

Αλγεβρική Γεωμετρία 11/5/2021

Αναπαράσταση συναρτήσεων.

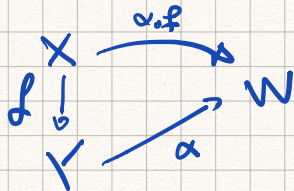
$$h_W(X) = \text{Hom}_E(X, W)$$

W σταθερό αντικείμενο της E

$$E \longrightarrow \text{Sets}$$

$$X \longrightarrow \text{Hom}_E(X, W)$$

$$f: \text{Hom}_E(X, X) \longrightarrow \text{Hom}_E(X, W) = h_W(X)$$



$$h_W(f) = \alpha \circ f \in \text{Hom}_{\text{Set}}(h_W(X), h_W(X))$$

Contravariant συνάρτηση (αντιστέφει τα βέλη).

$$h_W^0(X) = \text{Hom}_E(W, X)$$

covariant

σταθερό αντικείμενο

μεταβλητά αν.

Representable:

$$F: E \longrightarrow \text{Sets}$$

contravariant συνάρτηση

$$\exists W \in \text{Ob}(E)$$

$$h_W \cong F$$

δηλαδή για τυχαίο $X \in \text{Ob}(E)$

$$\phi_X: F(X) \cong h_W(X)$$

ισομορφισμός συνόλων δηλ. 1-1/επί

$$f \in \text{Hom}(X, X)$$

$\mathcal{D} = \text{Hom}_e(\dots)$

$$\begin{array}{ccc} F(X_2) & \xrightarrow[\cong]{\Phi_{X_2}} & h_w(X_2) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow h_w(f) \\ F(X_1) & \xrightarrow[\cong]{\Phi_{X_1}} & h_w(X_1) \end{array}$$

Θέλουμε να έχουμε αντιμεταθετικό διόγραμμα.

$$\begin{array}{ccc} \Phi_w : F(W) & \xrightarrow[\cong]{} & h_w(W) \\ \psi & & \text{Hom}_e(W, W) \\ \psi & \longleftarrow & \text{Id}_W \end{array}$$

(W, ψ) καθορίζει απεικόνιστον F .

$x \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad \underline{h} \in h_w(x) = \text{Hom}_e(x, W)$

$$\begin{array}{ccc} \psi \in F(W) & \xrightarrow[\cong]{\Phi_w} & h_w(W) = \text{Hom}_e(W, W) \\ F(h) \downarrow & & \downarrow h_w(h) \\ F(h)(\psi) \in F(X) & \xrightarrow[\cong]{\Phi_x} & h_w(X) = \text{Hom}_e(X, W) \end{array}$$

(A green arrow points from ψ to Id_W in the top row, and another from Id_W to $h_w(h)$ in the right column.)

$$\begin{array}{ccc} \psi & \xrightarrow{\Phi_w} & \text{Id}_W \\ h_w(h)(\text{Id}_W) = h & & \checkmark \end{array}$$

$h = h_w(h)(\text{Id}_W)$

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\text{Id}} & W \\ h \uparrow & \nearrow h_w(h) = \text{Id} \circ h & \\ X & & h \end{array}$$

$h = \varphi_x(F(h)(\psi))$

$$\widetilde{F(X)} = \left\{ F(h)(\psi) \quad \left. \begin{array}{l} \text{που το } h \text{ διατρέχει} \\ \text{το } h_X(W) \end{array} \right\} \right.$$

↑
στοιχεία του σπινδιού στο X

↙ Διατρέχει τους $h \in \text{Hom}(X, W)$

Λήμμα Αν ένας contravariant σπινδιός είναι αναπαραστάσιμος τότε το ζεύγος (W, ψ) είναι μορφή και καθορισμένο μέχρι ισομορφίας.

$$(W, \psi) \text{ αναπαριστά τον } F$$

$$(\widetilde{W}, \widetilde{\psi}) \text{ ---//---}$$

$$\Phi: F \rightarrow h_W$$

$$\Phi_W(\psi) = \text{Id}_W$$

$$\widetilde{\Phi}: F \rightarrow h_{\widetilde{W}}$$

$$\widetilde{\Phi}_{\widetilde{W}}(\widetilde{\psi}) = \text{Id}_{\widetilde{W}}$$

$$\Phi_{\widetilde{W}}: F(\widetilde{W}) \xrightarrow{\sim} h_W(\widetilde{W}) = \text{Hom}_e(\widetilde{W}, W)$$

$$\widetilde{\Phi}_W: F(W) \xrightarrow{\sim} h_{\widetilde{W}}(W) = \text{Hom}_e(W, \widetilde{W})$$

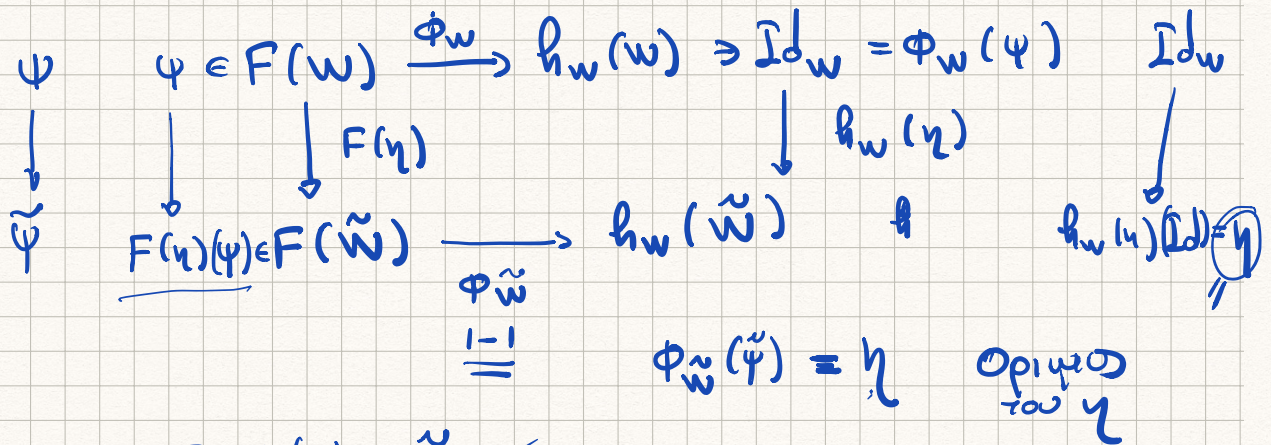
$$\eta = \Phi_{\widetilde{W}}(\widetilde{\psi}): \widetilde{W} \rightarrow W$$

$$\widetilde{\eta} = \widetilde{\Phi}_W(\psi): W \rightarrow \widetilde{W}$$

$$\text{Θα δείξουμε } \eta \circ \widetilde{\eta} = \text{Id}_W \quad \widetilde{\eta} \circ \eta = \text{Id}_{\widetilde{W}}$$

απο εφόρως οι \widetilde{W}, W είναι ισομορφικοί.

$$F(\eta)(\psi) = \psi \quad F(\eta)(\psi) = \psi.$$



$$F(\eta)(\psi) = \tilde{\psi} \quad \checkmark$$

$$F(\tilde{\eta})(\tilde{\psi}) = \psi$$

$$F(\eta \circ \tilde{\eta})(\psi) = F(\tilde{\eta}) \circ F(\eta)(\psi) = \psi$$

$$F(\text{Id})(\psi) = \psi$$

$$\eta \circ \tilde{\eta} = \text{Id}_W$$

$$\tilde{\eta} \circ \eta = \text{Id}_{\tilde{W}}$$

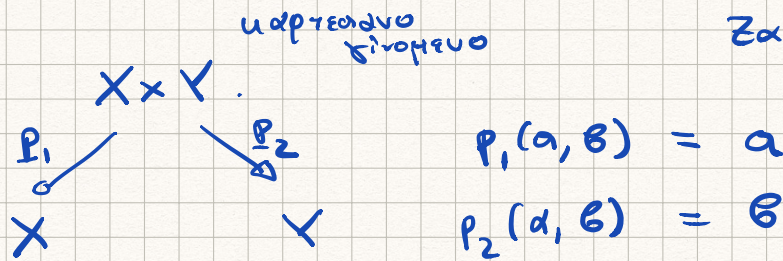
Αντικείμενα που ορίζουμε με μονοσήμαντο τρόπο μέσω κανονικών ισομορφισμών αναπαριστών συναρτήσεων σε κατάλληλες κατηγορίες.

Γινόμενο $X \times Y$ σε μια κατηγορία \mathcal{C}

με χρήση ενός αναπαράστασης συναρτήτων.

Καρτεσιανού γινόμενου: X, Y σύνολα: είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (a, b) $a \in X$
 $b \in Y$

Δουλεύει καλά για σύνολα, διανυσματικούς χώρους κτλ.
Δεν δουλεύει καλά για σχήματα πχ δεν δουλεύει
σύνολα η τοπολογία Zaviscki.



Θεωρούμε τον contravariant συναρτήτων.

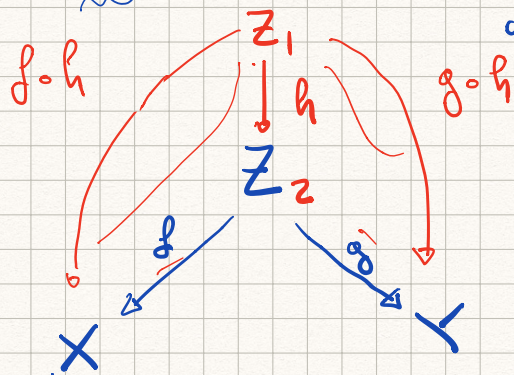
$$F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$$

X, Y
σύνολα
δουλεύει
να ορίσουμε
το γινόμενο

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{Hom}_e(\mathcal{C}, X) \times \text{Hom}_e(\mathcal{C}, Y)$$

σύνολο σύνολο

Καρτεσιανό γινόμενο.



Ενα αντικείμενο

$$F(Z) = \left\{ (f, g) : \begin{array}{c} Z \xrightarrow{f} X \\ Z \xrightarrow{g} Y \end{array} \right\}$$

$$F(f)$$

$$F(Z_2) \rightarrow F(Z_1)$$

$$Z_1 \xrightarrow{h} Z_2$$

Αν ο συναρτητής F όπως ορίστηκε είναι
 αναπαριστάται

$$F = h_W$$

για κάποιο $W \in \mathcal{O}_b(W)$

τότε W είναι το
 γινόμενο των X, Y

$$W = X \times Y$$

$$F(z) = \{f, g\}$$

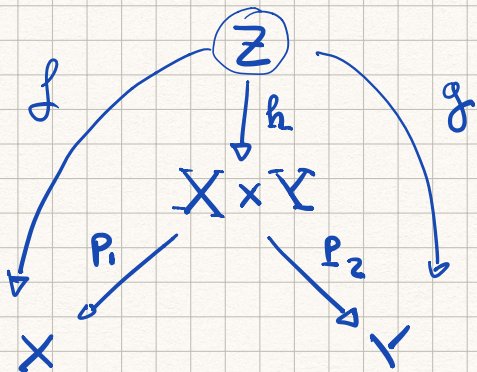
$$\left. \begin{array}{l} f: Z \rightarrow X \\ g: Z \rightarrow Y \end{array} \right\}$$

τα αντιστοιχούν
 με μοναδικό
 τρόπο

σε μια

$$Z \xrightarrow{h} X \times Y$$

$$h(z) \in h$$



$$(f, g) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$$

Σημεία: Προφανές μέσω του κλάσματος γινόμενου

$\mathcal{C} = \text{Sets}$

$$Z \xrightarrow{f} X$$

$$Z \xrightarrow{g} Y$$

(f, g)

Θεωρώ τα ζεύγη
 $(f(z), g(z)) \quad z \in Z$

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

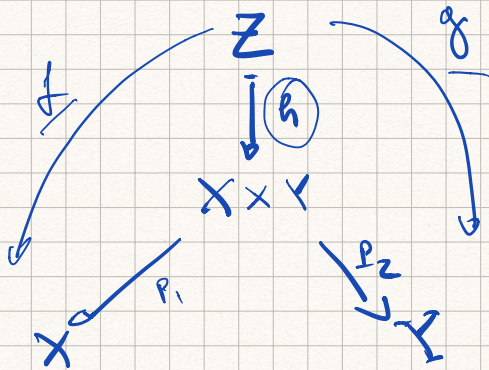
Για κάθε $f, g: Z \rightarrow X, Y$

υπάρχει φυσολογική και μοναδική σάρτηση

$$\begin{aligned} Z &\longrightarrow X, Y \\ z &\longrightarrow (f(z), g(z)) \in X \times Y \end{aligned}$$

$$Z \longrightarrow X \times Y$$

και υαθε ζευγαρι συναρτησεων f, g πραγοντοποιηται απο ης τροβας



Ορισμος Γινωμενο $X \times Y$ υπαρχει αν και μονο αν ο συναρτησης F ειναι αναπαριστουμενη $F \cong h_W$ $h_W(x) = \text{Hom}(x, W)$

το \bar{W} αυμερικανο (το οποιο ειναι και μονοσηματα οριζιο μεσω ισομορφικου δια το συμβολισμε με $X \times Y$).

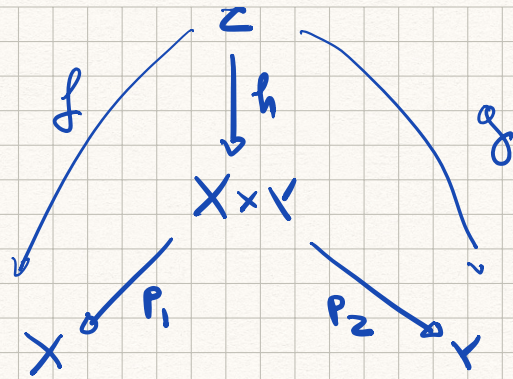
Υπαρχει το $X \times Y$

(Γ) Υπαρχουν $p_1 \in \text{Hom}_e(X \times Y, X)$
 $p_2 \in \text{Hom}_e(X \times Y, Y)$

ωστε για τυχαious μορφηους

$$f \in \text{Hom}_e(Z, X) \quad g \in \text{Hom}_e(Z, Y)$$

$$F \text{ γενικευση } h \in \text{Hom}_e(Z, X \times Y)$$



$$(f, g) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$$

Αντιστρόφως αν $X \times Y$ έχει την ιδιότητα (Γ) τότε $X \times Y$ είναι το γινόμενο των X και Y .

Εδώ οι προβολές p_1, p_2 δεν είναι σίγουρα πως θα ορίσταν όσο ήταν στην κατηγορία των σπινδύλων (που είχαμε να υφίστανται με διατεταγμένα ζεύγη).

$$\begin{array}{l}
 \Psi \\
 \uparrow \\
 F \cong h_{X \times Y} \\
 \downarrow \text{επι} \\
 F(X \times Y) = \text{Hom}_e(X \times Y, X) \times \text{Hom}_e(X \times Y, Y) \\
 \cong \\
 \text{Id}_{X \times Y} h_{X \times Y}(X \times Y) = \text{Hom}_e(X \times Y, X \times Y) \\
 \text{Id}_{X \times Y}
 \end{array}$$

Θα δείξουμε ότι οι p_1, p_2 όπως κατασκευάστηκαν ικανοποιούν την ιδιότητα (Γ)

$$z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

$$f \in \text{Hom}_e(z, X)$$

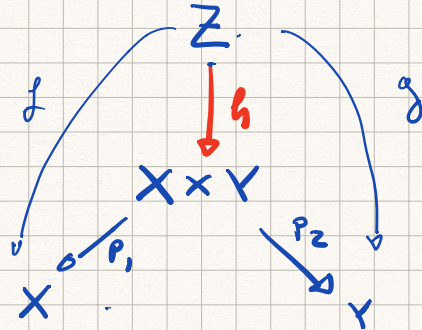
$$g \in \text{Hom}_e(z, Y)$$

$$(f, g) \in F(z)$$

$$\underline{F(Z)} \cong \underline{h_{X \times Y}(Z)}$$

συνεπώς υπάρχει μοναδική
 $h \in h_{X \times Y}(Z) = \text{Hom}_e(Z, X \times Y)$

$$(f, g) \leftrightarrow h$$



$$F(h) \in \text{Hom}_{\text{Set}}(F(X \times Y), F(Z))$$

$$h_{X \times Y}(h) \in \text{Hom}_{\text{Set}}(h_{X \times Y}(X \times Y), h_{X \times Y}(Z))$$

$$F(h)(\overset{\psi}{(p_1, p_2)}) \rightarrow h_{X \times Y}(h)(\text{id}_{X \times Y})$$

$$F(h)(p_1, p_2) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$$

ορισμός
του
 $F(h)$

$$\downarrow$$

$$h_{X \times Y}(h)(\text{Id}_{X \times Y}) = h$$

$$(f, g) \rightarrow h \quad (f, g) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$$

Αντιστροφή: $(X \times Y, (p_1, p_2))$ που ικανοποιεί
 των (Γ)

$$Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

$$\psi_Z : h_{X \times Y}(Z) = \text{Hom}_e(Z, X \times Y) \rightarrow F(Z)$$

$$\parallel$$

$$\text{Hom}_e(Z, X)$$

$$\text{Hom}_e^X(Z, X)$$

$$(Z \xrightarrow{h} X \times Y) \longrightarrow (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$$

Ισχύει η ιδιότητα (Γ) συνεπώς
υπάρχει $h \in \text{Hom}_e(Z, X \times Y)$

$$f = p_1 \circ h \quad g = p_2 \circ h$$

Αρα η φ_Z (για Z σταθερό είναι επί)

Η ιδιότητα (Γ) εξασφαλίζει ότι η h είναι μονότιμη.

$$\varphi_Z: h_{X \times Y}(Z) \xrightarrow{\cong} F(Z)$$

$$\alpha \in \text{Hom}_e(Z_1, Z_2)$$

$$\begin{array}{ccc} h_{X \times Y}(Z_2) & \xrightarrow{\varphi_{Z_2} \cong} & F(Z_2) \\ \downarrow h_{X \times Y}(\alpha) & \searrow h & \downarrow (p_1 \circ h, p_2 \circ h) \\ h_{X \times Y}(Z_1) & \xrightarrow{\varphi_{Z_1} \cong} & F(Z_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \cong \\ \downarrow \\ \cong \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \downarrow \\ \cong \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ F(\alpha) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Z_1 & \xrightarrow{\alpha} & Z_2 \\ & \searrow h_{X \times Y}(\alpha) & \downarrow h \\ & & X \times Y \end{array}$$

Fibre product

Ισωςες γινώμενο

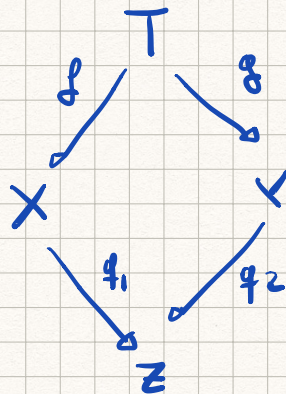
X, Y

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q_1} & Z \\ Y & \xrightarrow{q_2} & Z \end{array} \quad \mathcal{C}$$

$$G: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$$

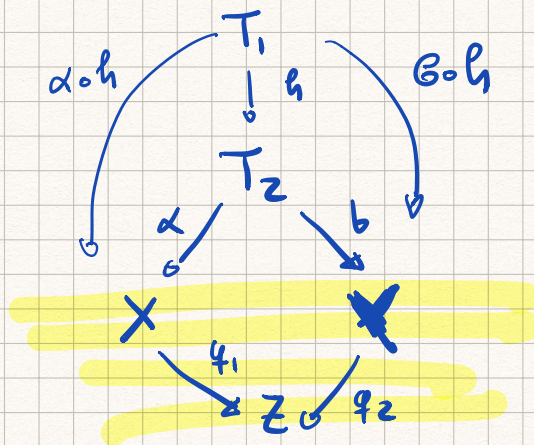
$$G(T) = \left\{ (f, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y) \mid f_1 \circ f = f_2 \circ g \right\}$$

$T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$



$$h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T_1, T_2)$$

$$(\alpha, \beta) \in G(T_2)$$



$$G(T) \in \text{Hom}_{\text{Set}}(G(T_2), G(T_1))$$

Αν υπάρχει

$W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

εφοδιασμένο
με προβολές

που να αναπαριστά τον σπάρτη

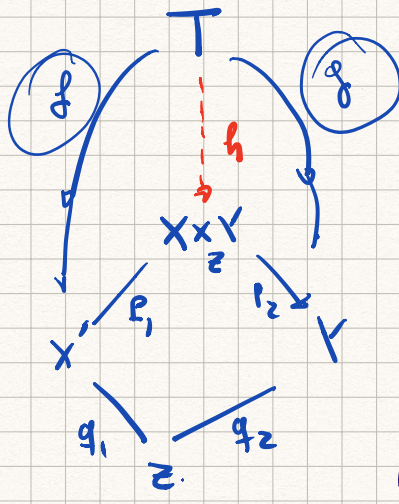
$$p_1, p_2: W \rightarrow X, Y$$

G τότε αυτό θα ληφθεί

το $\langle \text{ινωδες} \rangle$ δινόμενο

$$X \times_Y Y$$

(Γ) (Δ Γ)



$(p_1, p_2) \hookrightarrow \psi$

$(f, g) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$

$h_w \xrightarrow{\sim} G$

Παράδειγμα

$q_1 : X \rightarrow Z$
 $q_2 : Y \rightarrow Z$

$(X \times_Z Y, (p_1, p_2))$

$X \times_Z Y = \left\{ (x, y) \in X \times Y : q_1(x) = q_2(y) \right\}$
 $S \sim \text{schemes}$ $S = Z$

$X \times_Z Z \xrightarrow{\sim} X$

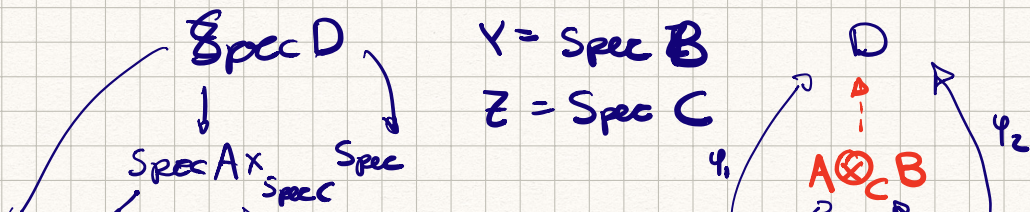
Θεώρημα Στην κατηγορία των σχημάτων υπάρχουν ινδών γινόμενα.

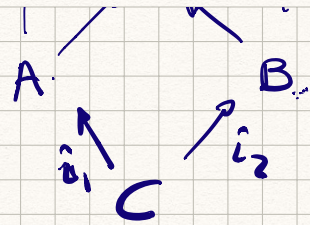
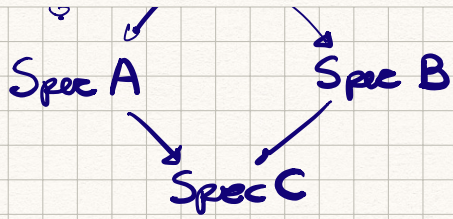
Αγίρια σχήματα.

$X = \text{Spec } A$

$Y = \text{Spec } B$

$Z = \text{Spec } C$





A, B γινώματι C αλγεβρες
 \sim \sim

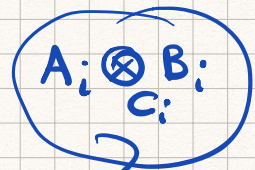
$$\text{Spec } A \times_{\text{Spec } C} \text{Spec } B = \text{Spec}(A \otimes_C B)$$

Στην ουσιαστικά :

$X \rightsquigarrow$ αφηρημένη κατάσταση

$Y \rightsquigarrow$ αφηρημένη

$Z \rightsquigarrow \rightsquigarrow$



και ελλοβε
 κατά μεταφο
 ρα σε
 ένα σχήμα
 με τις
 χαρακτηριστικές
 ιδιοτητες

Abstract Nonsense