένος τοπολογικά μόνο για το $\mathbb{C}$.

$C_{\overline{\mathbb{F}}_p}$

Θεωρία ομολογίας για τυχαία αλγεβρικά σύνολα πάνω από οποιοδήποτε σώμα.

$$\dim_k H^0(X, \Omega_{X/k}) = g$$

μπορεί να ορίσει

$\Omega_{X/k}$ sheaf ολομόρφων διαφορικών

στην περίπτωση των Αλγεβρικών καμπυλών πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι ο αριθμός από τρύπες της αντίστοιχης επιφάνειας.

Αλγεβρική καμπύλη πάνω από το $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ → οδηγεί σε διοφαντικές εξισώσεις

$g=0$

Έχει ~~κανένα~~ ένα σημείο στο $\mathbb{Q}$ που να την επαληθεύει ή άπειρα το πλήθος.

$g=1$ $E(\mathbb{Q})$ → είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα. Mordell

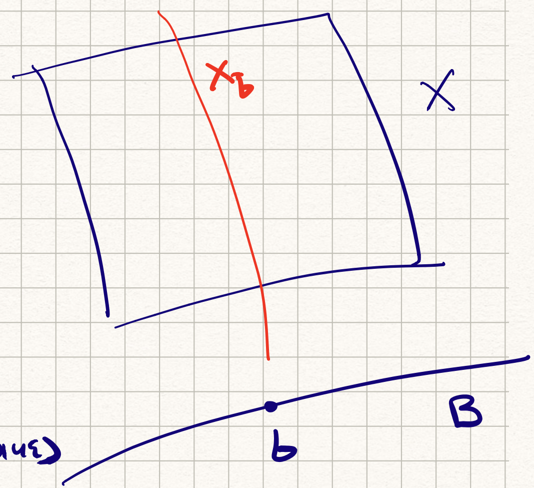
$\# X(\mathbb{Q}) < \infty$ Εικασία Mordel.

$g \geq 2.$ $\lambda(\mathbb{Q})$ …

1984 Faltings Fields.

Moduli space

Οικογένειες από καμπύλες



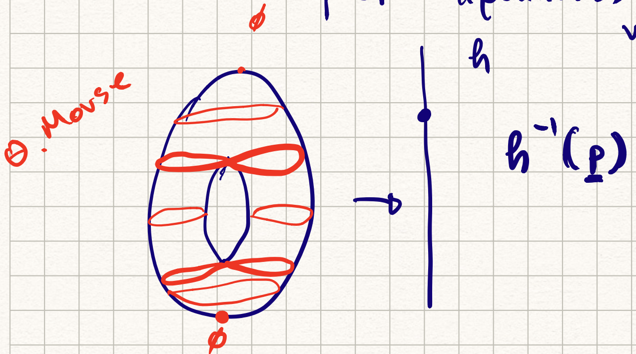
$$\varphi : X \longrightarrow B$$

$$X_b = \{b\} \times_B X \quad \text{"ίνα"}$$

"non-singular προβολικές αλγεβρικές καμπύλες"

Η οικογένεια να είναι "flat" $\longrightarrow$ Ομολογική άλγεβρα "συνεχούς μεταβολής"

Οι ίνες, οι αροσιμονες των διαφορετικών σημείων να μην έχουν μεγάλες και ανανονικες συμπεριφορές.



$$F : \underset{\text{σχημάτων}}{Sch/S} \longrightarrow \begin{array}{l}\text{κλάσεις ισομορφισμού}\\ \text{αλγεβρικών καμπυλών}\\ \text{πάνω από το } B\end{array}$$

$$B \xrightarrow{F} \text{"} X \longrightarrow B \text{"}$$

κλάσεις ισομορφισμού τους

Να είναι αναπαραστάσιμος

Να υπάρχει ένα αντικείμενο

$$M_g$$

$$\underline{F(B) = \mathrm{Hom}(B, M_g)}$$

Flat

R- Modules $\underline{M}$

$$M'' = M/M'$$

$$0 \xrightarrow{\varphi} M' \xrightarrow[1-1]{i} M \xrightarrow{j} M'' \xrightarrow[\varepsilon\pi\iota]{\partial} 0$$

$$0 = \mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\, i$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, j}$$

$$\mathrm{Im}\, j = \mathrm{Ker}\,\partial = M''$$

N R-module

$$N \otimes_R M' \xrightarrow[1\otimes i]{} N \otimes_R M \xrightarrow[1\otimes j]{\varepsilon\pi\iota} N \otimes_R M'' \longrightarrow 0$$

$1\otimes j$ επι

$\mathrm{Im}\, 1\otimes i = \mathrm{Ker}(1\otimes j)$

Αλλά η $1\otimes i$ δεν είναι $1\otimes i$.

Ένα module N λέγεται flat ανν για καθε

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

$$N \otimes_R M' \xrightarrow[1\otimes i]{} N \otimes_R M \qquad \underline{\text{είναι } 1-1}$$

F free $\quad F = R \oplus R \oplus \cdots \oplus R$ free
τοτε είναι flat.

$$R \otimes_R A \cong \underline{A} \qquad F \text{ είναι free rank } 1$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M' & \to & M & \to & M'' & \to & 0 \\
 & & \| & & \| & & \cong & & \\
0 & \to & R\otimes_R M' & \to & R\otimes_R M & \to & R\otimes_R M'' & \to & 0
\end{array}$$

$F = \bigoplus R = R \oplus \cdots \oplus R$

$$F \otimes_R A = (R \oplus \cdots \oplus R) \otimes_R A =$$
$$= (R \otimes_R A) \oplus \cdots \oplus (R \otimes_R A)$$
$$A \oplus \cdots \oplus A.$$

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M^{\oplus n} \underset{\underline{\underline{1-1}}}{\longrightarrow} M'^{\oplus n} \longrightarrow (M'')^{\oplus n} \longrightarrow 0$$

M R-module $\quad S$ πολ/κο σύνολο

$S^{-1}R$ εντοπισμός του R στο S

$$\overbrace{S^{-1}R \otimes_R}^{\text{extension of scalars}} M = S^{-1}M$$

R-module

$$R \xrightarrow{i} S^{-1}R \ni \frac{r}{s}$$
$$r \longmapsto \frac{r}{1}$$

$\dfrac{m}{s} \quad s \in S$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{1-1} M' \longrightarrow$$

$$S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M' \;?$$

$$\frac{m}{s} \longrightarrow \frac{m}{s} = 0$$

$M \subset M'$ $\quad s' \in S$

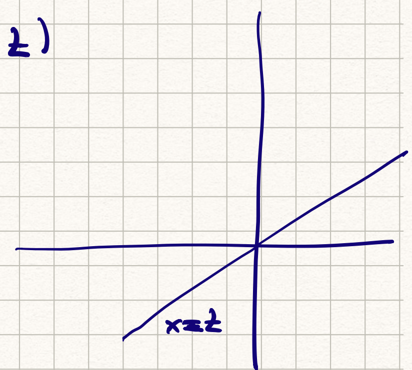
$\dfrac{m}{s} = \dfrac{0}{1} \quad s'm = 0$

$\exists\, s' \in S$ ώστε

$S^{-1}M \ni \frac{m}{s}$ ——— $s' \cdot m = 0$

θα ήταν 0 επίσης.

$R = k[t]$ $\qquad R' = R[x]/(x-t) \cong R$



$\underline{R' \otimes_R N} = R \otimes_R N = N$

$\mathfrak{p} := (t-a)$

$R' \otimes \frac{k[t]}{(t-a)} = k[x]$

$t = a$

$k \longleftarrow R = k[t]$

$a \longmapsfrom t$

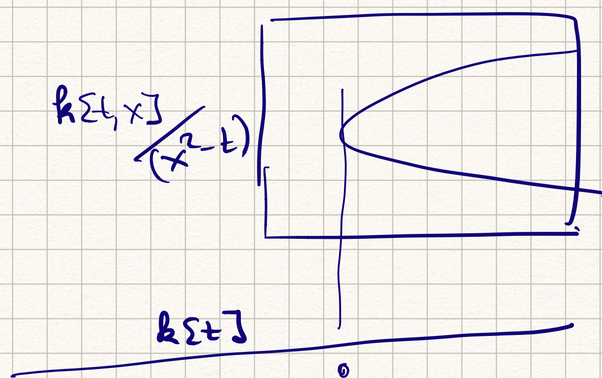
$\mathfrak{p} \longmapsto \operatorname{Spec} k[t]$

$\mathfrak{p} = t - a$

$$\underset{k[t][x]}{R'} = R[x]/(x^2-t) \cong \underline{R} \oplus \underline{R}$$

$\underline{\underline{flat}}$ R-mod

$$a + xb \xleftarrow[\cong]{} (a, b)$$



Ινα πανω απο το $P = (t-a)$ $\quad a \neq 0$

$$k[x]/(x^2-a) \cong k \times k$$

$P = (t-0)$ $\quad k[x]/(x^2)$

$\dim_k$

$$R' \otimes_R N = \underline{N} \oplus \underline{N} \quad \text{„flat"}$$

$$R' = R[x]/(tx-1) \qquad R'' = k[x, x^{-1}]$$

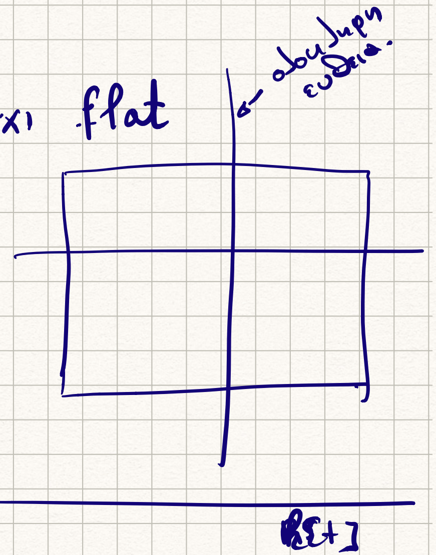
Είναι flat (ιδιότητα του εντοπισμού ως προς την flatness)

Εντοπισμός στο πολ/μο σύνολο $\{x^i : i \in \mathbb{N}\}$

$$R$$

$$R' = k[x]/(t(x-1))$$

Όχι flat



$p \in \operatorname{Spec} k[t]$ το οποίο δεν περιέχει το t

$p = (t-1)$

$$k(p) = \frac{k[t]}{p} = k$$ το t είναι αντιστρέψιμο.

$$k(p) \otimes_R R' = k(p)[x]/\underbrace{t(x-1)}$$

$$= k(p)[x]/(x-1) = k(p)$$

$P = (t)$

$$k(p) \otimes_R R[x] = \frac{R[x]}{k(p)}$$

$t(x-1)$ είναι 0 στο $k(p)$

$$\frac{k(p)[t,x]}{(t(x-1))} \to 0$$

Ομολογική άλγεβρας

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

$$\to \underbrace{\mathrm{Tor}_1^R(N,M'')}_{} \to N\otimes_R M' \to N\otimes_R M \to N\otimes_R M'' \to 0$$

Tor συναρτητης ομολογικη θεωρία.

Flatness : εννοια αντιμεταθετικης αλγεβρας εξασφαλίζει την ομαλότητα στην διαταραχη των ινων.

Representable

$\mathcal{C} : X \to B$

F Schemes
$B \longrightarrow [X \to B]$ κλάσεις ισοδυναμίας τέτοιων οικογενειών.

Σχήματα πανω απο το k $(\mathbb{C})$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi", "\text{ισομορφισμός}"'] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

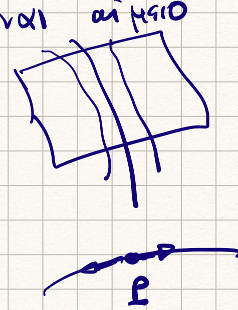
$F(\mathbb{C}) = \{$ κλάσεις ισομορφισμων αλγεβρικων καμπυλων πανω απο το $\mathbb{C}$ $\}$

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}\, k & & \mathrm{Spec}\, \mathbb{C} \end{array}$$

Αλγεβρικη Καμπυλη

Δεν υπάρχει οικογένεια η βαση είναι σημείο

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ B \\ \sim \end{array}$$

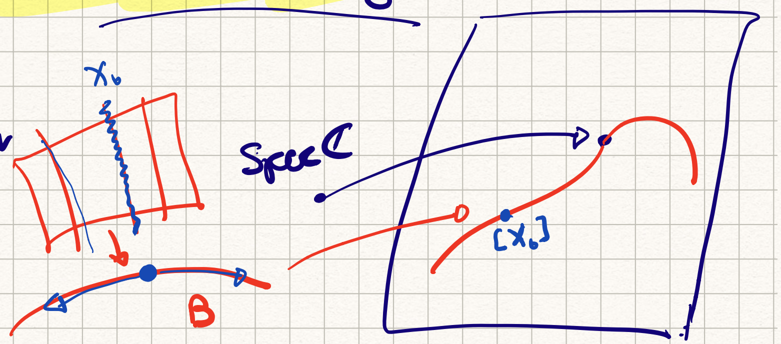


p

$F(B) = \mathrm{Hom}(B, M_g)$ M_g είναι variety scheme.

$$F(\operatorname{Spec}\mathbb{C}) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec}\mathbb{C}, M_g) \rightsquigarrow \text{σημεία του Moduli spaces}$$

κλάσεις ισομορφισμών αλγεβρικών καμπυλών (χωρίς οικογένειες)



Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα σχήμα το οποίο να έχει ως σημεία κλάσεις ισομορφισμών αλγεβρικών καμπυλών

"Χώρος των αλγεβρικών καμπυλών".