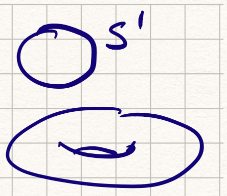
Αλγεβρική Γεωμετρία 25/5/2021



Γεωμετρία ⟶ „Lie Group" → Ομάδα
→ Δομή διαφορισιμης πολ/τας

$m : G \times G \longrightarrow G$

„γινομενο"

Group-Scheme : Συναρτητες ομαδων.

$\mathcal{C}$ κατηγορια στην οποία <u>υπαρχουν γινομενα</u> και υπάρχει ενα <u>τελικο αντικείμενο S</u>

Δηλαδη $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ υπάρχει μοναδικος μορφισμος

$$X \to S$$

Sch/S
$Sch/\mathbb{Z}.$ ← όλα τα σχηματα

Έστω G ενα αντικειμενο εφοδιασμενο με ενα κανόνα πολ/μου $m: \underbrace{G \times G}_{\text{κατηγορικο γινομενο}} \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[d, dashed] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & G\times G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
G \arrow[dr] & & G \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

$$G(T) = Hom_{\mathcal{C}}(T, G)$$

ο πολ/μος στο $G\times G$ δινει ενα πολ/μο στο T,

$$(G \times G)(T) = Hom_{\mathcal{C}}(T, G\times G) = \overset{\substack{\text{καρτεσιανο}\\ \text{γινομενο}}}{G(T) \times G(T)}$$

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[d, "{(g_1,g_2)}"] \arrow[dl, bend right, "g_1"'] \arrow[dr, bend left, "g_2"] & \\
G & G\times G \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, no head] & G \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

(g_1, g_2)

$(g_1, g_2) : T \longrightarrow G \times G$

$$\begin{tikzcd} & \arrow[d, "m"] \\ \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

$$G(T) \times G(T) \longrightarrow G(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, G)$$

$$g_1 , g_2 \qquad\qquad m \circ (g_1, g_2)$$

$$f : T' \longrightarrow T \qquad f^* : G(T) \longrightarrow G(T')$$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "a"] & G \\ T' \arrow[u, "f"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad a \circ f = f^*(g)$$

$\mathcal{C}$ Sets / ομάδων

$T \longrightarrow G(T)$

$G(T)$ προσεταιριστικος

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G = G \times (G \times G) \arrow[rr, "Id \times m"] & & G \times G \arrow[d, "m"] \\ (G \times G) \times G \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] \arrow[d, "m \times Id"] & & \\ G \times G \arrow[rr, "m"'] & & G \end{tikzcd}$$

Διπλευρο κοδιαιο. στο $G(T)$

$$\varepsilon \in G(S) = \mathrm{Hom}(S, G)$$

$$\pi^*(\varepsilon) \cdot Id = Id = Id \cdot \pi^*(\varepsilon)$$

$\pi = \pi_G = G \longrightarrow S$ (S final object)

$$\begin{tikzcd}
G = G \times_S S \arrow[r, "Id \times \varepsilon"] \arrow[d, equal] & G \times G \arrow[dd, "m"] \\
S \times_S G \arrow[d, "\varepsilon \times Id"] & \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

$R = R \otimes_R M$

$inv \in G(G) = \underline{\mathrm{Hom}(G,G)}$

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "inv \times Id"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\varepsilon \circ \pi"'] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\pi"'] \arrow[rr, bend left, "Id"] & S \arrow[r, "\varepsilon"'] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(g,g) \arrow[r] & (g^{-1}, g) \arrow[d, "m"] \\
g \arrow[u] \arrow[r] & Id
\end{tikzcd}$$

$G(T)$ είναι αντιμεταθετικο αν και μονο

$\pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_2 \cdot \pi_1$ στο $\underline{G(G \times G) = \mathrm{Hom}(G \times G, G)}$

$\pi_1 : \overbrace{G \times G} \longrightarrow G$

$\pi_2 : G \times G \longrightarrow G$

αντιμεταθετει τους παραγοντες του $\underline{G \times G}$

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[rr, "(\pi_2, \pi_1)"] \arrow[dr, "m"] & & G \times G \arrow[dl, "m"] \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

$\searrow G$

<u>Ορισμός</u> Ένα στοιχείο ομάδας στην κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι ένα αντικείμενο G της $\mathcal{C}$ με ένα μορφισμό $m: G \times G \longrightarrow G$ ώστε ο επαγόμενος πολ/μος στο $G(T)$ να κάνει το $G(T)$ ομάδα για κάθε $T \in \mathcal{C}$. Αν το $G(T)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα το $G(T)$ είναι αντιμεταθετικό.

Ένας ομομορφισμός από $\mathcal{C}$ στοιχεία ομάδας $G \longrightarrow G'$ στην κατηγορία $\mathcal{C}$ ώστε για κάθε $T \in Ob(\mathcal{C})$ $g \longmapsto \phi \circ g$ να είναι ομομορφισμός ομάδων.

$G \qquad m: G \times G \longrightarrow G$

$G(T) \times G(T) \longrightarrow G(T)$ για κάθε T της κατηγορίας

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "\phi \circ g"'] & G \arrow[d, "\phi"] \\
 & G'
\end{tikzcd}$$

$G: GL_2(\mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \alpha, b, c, d$ είναι ακέραιοι.

$T \longrightarrow G \rightsquigarrow GL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow R$ οικογένεια ομάδων

$\operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} GL_2(\mathbb{Z})$

$GL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\quad$ Gl_2 είναι συναρτητής

<u>Αντικείμενο ομάδας</u> $\underline{G(T)}$ $\forall T \in \mathcal{C}$.

$T \longrightarrow G(T)$ συναρτητής ώστε $\forall T \in Ob(\mathcal{C})$ τα παραπάνω διαγράμματα είναι όλα αντιμεταθετικά.

$G \in Ob(\mathcal{C})$ ώστε (δεν απαιτούμε την ύπαρξη του $m: G\times G \to G$) κάθε $G(T)$ να είναι ομάδα τότε μπορούμε να ορίσουμε το m

$$\underbrace{G(G\times G)}_{\text{«πολ/σω»}} = \underset{\overset{\cup}{\pi_1,\, \pi_2}}{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G\times G, G)}$$

$$m = \pi_1 \cdot \pi_2 \in \underline{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G\times G, G)}$$

$$m : \underline{G\times G \to G}$$

$$\begin{tikzcd}
& G\times G \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_1\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
G & G & G
\end{tikzcd}$$

Στοιχείο ομάδας στην $\mathcal{C}$ $\longrightarrow$ Συναρτήτη Ομάδων

$$\mathcal{C} \longrightarrow Gr.$$

$$T \longrightarrow G(T)$$ αναπαραστήσιμος συναρτητής

$$\begin{aligned} &\quad \| \\ &\mathrm{Hom}_e(T, G) \end{aligned}$$

$\hat{}$ αναπαριστά τον συναρτητή.

Σχήμα ομάδας

Ένα σχήμα ομάδας (group scheme) είναι ένα αντικείμενο ομάδας στην κατηγορία Sch/S

$$X \longrightarrow S$$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

$$Sch/\mathbb{Z} = Sch.$$

Η κατηγορία των σχημάτων ομάδας $\left(Gr/S\right)$

$$S = \mathrm{Spec}\,\underline{R} \qquad Sch/_S = Sch/_{\mathrm{Spec}\,R}$$

θα γράφουμε $Sch/\underline{R}$

Ισοδυναμία (αντιστρέφει τα βέλη) ανάμεσα στην κατηγορία των αφινικών S-σχημάτων και των πεπερασμένα παραγόμενων R-αλγεβρών.

$$G = \mathrm{Spec}\,\underline{\underline{A}} \qquad A \quad R\text{-άλγεβρα}$$

$$m : G \times G \longrightarrow G$$

$$\tilde{m} : A \longrightarrow A \otimes_R A$$

$$\varepsilon : \overset{\mathrm{Spec}\,R}{\overset{\shortparallel}{S}} \longrightarrow G^{= \mathrm{Spec}\,A}$$

$$\tilde{\varepsilon} : A \longrightarrow R$$

$\mathrm{inv}: G \longrightarrow G$ $\qquad$ $\mathrm{inv}: A \longleftarrow A$

$$\begin{tikzcd}
A\otimes_R A\otimes_R A = A\otimes_R (A\otimes_R A) & & A\otimes_R A \arrow[ll, "\mathrm{Id}\otimes_R \tilde{m}"'] \\
(A\otimes_R A)\otimes_R A \arrow[u, equal] & \checkmark & \\
A\otimes_R A \arrow[u, "\tilde{m}\otimes_R \mathrm{Id}"'] & & A \arrow[ll, "\tilde{m}"] \arrow[uu, "\tilde{m}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A = A\otimes_R R & & A\otimes_R A \arrow[ll, "\mathrm{Id}\otimes_R \tilde{\varepsilon}"'] \\
R\otimes_R A \arrow[u, equal] & \checkmark & \\
A\otimes_R A \arrow[u, "\tilde{\varepsilon}\otimes_R \mathrm{Id}"'] & & A \arrow[ll, "\tilde{m}"] \arrow[uu, "\tilde{m}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A\otimes_R A \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] & & A\otimes_R A \arrow[ll, "\widetilde{\mathrm{inv}}\otimes_R \mathrm{Id}"] \\
& \checkmark & \\
A & & A \arrow[ll, "\tilde{\varepsilon}\circ\pi"'] \arrow[uu, "\tilde{m}"']
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{\Delta} : A \otimes_R A \longrightarrow A$$
$$a \otimes b \longrightarrow a \cdot b$$

$$\operatorname{Spec} A \xrightarrow{\Delta} \operatorname{Spec} A \times \operatorname{Spec} A$$

Hopf άλγεβρες ('Αλγεβρικη Τοπολογία)

$\tilde{\varepsilon} : A \longrightarrow R$ counit ή Augmentation

R αλγεβρα.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I_G \arrow[r] & A \arrow[r, "\tilde{\varepsilon}"] & R \arrow[r] \arrow[l, bend left] & 0 \end{tikzcd}$$

Augmentation ιδεωδες $= \ker \tilde{\varepsilon}$.

το A είναι R-αλγεβρα υπαρχει συναρτηση $R \longrightarrow A$ η οποια κανει split την α.α.

και συνεπως

$$A = R \cdot 1_R \oplus I_G$$

$$A \otimes A = R \oplus (I_G \otimes 1) \oplus (1 \otimes I_G) \oplus (I_G \otimes I_G)$$

splitting seq.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "j"] & C \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s"'] & 0 \end{tikzcd}$$

i 1-1

j επι

$\operatorname{Im} i = \ker j$

Είναι λαθος να υποθεσουμε

$B = A \oplus C$

ευκολο αν υπαρχει ομομορφισμος αλγεβρων $s : C \longrightarrow B$

Παραδείγματα

$G = \operatorname{Spec} A$ A R-άλγεβρα.

Θα πρέπει να δώσουμε δομή ομαδας στον

συναρτητή

$$T \longrightarrow \underline{G(T)} = \mathrm{Hom}_{Sch/R}(\underset{\underset{\mathrm{Spec}\,B}{\|}}{T}, \underset{\underset{\mathrm{Spec}\,A}{\|}}{G})$$

$T = \mathrm{Spec}\, B$

$$G(B) = G(T) = \mathrm{Hom}_{R\text{-}\alpha\lambda\gamma.}(\underline{A, B})$$

Για να κάνουμε το G ένα R-σχήμα ομάδας

$$B \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-}\alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\acute{\omega}\nu}(A, B)$$

συναρτητής από τις R-άλγεβρες στις ομάδες

$$\underline{\underline{\tilde{m}}} : A \longrightarrow A \otimes_R A$$

$$\begin{array}{l|lll} \pi_1 : G \times G \longrightarrow G & & A & \longrightarrow A \otimes_R A \\ & \tilde{\pi}_1 : & a & \longrightarrow a \otimes 1 \\ \pi_2 & \tilde{\pi}_2 : & a & \longrightarrow 1 \otimes a \end{array}$$

$\underline{\tilde{\pi}_1 \cdot \tilde{\pi}_2}$ στο $\underline{\mathrm{Hom}_{R\text{-}\alpha\lambda\gamma.}(A, A \otimes_R A)}$.

$\left[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G \times G, G)\right]$

$G_\alpha = \mathrm{Spec}\, R[u]$ R-δακτύλιος $S = \mathrm{Spec}\, R$

$R[u]$ πολυωνυμικός δακτύλιος μιας μεταβλητής

B αντιμεταθετική R-άλγεβρα.

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\alpha\lambda\gamma.}(R[u], B) \cong B$$

Πράγματι $f : R[u] \longrightarrow B$

$$f(rx) = r f(x) \quad \forall r \in R,\ x \in R[u]$$

καθορίζεται πλήρως από την τιμή του $f(u) = b$ (αν γνωρίζουμε $f(u) = b$ το γνωρίζουμε $f(\Sigma a_i u^i)$ $a_i \in R$

$$G(B) = G(T) = \mathrm{Hom}_{R\text{-alg.}}(\underline{A, B}) \cong (B, +)$$

$\underline{A = R[u]}$

Στόχος να δώσουμε σε αυτό το σύνολο δομή [illegible]

$\tilde{m}(u) =$

$\tilde{\pi}_1(u) = u \otimes 1$

$\tilde{\pi}_2(u) = 1 \otimes u$

$\tilde{m}(u) = \tilde{\pi}_1(u) + \tilde{\pi}_2(u)$

π_1

$$\mathrm{Hom}(R[u], R[u] \otimes R[u]) \cong (R[u] \otimes R[u], +)$$

$$\tilde{m} : R[u] \longrightarrow R[u] \otimes_R R[u]$$

$$u \longrightarrow u \otimes 1 + 1 \otimes u$$

$$\tilde{\varepsilon} : R[u] \longrightarrow R$$

$$\tilde{\varepsilon}(u) = 0$$

(Ουδετερο στοχειο στις προσθετικες ομαδες)

$$\widetilde{inv} : R[u] \longrightarrow R[u]$$

$$u \longrightarrow -u.$$

$G_a = \operatorname{Spec} R[u]$, m, ε, inv (επαγωνται απο τους μορφισμους αλγεβρων τους όπως όρισα.)

G_m $\quad G_m = \operatorname{Spec} R[u, u^{-1}]$

$$\operatorname{Hom}_{R\text{-}\alpha\lambda\gamma.}(R[u,u^{-1}], B) = B^*$$

Δηλαδη η πολ/κη ομαδα της R-αλγεβρας B

$$u \longrightarrow f(u)$$

$$u^{-1} \longrightarrow f(u)^{-1}$$

$\underline{uu^{-1} = 1}$

Η εικονα του u f(u) πρεπει να είναι αντιστρεψίμη.

Στοχος $\operatorname{Hom}_{R\text{-}\alpha\lambda\gamma.}(R[u,u^{-1}], B) \cong B^*$ να αποτελει δομη ομαδας

Πολ/κη δομη ομαδας απο το B^*.

$$\tilde{m} : R[u,u^{-1}] \longrightarrow R[u,u^{-1}] \otimes R[u,u^{-1}]$$

$$\mathrm{Hom}\left(R[u,u^{-1}],\ R[u,u^{-1}]\otimes R[u,u^{-1}]\right) = \left(R[u,u^{-1}]\otimes R[u,u^{-1}]\right)^*$$

$$\pi_1 : u \longrightarrow u\otimes 1$$

$$\pi_2 : u \longrightarrow 1\otimes u$$

$$\tilde{m} = \pi_1 \pi_2 \quad ; \qquad \tilde{m}(u) = (u\otimes 1)(1\otimes u)$$

$$= u\otimes u$$

$$\tilde{\varepsilon}(u) = 1$$

$$\widetilde{inv}(u) = u^{-1}$$

$$G_a(B) = (B, +)$$

$$G_m(B) = (B^*, \cdot)$$

Συναρτητής

R-άλγεβρες ⟶ ομάδες

$$GL_n = \mathrm{Spec}\ R[u,v]/\mathcal{J}$$

$U = (u_{ij})$ n^2-μεταβλητές

$V = (v_{i,j})$ n^2-μεταβλητής

$2n^2$ μεταβλητές

$$R[u,v] = R[u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots\ v_{n,n}]$$

$$(U\cdot V - I_n) = c_{ij}$$

πολυώνυμα των u_{ij}, v_{ij}

$$\mathcal{J} = \langle c_{ij} \rangle$$

$A = R[u, \underline{v}] / J$

Επιβάλουμε την αντιστροφή

$R[u, u^{-1}]$

$\mathrm{Hom}_{R\text{-αλ.}}(A, B) \cong \underline{GL_n(B)}$ → αντιστρέψιμοι $n \times n$ πίνακες με συντελ. από το B

GL_n συναρτητής

$$B \longrightarrow GL_n(B)$$

$n = 1$ $\quad GL_1 = \mathbb{G}_m$