Αλγεβρική Γεωμετρία 8/4/2021

$(\underline{X}, \mathcal{O}_X)$ local ringed space.

$\underline{X}$ ↑ τοπος χωρο.

$\mathcal{O}_X$ ↑ sheaf αντιμεταθετικων δακτυλιων

$\mathcal{O}_{X,x}$ είναι τοπικοι δακτυλιοι.

$\mathcal{O}_X$ sheaf δομης

(pre) Scheme $\longrightarrow$ $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ανοιχτο κάλυμμα.

$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda})$ να είναι ενα affine scheme.

Η διαδικασία ειναι ανάλογη με την έννοια της διαφ. πολλ/τας M γεωμετρικο αναλυσιμενο

$(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ U_λ ανοιχτο

$$U_\lambda \cong (\mathrm{Spec}\,\underline{R}_\lambda, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,R_\lambda})$$

$U_\lambda \cong (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_M)$

$\mathcal{O}_M$ ↑ είναι οι διαφορ. συναρτησεις

Προβολικος χώρος : ένωση affine schemes

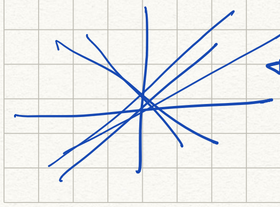
$\underline{R} = k[x_0, \dots, x_n]$ των πολυωνύμων σε $n+1$ μεταβλητές υπερ το k

$$\boxed{\mathbb{P}^n_k = \{ \underline{P} \mid \text{ομογενή πρωτα ιδεωδη του } \underline{R},\ \underline{P} \neq \langle x_0, \dots, x_n \rangle \}}$$

$$\underline{\mathbb{A}}^{n+1} = \mathrm{Spec}\ k[x_0, \dots, x_n]$$

$(0, \dots 0) \rightsquigarrow (x_0, x_1, \dots, x_n)$

μεγιστο, ιδεωδες) αντιστοιχεί στην αρχή των συντεταγμένων.



← το συνολο των ευθειων που που περνουν απο το 0

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$$

R είναι gradded ring.

$$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$$ R_d είναι τα ομογενή πολυώνυμα βαθμού d.

$\triangledown$

I $\quad I_d = I \cap R_d$ είναι τα στοιχεία του I που είναι και ομογενή πολυώνυμα βαθμού d

Ένα ιδεώδες ονομάζεται ομογενές

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_d \longleftarrow$$ ορισμό του ομογενούς ιδεώδους.

$P \in \mathbb{P}^n_k$ ομογενές πρώτο ιδεώδες.

I ομογενές ιδεώδες

$$\underline{V(I)} = \{ P \in \mathbb{P}^n_k : I \subset P \} \longleftarrow$$ κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{P}^n_k$

I είναι μέγιστο ομογενές τότε $V(I) = I$
(κλειστά μέγιστα)

$f \in R = k[x_0, \ldots, x_n]$

$$D_+(f) = \{ \underline{\underline{P}} \in \mathbb{P}^n_k : f \notin P \}$$ είναι προβολικό ανοιχτό.

$$D(f) = \{ P \in \operatorname{Spec} R : f \notin P \}$$

$D_+(f)$ αποτελούν βάση ανοιχτών της τοπολογίας

sheaf $\quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$.

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_+(f)) = \Gamma(\overset{\substack{\text{ανοιχτό} \\ \downarrow}}{D_+(f)}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) =$$

$$= \underbrace{\left\{ \boxed{\frac{g}{f^m}},\ g \in R,\ \begin{array}{l} g \text{ ομογενές πολυώνυμο} \\ \deg g = m \deg f \end{array} \right\}}_{\text{συναρτήσεων.}}$$

Γιατί $\underline{g \text{ ομογενές}}$:

$$[x_0 : \cdots : x_n] = (x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$$

$$\underline{g(x_0, \dots, x_n)}\, \lambda^{\deg g} = \underline{\underline{g}}(\lambda x_0, \dots, \lambda_n x_n)$$

Συναρτήσεις θέλουμε να είναι πηλίκα: από ομογενή πολυώνυμα ίδιου βαθμού.

$$x^2 + y^2 + xy$$

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (\lambda x \lambda y) = \lambda^2 (x^2 + y + xy)$$

$$\frac{g(\lambda x_0, \dots \lambda x_n)}{f^m(\lambda x_0, \dots \lambda x_n)} = \frac{\lambda^{\deg g}}{\lambda^{m \deg f}} \frac{g(-)}{f^m(-)}$$

Κατασκευάζουμε το sheaf δομής $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$

Το ορίζουμε στα βασικά ανοιχτά $D_+(f)$ και επεκτείνουμε τον ορισμό σε γενικά ανοιχτά όπως κάναμε και στα affine schemes.

$$\boxed{\mathbb{P}^n_k = \bigcup_{j=0}^{n} U_j}$$

$$\underbrace{U_j = D_+(x_j) \subseteq \{ P \in \mathbb{P}^n_k : x_j \notin P \}}_{\text{κάλυψη του } \mathbb{P}^n_k}$$

$\underbrace{(x_0, \dots x_n) \not\subset \underline{P}}$ δεν περιέχεται σε κανένα $\underline{P}$

Αν $\underbrace{(x_0, \dots, x_n)}_{\text{μέγιστο}} \subset \underline{P}$ αναγκαστικά $(x_0, \dots, x_n) = \underline{P}$.

Για κάθε $\underline{P}$ ομογενές πρώτο, $\forall\, P \in \mathbb{P}^n_k$

$\exists\, x_i$ ώστε $\underbrace{x_i \notin \underline{P}}$.

$$\boxed{R_j} = k\left[\frac{x_0}{\underline{\underline{x_j}}}, \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots \frac{x_n}{x_j}\right]$$

Πολυωνυμικός δακτύλιος.

$$U_j \cong \operatorname{Spec} R_j \qquad U_j = D_+(\underline{\underline{x_j}})$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(U_j) \underset{=}{\supset} R_j$$

$g \in R = k[x_0, \dots, x_{n+1}]$

$$g = \overbrace{g_{d_1} + \dots + g_{d_e}}^{\text{ομογενή πολυώνυμα βαθμού } d_i} \qquad 0 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_e$$

$$\Phi_j : R \longrightarrow R_j$$

$$g \longmapsto \boxed{\frac{g_{d_1}}{x_j^{d_1}}} + \frac{g_{d_2}}{x_j^{d_2}} + \dots + \frac{g_{d_e}}{x_j^{d_e}}$$

ομογενή πολυώνυμα στις μεταβλητές x_i/x_j

$$\boxed{\underset{5}{\underset{\downarrow}{x_0^5}} + \underset{4}{\underset{\downarrow}{x_1^3 x_2}} + \underset{2}{\underset{\downarrow}{x_3^2}}} \rightsquigarrow \left(\frac{x_0}{x_1}\right)^5 + \frac{x_2}{x_1} + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2$$

Αποομογενοποίηση

ως προς x_1

$$\phi_j : R \longrightarrow R_j$$ ομομορφισμος δακτυλιων

$$\operatorname{Spec} R_j \longrightarrow \boxed{U_j} \subset \underline{\operatorname{Spec} R}$$

$$\mathfrak{p} \longmapsto \phi_j^{-1}(\mathfrak{p})$$

$$\mathfrak{p} = \langle h_1, \dots, h_m \rangle \in \operatorname{Spec} R_j$$

ομογενη πολυωνυμα στης μετ. $\frac{x_i}{x_j}$ $\quad i = 0, \dots, n$, $i \neq j$

$$h_i \longrightarrow h_i \underbrace{\left(\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right)}_{\text{βαθμου } e_i} x_j^{e_i}$$

$$\phi_j^{-1}(\mathfrak{p}) = \langle \bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m \rangle_R$$

$$\uparrow$$

$$\langle h_1, \dots, h_m \rangle_{R_j}$$

$x_j \notin \phi_j^{-1}(\mathfrak{p})$ τοτε $1 = x_j/x_j \in \mathfrak{p}$ γνησιο ιδεωδες

$$\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \in U_j$$

$$\phi_j^a : \operatorname{Spec} R_j \longrightarrow U_j$$

$\boxed{\text{συνεχής}}$ αντιστρεψιμη

$$\boxed{f} \xleftarrow{\phi_j^a} \underline{Q} \in U_j$$

ομογενες πρωτο ιδεωδες

$x_j \notin Q$

$k[\ ]$

$Q = \langle H_1, \dots, H_e \rangle$ ομογενη πολυωνυμα.

$\downarrow$

$$h_i = \frac{1}{x_j^{e_i}} H_i$$

$$q = \langle h_1, \ldots, h_e \rangle$$

$$\phi_j^{\alpha}\left(\operatorname{Spec}(R_j)_f\right) = D_+(F) \cap U_j$$

$$F = R$$

$$f = \frac{1}{x_j} F$$

$$U_j \cong \operatorname{Spec} R_j$$ (ισομορφισμος απο affine schemes)

S βαθμωτος δακτυλιος (αντιμεταθετικοι με μοναδα)

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d \qquad S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$$

S_d λεγονται ομογενη στοιχεια βαθμου d

$$I \triangleleft S \qquad I \cap S_d = I_d$$

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_d \rightsquigarrow I$$ λεγεται ομογενες ιδεωδες

Ομογενη πρωτα ιδεωδη.

$$S_+ = \bigoplus_{d \geq 1} S_d$$ ομογενες πρωτο ιδεωδες

$$\operatorname{Proj} S = \left\{ \underline{P} : \text{ομογενη πρωτα ιδεωδη του } S \quad P \not\supset S_+ \right\}$$

ομογενες

η αναλογη

γενικοτερα.

[illegible] συνθήκη

του φραδ. S

$$R = k[x_0, \dots, x_n]$$

$$\langle x_0, \dots, x_n \rangle = R_+$$

<u>μέγιστο</u>

$\mathfrak{a}$ ομογενές ιδεώδες

$$V(\mathfrak{a}) = \{ \underline{p} \in \underline{P}roj S : \underline{p} \supset \mathfrak{a} \}$$

κλειστά σύνολα της τοπολογίας Zariski στο Proj S

$f \in S_d$

$$D_+(f) = \{ \underline{p} \in \operatorname{Proj} S \mid f \notin \underline{p} \}$$

βάση ανοικτών της τοπολογίας

$$\Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}) = \left\{ g/f^m : \begin{array}{l} g \in S_{md} \\ m \geq 1 \end{array} \right\} = S_f^{(0)}$$

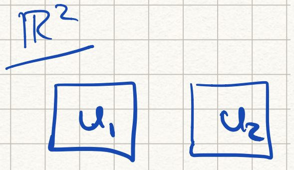
$X = \operatorname{Proj}$ δομή σχήματος. (pre) scheme

$(X, \mathcal{O}_X)$

<u>Ορισμοί</u> M τοπολ. χώρος $M = U_1 \cup U_2$ U_1, U_2 ανοικτά

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Αν για κάθε τέτοια γραφή έχουμε $\left(\begin{array}{ll} U_1 = \emptyset & \text{ή } U_2 = \emptyset \\ U_2 = M & U_1 = M \end{array} \right)$ τότε ο χώρος θα λέγεται συνεκτικός



$M = F_1 \cup F_2$ F_1, F_2 μη κενά κλειστά τότε ο M θα λέγεται μη αναγωγος.

$(X, \mathcal{O}_X)$ <u>συνεκτικό.</u> <u>ανάγωγο</u> αν οι τοπολ. χώροι είναι συνεκτικοί (αναγωγοι)

$(X, \mathcal{O}_X)$ <u>reduced</u> $\forall U$ ανοιχτό $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ είναι reduced.

είναι

δηλαδή δεν έχει
μηδενοδύναμα
δηλαδή $\sqrt{0} = 0$

ακέραιο

($\forall$ U ανοιχτό
$\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ είναι ακ. περιοχή.

$A \cong A_1 \times A_2$, $A = A_1 \times A_2$

$1_{A_1}, 1_{A_2}$ είναι οι μονάδες του A_1, A_2

$\underline{e_1 = (1_{A_1}, 0)}$ $\underline{e_2 = (0, 1_{A_2})}$

$(1_{A_1}, 1_{A_2}) = 1_A = e_1 + e_2$ $e_1^2 = e_1$ $e_2^2 = e_2$

$e_1 e_2 = 0$

$\mathfrak{p}$ πρώτο του A.

$e_1 e_2 = 0 \in \mathfrak{p} \Rightarrow e_1 \in \mathfrak{p}$ ή $e_2 \in \mathfrak{p}$

Ισχυρισμός: Δεν γίνεται και $\boxed{e_1} \in \mathfrak{p}$, και $\boxed{e_2} \in \mathfrak{p}$.

$$\operatorname{Spec} A = \overline{D(e_1)} \cup D(e_2) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : e_2 \notin \mathfrak{p}\}$$

$$D(e_1) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : e_1 \notin \mathfrak{p}\}$$

$$\underset{\operatorname{Spec} A_1}{\underset{\cong}{D(e_1)}} \cap \underset{\operatorname{Spec} A_2}{\underset{=}{D(e_2)}} = \emptyset$$

$$\operatorname{Spec}(A_1 \times A_2) = \operatorname{Spec} A_1 \,\dot{\sqcup}\, \operatorname{Spec} A_2$$

$$\begin{tikzcd} A_1 \times A_2 \arrow[r, "p_1"] & A_1 \\ \mathfrak{p} & p_1(\mathfrak{p}) \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_1 \times A_2 \arrow[r, "p_2"] & A_2 \end{tikzcd}$$

$\leftarrow$ ιδεώδες του A_1

$\boxed{\text{Έστω } e_2 \in \mathfrak{p}}$

$p_1(\mathfrak{p})$ πρώτο ιδεώδες

$a_1 b_1 \in p_1(\mathfrak{p})$ $a_1, b_1 \in A_1$

υπαρχει $c_2 \in A_2$

$$(\alpha_1, b_1, c_2) \in \underline{P}$$

$$\|$$

$$(\alpha_1, c_2) \cdot (b, 1) \in \underline{P} \begin{cases} \overset{ή}{\longrightarrow} (\alpha_1, c_2) \in \underline{P} \longrightarrow \alpha_1 \in p_1(\underline{P}) \\ \longrightarrow (b_1, 1) \in \underline{P} \longrightarrow b_1 \in p_1(\underline{P}) \end{cases}$$

$p_1^{-1}(\underline{P}_1) = \underline{P}$ $p_1^{-1}(\underline{P}_1) \supset \underline{P}$ αφου $p_1(\underline{P}) = \underline{P}_1$

$\underline{\alpha_1 \in \underline{P}_1}$ $\boxed{\underline{(\alpha_1, \alpha_2) \in \underline{P}}}$ για καποιο $\alpha_2 \in A_2$

$\underline{0 \times A_2 \subset \underline{P}}$ (εχω υποθεσει $e_2 \in \underline{P}$)

$b_2 \in A_2$ $\underset{\boxed{p^{-1}(\underline{P}_1)}}{\underset{\cap}{(\alpha_1, b_2)}} = \underline{(\alpha_1, \alpha_2)} + (0, \underline{b_2 - \alpha_2}) \in \underline{P}$

$p_1^{-1}(\underline{P}) \subseteq \underline{P}$ $\Rightarrow$ $e_1 \notin \underline{P}$

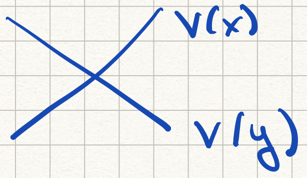
$p_1(e_2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \in \underline{P} \\ e_2 \in \underline{P} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{1 = e_1 + e_2 \in \underline{P}} \text{ και}$$

τοτε $\underline{P} = R$

$e_2 \in \underline{P}$ $p_1^{-1}(\underline{P}_1) = \underline{P}$ **Μη συνεκτικό**

$X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy)$



Μη - αναγωγο αφινικο.

$X = V(x) \cup V(y)$

$V(x) = X$

$V(Y) \neq Y$

Εναλλακτικά ο $k[x,y]/\langle xy \rangle$ δεν είναι ακ. περιοχή.

- $\operatorname{Spec} k[x]/(x^2)$ αποτελείται από ένα σημείο το 0 και είναι ανάγωγος

$k[x]/(x^2)$

Δεν είναι reduced x είναι μηδενοδύναμο στοιχείο στην $k[x]/(x^2)$.

§ $R/A \longleftrightarrow \underline{B}$ του R ώστε $B \supset \underline{A}$

$k[x]/x^2 \longleftrightarrow P \supset (x^2) \Rightarrow P \supset x$

Ρ πρώτο

$k \cong k[x]/x \longleftrightarrow$ μοναδικό πρώτο ιδεώδες

σώμα

$X = \operatorname{Spec} A$ ισχύουν

1) X δεν είναι συνεκτικό $\iff A \cong A_1 \times A_2$
A_1, A_2 μη μηδενικοί δακτύλιοι

2) X είναι ανάγωγο $\iff \mathcal{N}(A) = \sqrt{0}$ είναι πρώτο ιδεώδες

3) X είναι reduced $\iff \mathcal{N}(A) = 0_A$

4) X είναι ακέραιο $\iff$ A είναι ακ. περιοχή

$\Gamma(\mathcal{O}, X)$ ακ περιοχή