Αλγεβρικη Γεωμετρία 30 Μαρτίου 2021

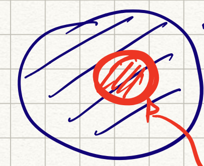
$X = \operatorname{Spec} \underline{R}$ Τοπολογικο χώρο, sheaf συναρτησεων.

$X_f = D(f) = \{ \underline{P} \in \operatorname{Spec} R : f \notin P \}$

Συναρτησεις στο X_f να είναι ο δακτύλιος $R_f = \{ \frac{r}{f^k}, k \in \mathbb{N} \}$

$x \longrightarrow 0$

<u>Λήμμα</u> $X_f = \bigcup_{\alpha \in A} X_{f_\alpha}$



X_f

X_{f_α}.

$\rho_{X_{f_\alpha}, X_f}(x) = 0 \quad \forall \alpha \in A$

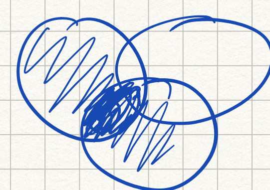
μικρο μεγαλο

τοτε $\underline{x = 0}$

$R_f \longrightarrow R_{f_\alpha}$

$\rho_{X_{f_\alpha}, X_f}$

$x = \frac{g}{f^m} \in R_f \quad g \in R$



$S^{-1}R$

Ποτε το x είναι 0

$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$

$\frac{g}{f^m} \sim \frac{0}{1} \quad f^n(g \cdot 1 - \cancel{0 f^m}) = 0$

$\Updownarrow$ op.

$s(ab' - a'b) = 0$

$s \in S$

To $x = 0$ $R_f \Leftrightarrow$

$\exists n \in \mathbb{N} \quad f^n \cdot g = 0$

$\underline{I = \{ h \in R ; h \cdot g \} = 0} \qquad I \triangleleft \underline{R}$

$x = 0$ στο $R_f \Leftrightarrow f^n \in I \Leftrightarrow f \in \sqrt{I}$.

$$\boxed{\sqrt{I} = \bigcap_{P,\, I \subset P} \underline{P}}$$

$f \in \sqrt{I}$ αν για τα πρωτα ιδεωδη $\underline{P \supset I}$ ισχυει

$f \in P$.

$x \neq 0 \longrightarrow 0$ ... $P \supset I$

$$\begin{tikzcd}
R_f \arrow[r] \arrow[dr] & R_{f_\alpha} \arrow[d] \arrow[dr, bend left] & \\
 & R_P & 0
\end{tikzcd}$$

Η εικόνα του x στο R_P είναι 0

$x = \frac{g}{f^m}$

$\underline{g = f^m x}$ η εικόνα του στο R_P είναι 0 δηλαδή

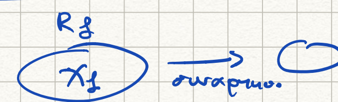
$R_P = (R-P)^{-1}R$

$\exists\ b \in \underline{R \setminus P} = S$ ώστε

$bg = 0 \Rightarrow b \in I \subset P \Rightarrow \underline{b \in P}$

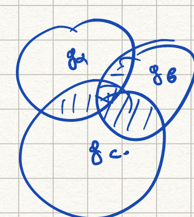
<u>άτοπο</u>

<u>Λήμμα</u> $X_f = \bigcup_{\alpha \in A} X_{f_\alpha}$



Έστω $\underline{g_\alpha \in R_{f_\alpha}}$ — συναρτήσεις στο $\underline{X_{f_\alpha}}$

g



$a, b \in A$

$\rho_{\underline{X_{f_a f_b}}, X_{f_a}}(\underline{g_a}) = \rho_{X_{f_a f_b}, X_{f_b}}(\underline{g_b})$ ✓

Τότε υπάρχει $\underline{g \in R_f}$ συναρτησεις στο X_f. $X_{f_a} \cap X_{f_b} =$

$g_\alpha = \rho_{X_{f_\alpha}, X_f}(g)$

$= X_{f_a f_b}$

$\underline{R} \longrightarrow R_f$ $\Phi_r(r) = \bar{r}$

$r \longmapsto \frac{r \cdot f}{f} = \bar{r}$

$X_f \supset X_g$

$X_f \supset X_g \Leftrightarrow \underline{g \in \sqrt{f}}$

$\bar{g} = \frac{g f}{f}$

$R_g \cong (R_f)_{\bar{g}}$

$g^n = a f$

$$\frac{r}{g^e} \longmapsto \frac{\bar{r}}{\bar{g}^e} = \frac{r/f}{(g/f)^e}$$

ομοιομορφισμός δακτυλίων.

$$\psi : (R_f)_{\bar{g}} \longrightarrow R_g \qquad f = \frac{g^n}{a}$$

$$\frac{r/f^k}{\bar{g}^e} \longmapsto \frac{a^k}{g^{nk+e}}$$

$$\varphi \circ \psi = Id_{R_g} \qquad \Phi \circ \Psi = Id_{(R_f)_{\bar{g}}} \qquad X_f \supset X_g$$

$$R_g \cong (R_f)_{\bar{g}}$$

$$\bar{R} = R_f \qquad \bar{X} = \operatorname{Spec} \bar{R}$$

$f_\alpha \to \bar{f}_\alpha$ στοιχείο του R_f.

$$X_f = \bar{X}, \qquad X_{f_\alpha} = \bar{X}_{\bar{f}_\alpha} \qquad X_f = \bigcup_{\alpha \in A} X_{f_\alpha}$$

$$R_f \qquad \bar{R} \qquad \bar{X} = \bigcup_{\alpha \in A} \bar{X}_{\bar{f}_\alpha}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας αρκεί $f = 1$

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} X_{f_\alpha} \qquad R \quad \underline{\text{Noether}}$$

Μπορούμε να διαλέξουμε πεπ. το πλήθος $f_1, \dots, f_e$ από τα f_α, $\alpha \in A$

$$X = \bigcup_{j=1}^{e} X_{f_j}$$

$$g_j = \frac{a_j}{f_j^m} \qquad j = 1, \dots, e.$$

m κοινός για όλα τα j όπου g_j είναι πεπ. το πλήθος.

$$\frac{\alpha f^{m_2-m_1}}{f^{m_2}} = \frac{a_1}{f^{m_1}} \qquad \frac{a_2}{f^{m_2}} \qquad g_\alpha \in R_{f_\alpha}$$

$m_1 > m_2$

Υπόθεση περιορισμού

$$\rho_{X_{f_i f_j}, X_{f_i}}(g_i) = \frac{f_j^m a_i}{(f_i f_j)^m} = \frac{f_i^m a_j}{(f_i f_j)^m} = \rho_{X_{f_i f_j}, X_{f_j}}$$

$$(f_i f_j)^{n_{ij}} \cdot (f_j^m \alpha_i - f_i^m \alpha_j) = 0$$

$$\frac{\alpha_1}{b_1} \sim \frac{\alpha_2}{b_2}$$

$$s(a_1 b_2 - \alpha_2 b_1) = 0$$

$$(f_i f_j)^k$$

$N > m + n_{ij}$

$$g_k = \frac{a_k'}{f_k^N}$$

$$a_i' f_j^N - a_j' f_i^N = 0 \qquad 1 \leq i < j < \ell$$

$$X_{f_j} = X_{f_j^N} \qquad X_{f_j} = D(f_j) = \{ P : f \notin P \}$$

$f \in P^N$

$$X = \bigcup_{j=1}^{\ell} X_{f_j^N}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha \in A} X_{f_\alpha}$$

f_α παράγουν του R

$$1 = \sum_{j=1}^{\ell} b_j f_j^N.$$

για κατάλληλα στοιχεία $b_j \in R$

$$\alpha_i' f_j^N = \alpha_j' f_i^N$$

$$f_i^N g := \sum^{\ell} \alpha_j' f_i^N b_j = \sum_{j=1}^{\ell} b_j f_j^N \alpha_i' = a_i'$$

$j=1$ $\qquad$ $\underbrace{\qquad}_{1}$

$$\underbrace{\rho_{X_{f_i},X}(g) = \frac{\alpha_i'}{f_i^N} = g_i}$$

κατασκευή μια καθολική συνάρτ. στο R

$a \in A$ $\qquad \rho_{X,X_{f_a}}(g) = g_a$

$$h_a = g_a - \rho_{X_{f_a},X}(g)$$

$$\rho_{X_{f_i f_a},X_{f_a}}(h_a) = \rho_{X_{f_i f_a},X_{f_a}}(g_a) - \rho_{X_{f_i f_a},X}(g)$$

$$= \rho_{X_{f_i f_a},X_{f_i}}(g_i) - \rho_{X_{f_i f_a},X}(g)$$

$$= \rho_{X_{f_i f_a},X}(g) - \rho_{X_{f_i f_a},X}(g) = 0$$

Σε όλους τους περιορισμούς που καλύπτουν το X έχουμε 0 οπότε $h_a = 0$

X τοπολ. χώρος $\qquad U \subset X$

$F(U)$ προσθετική ομάδα, δακτύλιος, module

$U \supset V$ $\qquad \rho_{U,U} = Id_{F(U)}$

$\rho_{V,U} : F(U) \to F(V)$ $\qquad W \subset V \subset U$

$$\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$$

presheaf

Για να είναι sheaf θέλουμε επιπλέον

U ανοιχτό του X $\qquad U = \bigcup U_i$

$j \in J$

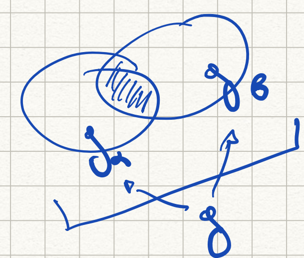
$a \in \mathcal{F}(U)$ ώστε $\rho_{u_i,u}(a) = 0 \quad \forall j \in J$

$\Rightarrow a = 0$

$$\rho_{u_j \cap u_i, u_j}(a) = \rho_{u_j \cap u_i, u_i}(\alpha)$$

τότε $\quad a \in \mathcal{F}(U) \quad\quad a_j = \rho_{u_j, u}(a)$

$X = \operatorname{Spec} R \quad\quad X_f \quad\quad U$



Παραδείγματα Sheaves $\quad X$ τοπολ. χώρος

$C_X(U)$ τις συνεχείς συναρτήσεις από το $U \to \mathbb{R}$

Αυτές έχουν δομή δακτυλίου.

$(g+f)(x) = g(x) + f(x)$

$(gf)(x) = g(x) \cdot f(x)$

$U \supset V$

$(f : U \to \mathbb{R}) \longrightarrow (f|_V : V \to \mathbb{R})$

$X = \mathbb{R}^n \quad\quad D_X(U) : C^\infty : U \longrightarrow \mathbb{R}$

διαφορίσιμη το $\ldots$

$X = \mathbb{C}^n \quad\quad \mathcal{O}_X(U) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφες. | Μιγαδικής διαφορικής γεωμετρίας

$X = \operatorname{Spec} R$ με την τοπολογία Zariski.

X_f βάση της τοπολογίας έχουμε φτιάξει

$\mathcal{O}_X(\overline{X_f}) = R_f$ sections

sheaf $\quad$ ανοιχτά

$\mathcal{O}_X(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$

$\mathcal{O}_X$ είναι το sheaf των "ολομορφων"

$$\mathcal{O}_X(U) = \left\{ \{s_p\} \in \prod_{p\in U} R_p \; : \; \text{για ένα ανοιχτό κάλυμμα του } U = \bigcup_{a\in A} X_{f_a} \text{ να υπάρχουν } s_b \in R_{f_b} \text{ για } p \in X_{f_b} \text{ το φύτρο } s_b \text{ στο } p \text{ να ταυτίζεται με το } s_p. \right\}$$

φύτρο

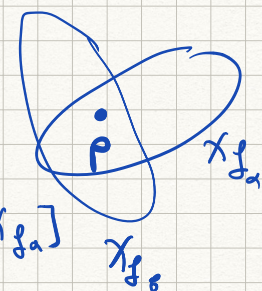
$(R\setminus p)^{-1}R$

$$R_p = \varinjlim_{X_f \ni p} R_{X_f}$$

p πρώτο ιδεώδες

Δακτύλιος των φύτρων

"germ"



$[r_b, X_{f_b}] = [r_a, X_{f_a}]$

αν τα r_b, r_a ταυτίζονται σε κοινό περιορισμό.

$X_g \subset X_{f_a} \cap X_{f_b} = X_{f_a f_b}$

$r_a|_{X_g} = r_b|_{X_g}$

U ανοιχτό σύνολο
περιέχει ιδεώδη "σημεία"

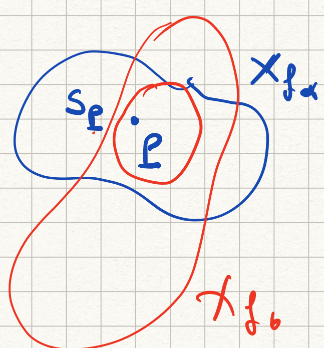
$$\prod_{p\in U} R_p = \mathcal{O}_X(U)$$

Δεν υπάρχει "συνέχεια"

$\mathcal{O}_{\mathbb{C},a}$ = αναλυτικές συναρτήσεις συγκλίνουσες δυναμοσειρές

$a \in \mathbb{C}$

$f_a = \Sigma$



$g \in R_{f_a} = \mathcal{O}_X(X_{f_a})$

επεκτείνεται σε μεγαλύτερο ανοιχτό

ώστε το φύτρο του s_p να είναι το φύτρο του g

$s_p = [(g, X_{f_a})]$

"Ανάλογο της αναλυτικής δυναμοσειράς σε κάποιο δίσκο με ακτίνα $r>0$"

$s_p = [(g', X_{f_b})]$

$$\{s_p\} + \{t_p\} = \{s_p + t_p\}$$
$$\{s_p\}\{t_p\} = \{s_p \cdot t_p\}$$

$$\prod_{p \in U} R_p$$

$s_p \qquad [(g, X_\alpha)] \xrightarrow{\text{περιορ.}} [(g, X_\alpha \cap X_\beta)]$

$t_p \qquad [(g', X_\beta)] \longrightarrow [(g', X_\alpha \cap X_\beta)]$

φίλτρο $\qquad \longrightarrow g + g'$

$$|t| < 1$$
$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$
$$t \neq 1$$

$$\rho_{V,U} : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V), \quad V \subset U$$
$$\{s_p\}_{p \in U} \longmapsto \{s_Q\}_{Q \in V}$$

Δηλαδή $\prod_{p \in U} R_p$

Διαλέγω το μικρότερο γινόμενο

$\prod_{p \in V} R_p$

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R) = R$$

Α ιδιότητα του prescheme (συνθεσεις) είναι προφανης

__Scheme__ $\qquad U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$

$s \in \mathcal{O}_X(U)$ $\qquad \rho_{U_\lambda, U}(s) = 0$ αυτο σημαίνει οτι

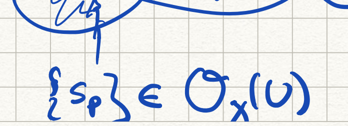
για καθε $p \in U_\lambda$ $\quad s_p = 0$

καλύπτουν το U

Αν τα μαζέψω $\prod_{p \in U} R_p = \{s_p\}$

$\Downarrow$

αυτά θα είναι όλα 0.



$\{t_p\} \in \mathcal{O}_X(V)$

$\{s_p\} \in \mathcal{O}_X(U)$

$s_p = t_p \ \forall p \in U \cap V$

$$s = \prod_{p \in U \setminus (U \cap V)} (s_p) \times \prod_{p \in V} (t_p)$$

Affine scheme

$(X, \mathcal{O}_X)$ $\qquad X = \operatorname{Spec} R$

$\mathcal{O}_X$ το sheaf δομής

Παρατήρηση Γεωμετρία Θα συνοδεύαμε κάθε γεωμετρικό αντικείμενο με τις συναρτήσεις του.

Μπορεί να μην έχουμε καθολικά ορισμένες συναρτήσεις όπως είχαμε στα affine varieties

συναρτήσεις = Sheaf συναρτήσεων.

Παραδείγματα

k σώμα $\qquad \operatorname{Spec} k = \{0\}$ μοναδικό πρώτο ιδεώδες $\qquad \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k} = k$

$\operatorname{Spec} k[x] = \mathbb{A}^1_k$

έχουμε ιδεωδών δυο τύπους πρώτων

$\langle f(x) \rangle = f(x) k[x]$ $\quad f(x)$ ανάγωγο

$\{0\}$ το μηδενικό πρώτο ιδεώδες

$$\overline{\langle 0 \rangle} = V(0) = \{ P \in \operatorname{Spec} k[x] ,\ 0 \subset P \} \xrightarrow[\text{περιέχει το } 0]{\text{κάθε πρώτο ιδεώδες}} \operatorname{Spec} k[x]$$

generic point, δεν είναι κλειστό στην Zariski τοπολογία.

$$V(f(x)) = \{ P \in \operatorname{Spec} k[x] \ \langle f(x) \rangle \subset P \} =_{\alpha\varphi} \langle f(x) \rangle$$

μέγιστο ιδεώδες

Κλειστά σημεία τα οποία αντιστοιχούν σε μέγιστα ιδεώδη generic σημεία που η κλειστότητα τους είναι ήδη μεγαλύτερο.

$\mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x,y]$ $\quad$ k αλγεβρικά κλειστό.

$\cancel{\langle x, y\rangle}\ P_{ab} = \langle x-a, y-b\rangle \rightsquigarrow$ μέγιστο ιδεώδες

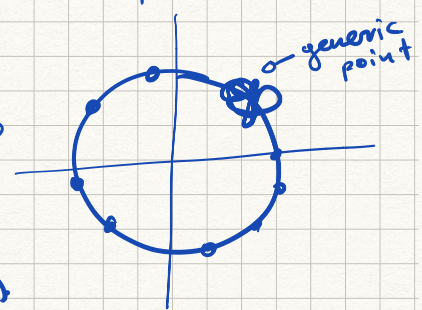
$$V(P_{a,b}) = \{P_{a,b}\}$$
$$= \{P \in \operatorname{Spec} R : \underline{\underline{P_{a,b}}} \subset P\}$$

μέγιστο τίποτα δεν το περιέχει.

$$\overline{(0)} = V(0) = \operatorname{Spec} k[x,y]$$

$f(x,y)\ k[x,y]$ $\quad$ $f(x,y)$ ανάγωγο πολυώνυμο δυο μεταβλητών.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$



$$V(\underline{(f(x,y))}) = \{\underline{P} : \langle f(x,y)\rangle \subset \underline{P}\}$$

μέγιστα ιδεώδη που περιέχουν το $f(x,y)$

όλα τα $\underline{P}$ μέγιστα ιδεώδη που μηδενίζουν το f. $\quad$ $f(P) =: f \bmod \underline{P}$ $= 0$