

1. Να αποδειχθεί ότι

$$(i) V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$$

$$(ii) \bigcap_{J \in \Lambda} V(I_J) = V\left(\sum_{J \in \Lambda} I_J\right)$$

$$(iii) V(I) \supset V(J) \text{ για } \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$$

2. Να αποδειχθεί ότι το ριζικό ιδεώδες είναι ιδεώδες

3. Να αποδειχθεί ότι τα μέγιστα ιδεώδη του $k[x_1, \dots, x_n]$ όπου k αλγεβρικό κλειστό σώμα είναι της μορφής

$$(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$$

4. Αν $J \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ να δείχτεί ότι $I(V(J)) = \sqrt{J}$

5. Να οριστεί η τοπολογία Zariski στο $\mathbb{Q}[x]$ και να μελετηθούν τα κλειστά σύνολα.

6. Να αποδειχθεί ότι το $\overline{\mathbb{Z}}$ είναι πικνό στο \mathbb{R} με την τοπολογία Zariski.

7. Να οριστεί η έννοια του ανάγωγο αλγεβρικού συνόλου και να αποδειχθεί ένα αλγεβρικό σύνολο είναι ανάγωγο αν και μόνο αν το $I(V)$ είναι πρώτο ιδεώδες

8. Να δοθεί η έννοια του μορφισμού μεταξύ αφηικών αλγεβρικών σωμάτων.

9. Να δείχθει ότι κάθε μέγιστο ιδεώδες είναι πρώτο. Ισχύει το αντίστροφο; Να δείχθει ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του $k[x]$, όπου k σώμα είναι μέγιστο.

10. Να περιγραφεί η αντιστοιχία ανάμεσα σε σημεία αλγεβρικού σώματος V και το σύνολο των μέγιστων ιδεωδών.

11. Να δείξει ότι τα σύνολα $D(f) = \{m \in \text{Spec } R, f \notin m\}$ αποτελούν βάση ανοιχτών της τοπολογίας Zariski.
12. Να ορίσει ο προβολικός χώρος και να αιτιολογήσει γιατί τα προβολικά κλειστά σύνολα απαιτούν ομογενή πολυώνυμα για να ορισθούν.
13. Να ορίσουν τα ομογενή ιδεώδη με δύο διαφορετικούς τρόπους και να αποδειχθεί ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.
14. Να ορίσει η τοπολογία Zariski στο $\text{Spec } R$ και να αποδειχθεί ότι είναι πράγματι τοπολογία.
15. Να βρεθεί μια βάση ανοιχτών για το $\text{Spec } R$.
16. Να περιγραφούν τα $\text{Spec } \mathbb{Z}$ και $\text{Spec } \mathbb{Z}[x]$.
17. Να ορίσει το generic point.
18. Να περιγραφεί πως ένας ομομορφισμός μη ετεροδότητων δακτυλίων $\varphi: R \rightarrow S$ επάγει $\varphi^*: \text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } R$.
19. Να αποδειχτεί ότι το $\text{Spec } R$ είναι quasicompact.
20. Είναι Hausdorff η τοπολογία Zariski;
21. Να αποδειχθεί ότι
- $$X_f \cap X_g = X_{f \cdot g}, \quad X_f \supset X_g \Leftrightarrow g \in \sqrt{(f)}$$
22. Να αποδειχθεί ότι
- $$\sqrt{(f)} = \bigcap_{P \in \text{Spec } R: f \in P} P$$
23. Δίνεται S πδ/μο σύνολο. Να οριστεί το RS^{-1} και να συζητηθούν τα $\text{Spec } R$ και $\text{Spec } RS^{-1}$

24. Να αποδειχθεί ότι αν f nilpotent $\text{Spec } R_f = \emptyset$.
25. Να δοθεί ο ορισμός του sheaf επί τοπολογικού χώρου και να δοθεί ο ορισμός της κοπής (stalk!) ενός μέρους σε ένα sheaf
26. Να δοθεί ο ορισμός ενός affine scheme.
27. Να εφευρεθεί πως τα στοιχεία $n \in \mathbb{Z}$ μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις στο $\text{Spec } \mathbb{Z}$.
28. Να δείξει ότι
- $$\varinjlim_{\mathcal{X} \in \mathcal{U}_P} R_{\mathcal{X}} \cong R_P, \quad \text{για } P \in \text{Spec } R.$$
29. Να δοθεί ο κατηγορηματικός ορισμός γινόμενου αντικείμενων σε μία κατηγορία και να δείξει ότι υπάρχουν γινόμενα στην κατηγορία των affine schemes.
30. Να περιγράψει το φυσικό sheaf αναρτήσεις στο $\text{Spec } R$. Ποια είναι η αναρτική περιγραφή;
31. Να δοθεί ο ορισμός του Ringed space, καθώς και του local ringed space. Πως ορίζεται ένας μορφισμός ανάμεσα σε locally ringed spaces
32. Να δοθεί ο ορισμός ενός graded ring S και του $\text{Proj}(S)$.
33. Ποτε ένα σχήμα λέγεται συνεπικό; Να αποδειχθεί αν A αντιμεταθετικός δακτύλιος το $\text{Spec}(A \times A)$ δεν είναι συνεπικό
34. Ποτε ένα σχήμα λέγεται reduced; Να δείξει ότι $X = \text{Spec } A$ είναι reduced αν και μόνο αν $N(A) = \sqrt{0} = 0$.
35. Ποτε ένα affine scheme είναι irreducible; Να διατυπωθεί και να αποδειχτεί ένα κριτήριο σχετικά με το $\sqrt{0}$.

35. Ποτε ένα σχήμα λέγεται integral?
Να δείξει ότι X integral $\Leftrightarrow X$ reduced και irreducible

36. Να ορίσει το σχήμα, όπως ακριβώς εννοια και υπόλοιπο subscheme.

37. Τι είναι ένας συναρτητής; Ποτε ένας συναρτητής λέγεται representable;

38. Πως ορίζεται ένας μορφισμός μεταξύ σχημάτων;

39. Ποτε ένας μορφισμός λέγεται:

- locally of finite type
- finite

Να δώσω παραδείγματα μορφισμών που να έχω τις παραπάνω 2 ιδιότητες αλλά και μορφισμών που να μην τις έχω