Αλγεβρικη Γεωμετρία **1. Απριλίου 2021**

Sheaves

$\mathcal{F}$ sheaf υπερ του τοπ. χωρου X

U ανοιχτο του X

$\mathcal{F}|_U$ περιορισμος του sheaf στο U.

Επαγωγική τοπολογία: τα ανοιχτα του U προκυπτουν απο τομες $U \cap V$, V ανοιχτο του X; ανοιχτό, ανοιχτο του X

$$\mathcal{F}|_U (U \cap V) = \mathcal{F}(U \cap V)$$

ανοιχτο του U αλλα και του X

Μορφισμοι απο sheaves.

Ιδιος χωρος: $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sheaves στον χωρο X

Αν για καθε ανοιχτο $U \subset X$ υπαρχει ομομορφισμος (δακτυλιων, αβελιανων ομάδων, modules κτλ.)

$$\begin{array}{ccc} f_U : \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho^{\mathcal{F}}_{V,U} & & \downarrow \rho^{\mathcal{G}}_{V,U} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow[f_V]{} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

$V \subset U$

μορφισμος εξαρταται απο το U

Το διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικο.

Η παραπάνω κατασκευή δινει ενα μορφισμο απο sheaves

$$f_x : \mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{G}(U)$$

ειναι καλα ορισμενος, ο επαγωμενος μορφισμος στον δακτύλιο φύτρων.

$$[(U, r \in \mathcal{F}(U))] \longrightarrow [U, f_U(r)], \quad f_U(r) \in \mathcal{G}(U)$$

$$[(U', r' \in \mathcal{F}(U'))] \longrightarrow [U', f_{U'}(r')]$$

$U'' \subset U \cap U'$

$r|_{U''} = r'|_{U''} \longrightarrow f(r)|_{U''} = f(r')|_{U''}$ στο U''

Sheaves of modules (Vector bundle στην διαφορική γεωμετρία)

$R \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ τοπολογικός χώρος
$ \overset{\parallel}{X}$

$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \leftarrow$ sheaf δακτυλίων.

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(X_f) = R_f.$$

M R-module

$\tilde{M}$ το οποίο θα είναι ένα $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$-module.

$$\forall V \subset U \qquad \begin{tikzcd} \underbrace{\mathcal{O}_X(U)}_{\text{δακτύλιος}} \arrow[d, "res_{V,U}"] & \times & \underbrace{\tilde{M}(U)}_{\mathcal{O}_X(U)\text{-module}} \arrow[d, "res_{V,U}"] \arrow[r] & \tilde{M}(U) \arrow[d, "res_{V,U}"] \\ \mathcal{O}_X(V) & \times & \tilde{M}(V) \arrow[r] & \tilde{M}(V) \end{tikzcd}$$

R-module $M \longrightarrow \tilde{M}$ sheaf από $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}$-modules

$S \subset R$ πολ/κο $\qquad S = \{1, f, f^2, \dots\}$ f δεν είναι nilpotent

$$M_S = S^{-1}M = \left\{ \frac{m}{t} \;\; \begin{matrix} m \in M \\ t \in S \end{matrix} \right\}$$

$S = R \setminus P$ $\quad P$ ← πρώτο ιδεώδες

$s_1, s_2 \in S$

$\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2} \iff \exists s \in S$ ώστε $s(m_1 s_2 - m_2 s_1) = 0$

Extension of scalars (των αντιμεταθ. αλγεβρας)

${}_R M \qquad S$ είναι R-module
$\qquad\qquad S$ δακτύλιος $\qquad R \subset S$ "υποδακτύλιος"

$S \otimes M$ extension of scalars

$$\underbrace{R \quad =}_{\text{S-module.}}$$

$$R \longrightarrow S^{-1}R$$

$$M_S =: S^{-1}R \otimes_R M$$

το αντικείμενο που θα βάλουμε πάνω από το ανοιχτό X_f

$$\Gamma(X_f, \tilde{M}) = \tilde{M}(X_f) = M_f = R_f \otimes_R M$$

$$M_f = \left\{ \frac{m}{f^k},\ k \in \mathbb{N} \right\} / \sim$$

$$\tilde{M}_x = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ x \in X_f}} \Gamma(X_f, \tilde{M}) = M_p \checkmark$$

$$S^{-1}M = (R \setminus P)M$$

$$R_x = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ x \in X_f}} \Gamma(X_f, R) = R_p \checkmark$$

$\tilde{M}$ είναι ένα sheaf από $\mathcal{O}_X$-modules

$\Phi : M \longrightarrow N$ ομομορφισμός από R-modules

$\Phi_f : M_f \longrightarrow N_f$ ομομορφισμοί από R_f modules.

$m \in M$, $t \in \{f^k\}$

$$\frac{m}{t} \xrightarrow{\Phi} \frac{\Phi(m)}{\Phi(t)} \quad \text{είναι καλά ορισμένη}$$

$$\frac{m}{t} \sim \frac{m'}{t'} \Rightarrow \frac{\Phi(m)}{\Phi(t)} \sim \frac{\Phi(m')}{\Phi(t')}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists s \quad s(mt' - tm') = 0 \xrightarrow{\Phi} \underset{\substack{\Uparrow \\ S}}{\Phi(s)} \big(\Phi(m)\Phi(t') - \Phi(t)\Phi(m') \big)$$

$X_g \supset X_f$

$$M_f \xrightarrow{\Phi_f} N_f \qquad X_f \text{ ανοιχτό}$$

$\rho^M_{X_g, X_f}$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

όπου ο $M_g \xrightarrow[\phi_g]{} N_g$

$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ μορφισμός από sheaves τότε ο ϕ θα λέγεται 1-1 αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό $U \subset X$

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$ είναι 1-1.

(αυτό είναι ισοδύναμο με το να πω ότι $\phi_x\ \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ είναι 1-1.

Επί ϕ

$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι επί αν $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ είναι επί.

Δεν είναι το ίδιο να απαιτήσουμε ότι για κάθε ανοιχτό U του X το $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ είναι επί.

$$1 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}} \to 1 \qquad \Big| \; X = \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \exp(2\pi i z)$$

σταθερό sheaf. για κάθε ανοιχτό U βάζουμε ένα $n \in \mathbb{Z}$

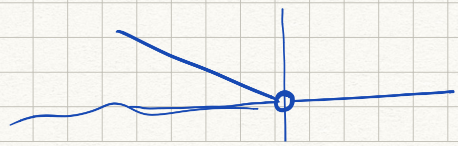
ολόμορφες συναρτήσεις

ολόμορφες μη μηδενικές

Είναι επί στους δακτυλίους φύτρων αλλά η ϕ δεν είναι επί στο $\mathbb{C}$ ανοιχτό

Για κάθε ~~απλά συνεκτικό~~ μικρό ανοιχτό η log είναι ισομορφισμός

αλλά η log $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ δεν είναι ολόμορφη εκτός βγάλω μια ημιευθεία



$$M_f \cong R_f \otimes_R M \qquad M_p \cong R_p \otimes_R M.$$

Ορίσαμε μορφισμούς από sheaves στην ίδια βάση

$$X \qquad \mathcal{F}, \mathcal{G} \qquad \phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}.$$

$f^{-1}(V)$ $\qquad V$

$$X \xrightarrow{\ f\ } Y \qquad f \text{ συνεχής}$$

sheaf στον X $\quad \mathcal{F} \qquad f_* \mathcal{F}$: sheaf στον Y

V ανοιχτό του Y $\xRightarrow{f \text{ συνεχής}}$ $f^{-1}(V)$ ανοιχτό στον X

$$\boxed{f_* \mathcal{F}(V)} = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

ανοιχτό του Y

Λήμμα Ένας ομομορφισμός δακτυλίων $\phi : R_1 \to R_2$ επάγει συνεχή συνάρτηση $\phi^a : \operatorname{Spec} R_2 \to \operatorname{Spec} R_1$

Αν $\tilde{M}$ το sheaf που καθορίζεται από το R_2-module M

μέσω της ϕ το M μπορεί να θεωρηθεί ως R_1-module

$$r_1 * m = \underbrace{\phi(r_1)}_{\in R_2} \cdot m \qquad {}_{R_2}M$$

$\forall r_2 \in R_2 \quad r_2 \cdot m$

$$\phi^a_* \tilde{M} \qquad \operatorname{Spec} R_2 \xrightarrow{\phi^a} \operatorname{Spec} R_1$$

$$\tilde{M} \longrightarrow \phi^a_* \tilde{M} = \widetilde{{}_{R_1}M}$$

$$X = \operatorname{Spec} R_1 \xrightarrow{\phi_a} Y = \operatorname{Spec} R_2$$

$\operatorname{Spec} R_2 = Y \longrightarrow X$

$\mathfrak{p} \longrightarrow \phi^{a}(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$

$R_1 \xrightarrow{\phi} R_2$

$\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathfrak{p}$

$$(\phi^{a})^{-1}(X_f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R_2 : \varphi^{a}(\mathfrak{p}) \in X_f\}$$

ορισμός της ϕ^a

$$= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R_2 : \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in X_f\}$$

$$= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R_2 : f \notin \underbrace{\phi^{-1}(\mathfrak{p})}\}$$

ορισμός ανοιχτού

$$= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R_2 : \phi(f) \notin \mathfrak{p}\}$$

$$= Y_{\phi(f)}$$

βασικό ανοιχτό των πρώτων ιδεωδών του R_2 που δεν περιέχουν το f

βασικό ανοιχτό του R_2 των πρώτων που δεν περιέχουν το $\phi(f)$.

$$\Gamma(X_f, \phi^{a}_{*}(\tilde{M})) = \Gamma((\Phi^{a})^{-1}(X_f), \tilde{M})$$

$$= \Gamma(Y_{\phi(f)}, \tilde{M}) = M_{\phi(f)}$$

$\frac{1}{f^m}$

R_1-module M $\quad N$ και είναι R_1-module

$r_1 \cdot m^{\in N} = \varphi(r_1) \cdot \overset{M}{m}$ πράξη μέσω Φ

$\varphi : N_f \xrightarrow{\cong} M_{\phi(f)}$

$\frac{a}{f^m} \longmapsto \frac{a}{\phi(f)^m}$

$$\Gamma(X_f, \widetilde{\phi^{\alpha}_{*} M}) = N_f = M_{\phi(f)}$$

$$\Gamma(X_f, \tilde{N}) = N_f$$

Ringed Space

X τοπολ. χωρο. $\mathcal{O}_X$ a sheaf συναρτήσεων.

συνεχης συναρτηση $X \to Y$

$(X, \mathcal{O}_X)$ ✓

Μορφισμοί

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f,\,\vartheta)} (Y, \mathcal{O}_Y)$$

$$\vartheta : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$$

ομομορφισμοί απο sheaves ορισμενων στην ίδια βαση

ομομορφισμος απο sheaves αντιμεταθετικων δακτυλιων.

sheaves πανω στον Y

$\mathcal{O}_{X,x}$ δακτυλιος των φυτρων στο σημειο x $\quad \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(U)$

ειναι τοπικός δακτυλιος για $x \in X$

Locally ringed space

τοπικος δακτυλ. δοχωρος.] Διαφορετικη κατηγορία απο αυτων δακτυλιοχωρων.

R τοπικος δακτυλιος ενα μονο μεγιστο ιδεωδες $\quad (R \setminus m) \to$ μονάδες

Εχουν μια επιπλεον συνθηκη στις συναρτησεις τους.

$$\vartheta : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$$

απαιτουμε επιπλεον $\quad \vartheta_y : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$

τοπικο δακτυλιο στο x

φυσιολογικη επαγόμενη συναρτηση στα φυτρα

τοπικος δακτυλιος στο y

$f(x) = y$

$X \to Y$, $x \mapsto f(x) = y$

απαιτουμε να είναι τοπικος ομορφισμος.

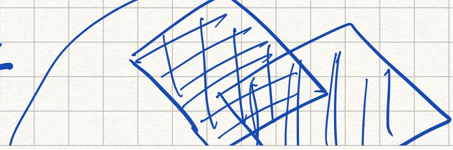
$$\vartheta_y(m_y) \subseteq m_x$$

μεγιστο ιδεωδες του $\mathcal{O}_{X,x}$

μεγιστο ιδεωδες του $\mathcal{O}_{Y,y}$

Affine Scheme

Prescheme



U ανοιχτο του X

$(U, \mathcal{O}_X(U))$

$\overline{(X, \mathcal{O}_X)}$

„Hausdorff"

Affine scheme

Τα „κολήματα" θα γίνουν μέσω της θεωρίας των sheaves.

X τοπολογικός χώρος $\quad \mathcal{F}$ sheaf στο X

U ανοιχτό του X : $V \subset U$

κάθε ανοιχτό του ανοιχτού U είναι και ανοιχτό του X

$[\ \ ]$ $0 \quad p \quad 1$ $\quad [0, \tfrac{1}{2})$

Μπορούμε να ορίσουμε ένα sheaf $\mathcal{G}$ στο U

$$\mathcal{G}(V) = \mathcal{F}(V) \quad \forall\, V \text{ ανοιχτό } U.$$

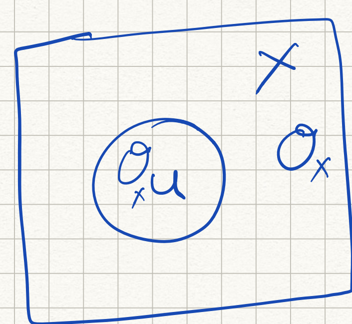
Sheaf περιορισμού $\mathcal{F}|_U$

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (U, \mathcal{O}_X|_U)$$

ringed space $\qquad$ ringed space.

$$i : U \hookrightarrow X$$

$$\mathcal{O}_X|_U \xrightarrow{i_*} i_*(\mathcal{O}_X|_U) \quad \text{sheaf στο } X.$$



$$i_*(\mathcal{O}_X|_U)(U) = \mathcal{O}_X(U)$$

$$\mathcal{O}_X|_U(i^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X|_U(U) = \mathcal{O}_X(U)$$

$x \notin \overline{U} \Rightarrow x \in \overline{U}^c$ ανοιχτό

τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή V του x ώστε τοτε υπαρχει ανοιχτη περιοχη V του x ωστε

$$V \cap U = \emptyset \qquad (\overline{V} = \overline{U})$$

$$i_*(\mathcal{O}_X|_U)(V) = \mathcal{O}_X|_U(i^{-1}(V)) = \mathcal{O}_X|_U(V \cap U)$$

$$= \mathcal{O}_X|_U(\emptyset) = 0$$

$W \subset X$

$$\Gamma(W, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(W \cap U, \mathcal{O}_X)$$

$$i^\#_W : \Gamma(W, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(W, i_*(\mathcal{O}_X|_U))$$

$$i^\# : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_X|_U)$$

τοπικος ομομορφισμος

αν $(X, \mathcal{O}_X)$

ειναι τοπικος δακτυλιδοχωρος

$$(i, i^\#) : (U, \mathcal{O}_X|_U) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

ειναι μορφισμος τοπικων δακτυλιδοχωρων.

<u>**Ορισμος**</u> $(X, \mathcal{O}_X)$ τοπικος δακτυλιδοχωρος

Αν υπαρχει ανοιχτο καλυμμα $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

ωστε $(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda}) \overset{\text{ισομορφα}}{\cong}$ Affine schemes $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$

ως τοπικοι δακτυλιδοχωροι

τοτε το $(X, \mathcal{O}_X)$ λεγεται prescheme.

scheme : prescheme + συνθηκη „διαχωρισιμοτητας"

X λεγεται υποκειμενος χωρος

$\mathcal{O}_X$ sheaf forms.