Αλγεβρική Γεωμετρία 11/5/2021

Αναπαραστάσιμους συναρτητές.

$$h_W(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$$

W σταθερό αντικείμενο της $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$
$$X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$$

$f : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ $\quad a \in h_W(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a \circ f"] \arrow[d, "f"'] & W \\
Y \arrow[ru, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

$$h_W(f) = a \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(h_W(Y), h_W(X))$$

Contravariant συναρτητής (αντιστρέφει τα βέλη).

$$h^0_W(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$$ covariant

σταθερό αντικείμενο

μεταβλητά αν.

Representable: $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ contravariant συναρτητής

$\exists\ W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$h_W \cong F$$

Δηλαδή για τυχαίο $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$\Phi_X : F(X) \cong h_W(X)$$

ισομορφισμός συνόλων δηλ. 1-1/επί

$f \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)$

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2)$

$$\begin{tikzcd}
F(X_2) \arrow[r, "\Phi_{X_2}", "\cong"'] \arrow[d, "F(f)"'] & h_W(X_2) \arrow[d, "h_W(f)"] \\
F(X_1) \arrow[r, "\Phi_{X_1}", "\cong"'] & h_W(X_1)
\end{tikzcd}$$

Θέλουμε να έχουμε αντιμεταθετικό διάγραμμα.

$$\Phi_W : F(W) \xrightarrow{\cong} h_W(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, W)$$

$$F(W) \ni \psi \longmapsto \mathrm{Id}_W$$

(W, ψ) καθορίζει πλήρως τον F.

$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ $\qquad$ $h \in h_W(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$

$$\begin{tikzcd}
\psi \in F(W) \arrow[r, "\Phi_W", "\cong"'] \arrow[d, "F(h)"'] & h_W(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, W) \ni \mathrm{Id} \arrow[d, "h_W(h)"] \\
F(h)(\psi) \in F(X) \arrow[r, "\Phi_X", "\cong"'] & h_W(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)
\end{tikzcd}$$

$$\psi \xrightarrow{\Phi_W} \mathrm{Id}_W$$

$$h_W(h)(\mathrm{Id}_W) = h \quad ✓$$

$h = h_W(h)(\mathrm{Id}_W)$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W \\
X \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "h_W(h) = \mathrm{Id} \circ h = h"']
\end{tikzcd}$$

$h = \Phi_X\big(F(h)(\psi)\big)$

$$\underline{F}(X) = \{\, F(h)(\psi) \quad \text{όπου το } h \text{ διατρέχει το } h_X(W) \,\}$$

στοιχεία του συναρτητή στο X

Διατρέχει τους $h \in \mathrm{Hom}(X, W)$

<u>Λήμμα</u> Αν ένας contravariant συναρτητής είναι αναπαραστάσιμος τότε το ζευγάρι (W, ψ) είναι <u>μονοσήμαντα καθορισμένο μέχρι ισομορφισμού.</u>

(W, ψ) αναπαριστά τον F

$(\tilde{W}, \tilde{\psi})$ —//—

$$\Phi : F \longrightarrow h_W \qquad \tilde{\Phi} : F \longrightarrow h_{\tilde{W}}$$

$$\Phi_W(\psi) = \mathrm{Id}_W \qquad \tilde{\Phi}_{\tilde{W}}(\tilde{\psi}) = \mathrm{Id}_{\tilde{W}}.$$

$$\Phi_{\tilde{W}} : \overset{\tilde{\psi}}{F(\tilde{W})} \xrightarrow{\sim} h_W(\tilde{W}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{W}, W)$$

$$\tilde{\Phi}_W : \overset{\psi}{F(W)} \xrightarrow{\sim} h_{\tilde{W}}(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \tilde{W})$$

$$\underline{\eta = \Phi_{\tilde{W}}(\tilde{\psi})} : \tilde{W} \longrightarrow W$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{\Phi}_W(\psi) : W \longrightarrow \tilde{W}$$

Θα δείξουμε $\eta \circ \tilde{\eta} = \mathrm{Id}_W \qquad \tilde{\eta} \circ \eta = \mathrm{Id}_{\tilde{W}}$

αυτό εξασφαλίζει ότι $\tilde{W}, W$ είναι ισόμορφοι.

$F(\eta)(\psi) = \psi \qquad F(\eta)(\psi) = \psi.$

$$\begin{array}{ccccc}
\psi & \psi \in F(W) & \xrightarrow{\Phi_W} & h_W(W) \ni Id_W = \Phi_W(\psi) & Id_W \\
\downarrow & \downarrow \; F(\eta) & & \downarrow \; h_W(\eta) & \downarrow \\
\tilde{\psi} & F(\eta)(\psi) \in F(\tilde{W}) & \xrightarrow[\Phi_{\tilde{W}}]{} & h_W(\tilde{W}) & h_W(\eta)(Id) = \eta
\end{array}$$

$1-1$

$\Phi_{\tilde{W}}(\tilde{\psi}) = \eta$ Ορισμός του η

$F(\eta)(\psi) = \tilde{\psi}$ ✓

$F(\tilde{\eta})(\tilde{\psi}) = \psi$

$$F(\eta \circ \tilde{\eta})(\psi) = F(\tilde{\eta}) \circ \underbrace{F(\eta)(\psi)}_{\tilde{\psi}} = \Psi$$

$$F(Id)(\psi) = \Psi$$

$$\eta \circ \tilde{\eta} = Id_W$$

$$\tilde{\eta} \circ \eta = Id_{\tilde{W}}$$

Αντικείμενα που ορίζαμε με μονοσήμαντο τρόπο μέσω κανονικών ισομορφισμών αναπαριστώσ συναρτητές σε κατάλληλες κατηγορίες.

Γινόμενο $X \times Y$ σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$

με χρήση ενός αναπαραστάσιμου συναρτητή.

Καρτεσιανού γινομένου: X, Y σύνολα: είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (α, β) $\alpha \in X$ $\beta \in Y$

Δουλεύει καλά για σύνολα, διανυσματικούς χώρους κτλ.
Δεν δουλεύει καλά για <u>σχήματα</u> πχ δεν δουλεύει σωστά η τοπολογία Zariski.

καρτεσιανό γινόμενο

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

$p_1(\alpha, \beta) = \alpha$

$p_2(\alpha, \beta) = \beta$

Θεωρούμε τον contravariant συναρτητή.

X, Y σταθερά θέλουμε να ορίσουμε το γινόμενο τους

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$$

$$Z \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)}_{\text{σύνολο}} \times \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)}_{\text{σύνολο}}$$

καρτεσιανό γινόμενο.

$$\begin{tikzcd} & Z_1 \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f \circ h"'] \arrow[ddr, bend left, "g \circ h"] & \\ & Z_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Ένα αντικείμενο
$$F(Z) = \{ (f, g) : Z \xrightarrow{f} X, \ Z \xrightarrow{g} Y \}$$

$$Z_1 \xrightarrow{h} Z_2 \qquad F(Z_2) \xrightarrow{F(h)} F(Z_1)$$

Αν ο συναρτητης F οπως ορίσαμε είναι αναπαραστάσιμος

$$F = h_W$$

για καποιο $W \in Ob(W)$

τοτε W ειναι το γινομενο των X, Y

$$W = X \times Y$$

$$F(Z) = \{(f,g)\} \qquad \left.\begin{array}{l} f : Z \longrightarrow X \\ g : Z \longrightarrow Y \end{array}\right\}$$

να αντιστοιχουν με κανονικο τροπο σε μια

$$h_{X\times W}(Z) \ni h \qquad Z \xrightarrow{h} X \times Y$$

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

$$(f,g) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$$

Σύνολα: Προφανες μεσω του καρτεσιανου γινομενου

$$\mathcal{C} = (Sets)$$

$$Z \xrightarrow{f} X \qquad (f,g)$$
$$Z \xrightarrow{g} Y$$

Θεωρω τα ζευγαρια $(f(z), g(z))$ $z \in Z$.

$$X \times Y = \{(x,y) \quad x \in X, \ y \in Y\}$$

Για καθε $f, g : Z \longrightarrow X, Y$

υπαρχει φυσιολογική και μοναδική συνάρτηση

$$Z \longrightarrow X, Y$$
$$z \longrightarrow (f(z), g(z)) \in X \times Y$$

$$Z \longrightarrow X \times Y$$

και κάθε ζευγάρι συναρτήσεων f, g παραγοντοποιείται από τις προβολές

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Ορισμός Γινόμενο $X \times Y$ υπάρχει αν και μόνο αν ο συναρτητής F είναι αναπαραστάσιμος

$$F \cong h_W \qquad h_W(X) = \mathrm{Hom}(X, W)$$

το W συγκεκριμένο (το οποίο είναι και μονοσήμαντα ορισμένο μέσω κανονικού ισομορφισμού θα το συμβολίζουμε με $X \times Y$.

Υπάρχει το $X \times Y$

(Γ) Υπάρχουν

$$p_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, X)$$
$$p_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, Y)$$

ώστε για τυχαίους μορφισμούς

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \qquad g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$$

$\exists$ μοναδικός $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X \times Y)$

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}
$$

$$(f, g) = (p_1 \circ h,\ p_2 \circ h)$$

Αντιστρόφως αν $X \times Y$ έχει την ιδιότητα (Γ) τότε $X \times Y$ είναι το γινόμενο των X και Y.

Εδώ οι προβολές p_1, p_2 δεν είναι σαφές πως θα ορισθούν όσο ήταν στην κατηγορία των συνόλων (που είχαμε να κάνουμε με διατεταγμένα ζεύγη).

$$\Psi \qquad F \cong h_{X \times Y}$$

$$F(X \times Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, Y) \qquad \overset{p_1}{} \quad \overset{p_2}{}$$

1-1 επί

$$\Big| \cong$$

$$\mathrm{Id}_{X \times Y} \qquad h_{X \times Y}(X \times Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, X \times Y)$$

$$\mathrm{Id}_{X \times Y}$$

Θα δείξουμε ότι οι p_1, p_2 όπως κατασκευάστηκαν ικανοποιούν την ιδιότητα (Γ)

$$Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \qquad f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$$

$$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$$

$$(f, g) \in F(Z)$$

$$F(Z) \cong h_{X\times Y}(Z)$$

συνεπώς υπάρχει μοναδική $h \in h_{X\times Y}(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X\times Y)$

$$(f,g) \longleftrightarrow h$$

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & X\times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

$$F(h) \in \mathrm{Hom}_{Set}\big(F(X\times Y), F(Z)\big)$$

$$h_{X\times Y}(h) \in \mathrm{Hom}_{Set}\big(h_{X\times Y}(X\times Y), h_{X\times Y}(Z)\big)$$

$$F(h)((p_1,p_2)) \xrightarrow{\varphi} h_{X\times Y}(h)(id_{X\times Y})$$

$$F(h)((p_1,p_2)) = (p_1\circ h, p_2\circ h)$$

$$\boxed{\text{ορισμός του } F(h)}$$

$$h_{X\times Y}(h)(Id_{X\times Y}) = h$$

$$(f,g) \longrightarrow h \qquad (f,g) = (p_1\circ h, p_2\circ h)$$

<u>Αντιπρόσωπος</u>: $(X\times Y, (p_1,p_2))$ που ικανοποιεί την (Γ)

$$Z \in Ob(\mathcal{C})$$

$$\varphi_Z : h_{X\times Y}(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X\times Y) \longrightarrow F(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X)$$

$$\left(Z \xrightarrow{h} X \times Y \right) \longrightarrow \left(p_1 \circ h,\ p_2 \circ h \right)$$

Ισχυει η ιδιοτητα (Γ) συνεπως

υπαρχει $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, X \times Y)$

$$f = p_1 \circ h \qquad g = p_2 \circ h$$

Αρα η φ_Z (για Z σταθερο ειναι επι)

Η ιδιοτητα (Γ) εξασφαλιζει οτι η h ειναι μοναδικη.

φ_Z 1-1

$$\varphi_Z : h_{X \times Y}(Z) \xrightarrow{\sim} F(Z)$$

$\alpha \in Hom_{\mathcal{C}}(Z_1, Z_2)$

$$\begin{tikzcd}
h_{X\times Y}(Z_2) \arrow[rrr, "\varphi_{Z_2}\ \cong"] \arrow[ddd, "h_{X\times Y}(\alpha)"'] & & & F(Z_2) \arrow[ddd, "F(\alpha)"] \\
& h \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "//"] & (p_1 \circ h, p_2 \circ h) \arrow[d] & \\
& h \circ \alpha \arrow[r] & (p_1 \circ h \circ \alpha, p_2 \circ h \circ \alpha) & \\
h_{X\times Y}(Z_1) \arrow[rrr, "\varphi_{Z_1}\ \cong"'] & & & F(Z_1)
\end{tikzcd}$$

$$h_{X \times Y}(\alpha) = h \circ \alpha \qquad \begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & Z_2 \arrow[d, "h"] \\
& X \times Y
\end{tikzcd}$$

Fibre product Ινωδες γινώμενο

X, Y $\qquad X \xrightarrow{q_1} Z \qquad \mathcal{C}$

$\qquad Y \xrightarrow{q_2} Z$

$G : \mathcal{C} \longrightarrow Set$

$$G(T) = \left\{ (f,g) \in Hom_{\mathcal{C}}(T,X) \times Hom_{\mathcal{C}}(T,Y) \quad q_1 \circ f = q_2 \circ g \right\}$$

$T \in Ob(\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ S \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

$h \in Hom_{\mathcal{C}}(T_1, T_2) \qquad (\alpha, b) \in G(T_2)$

$$\begin{tikzcd}
 & T_1 \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl, bend right, "\alpha \circ h"'] \arrow[ddr, bend left, "b \circ h"] & \\
 & T_2 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

$G(T) \in Hom_{set}(G(T_2), G(T_1))$

Αν υπαρχει $W \in Ob(\mathcal{C})$ εφοδιασμενο με προβολες $p_1, p_2 : W \to X, Y$ που να αναπαριστα τον συναρτητη G τοτε αυτο θα λεγεται το ινωδες γινομενο $X \times_Z Y$

(Γ) (ΙΓ)

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[dr, bend left, "g"] \arrow[d, dashed, "h"] & \\
 & X \times_Z Y \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

$(p_1, p_2) \longleftrightarrow \varphi$

$$(f, g) = (p_1 \circ h,\ p_2 \circ h)$$

$$h_W \xrightarrow{\simeq} G$$

Παράδειγμα

$q_1 : X \to Z$

$q_2 : Y \to Z$

$$(X \times_Z Y, (p_1, p_2))$$

$$X \times_Z Y = \{ (x,y) \in X \times Y \ : \ q_1(x) = q_2(y) \}$$

„S ~ sdemes" $\qquad S = Z$

$$\underbrace{X \times_Z Z} \xrightarrow{\simeq} X$$

Θεώρημα Στην κατηγορία των σχημάτων υπάρχουν ινώδη γινόμενα.

Αφινικά σχήματα.

$X = \operatorname{Spec} A$

$Y = \operatorname{Spec} B$

$Z = \operatorname{Spec} C$

$\operatorname{Spec} D$

$\operatorname{Spec} A \times_{\operatorname{Spec} C} \operatorname{Spec}$

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & A \otimes_C B \arrow[u, dashed] &
\end{tikzcd} \qquad \varphi_1, \ \varphi_2$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\,A \arrow[dr] & & \mathrm{Spec}\,B \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}\,C &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A & & B \\
& C \arrow[ul, "\hat{i}_1"] \arrow[ur, "\hat{i}_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

A, B γίνονται C άλγεβρες

$$\mathrm{Spec}\,A \times_{\mathrm{Spec}\,C} \mathrm{Spec}\,B = \mathrm{Spec}(A \otimes_C B)$$

<u>Στην συνέχεια</u>:

$X \rightsquigarrow$ αφινική κάλυψη

$Y \rightsquigarrow$ αφινική

$Z \rightsquigarrow$ ~

$A_i \otimes_{C_i} B_i$

κολλάνε καλά μεταξύ τους σε ένα σχήμα με τις ζητούμενες ιδιότητες

Abstract Nonsense