Αλγεβρική Γεωμετρία 20/5/2021

$f: X \xrightarrow[f]{} Y$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\Delta_{X/Y}"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{Id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{Id}"] & \\
 & X \times_Y X \arrow[dl, "pr_1"] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

$f: X \to Y$ διαχωρισμένος (separated)

$\Delta_{X/Y}$ κλειστή immersion.

$f: X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ διαχωρισμένη τότε το σχήμα X λέγεται διαχωρισμένο

Τα αφινικά μορφισμά είναι πάντα διαχωρισμένα

$f: \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ είναι πάντα διαχωρισμένα,

Κριτήριο : $f: X \to Y$ αυτός είναι διαχωρισμένος αν και μόνο αν $\Delta_{X/Y}: X \to X \times_Y X$ είναι κλειστό υποσύνολο του τοπ. χώρου $X \times_Y X$

Διαχωρισμένο ή όχι είναι αποτέλεσμα του „τρόπου σχήματος"

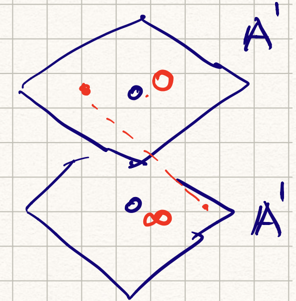
Παράδειγμα μη διαχωρισμένου σχήματος.

$$X = \operatorname{Spec} k[x] \qquad Y = \operatorname{Spec} k[y]$$

$$U = X \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} k[x, \tfrac{1}{x}].$$

$$V = Y \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} k[y, \tfrac{1}{y}]$$

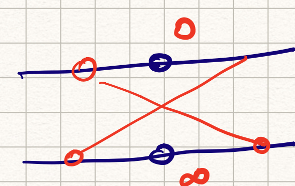
$$U \cong V$$



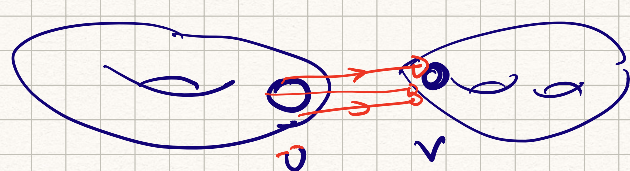
$$k[x, \tfrac{1}{x}] \longrightarrow k[y, \tfrac{1}{y}]$$

$$x \longrightarrow \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x} \longrightarrow y$$



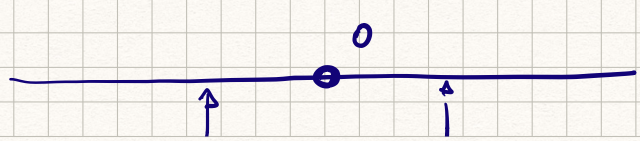
$\mathbb{P}^1_k$ Διαχωρισμένο σχήμα.



$$k[x, \tfrac{1}{x}] \longrightarrow k[y, \tfrac{1}{y}]$$

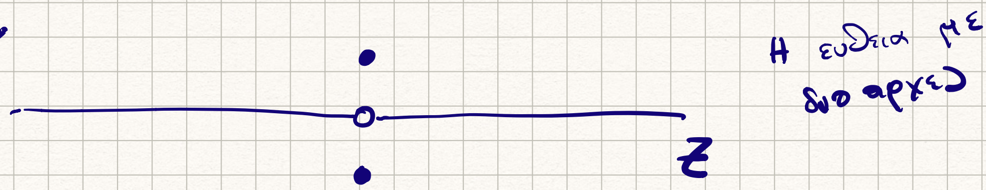
$$\Phi \qquad x \longrightarrow y \qquad \cong$$

$$\frac{1}{x} \longrightarrow \frac{1}{y}$$



$\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ U

scheme



$$Z \times_{Spec} Z$$

$$X_1 = Spec\, k[x] \otimes Spec\, k[x] \cong \mathbb{A}^2$$

$$X_2 = Spec\, k[y] \otimes Spec\, k[x] \cong \mathbb{A}^2$$

$$X_3 = Spec\, k[x] \otimes Spec\, k[y] \cong \mathbb{A}^2$$

$$X_4 = Spec\, k[y] \otimes Spec\, k[y] \cong \mathbb{A}^2$$

$$\Phi : U \longrightarrow V$$

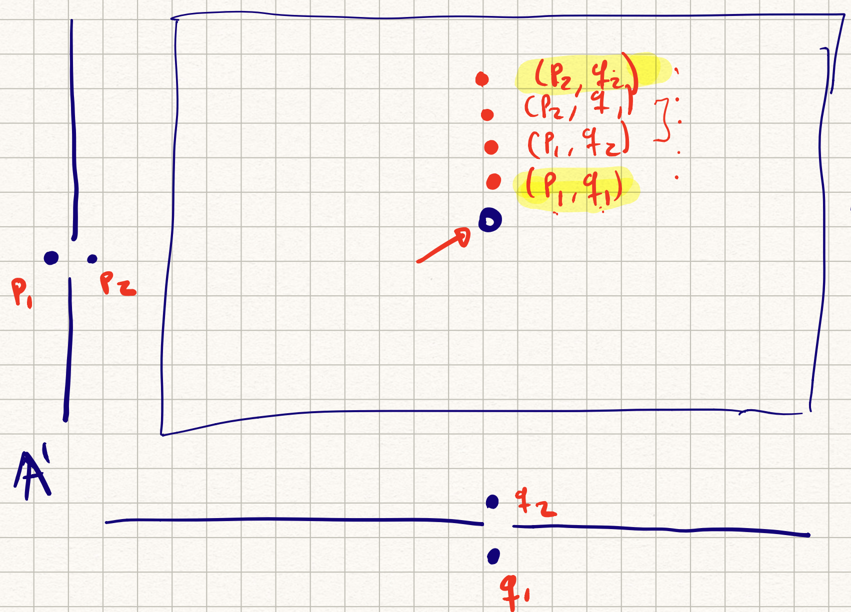
$$\underline{\Phi \times Id_U} : U \times_{Spec\, k} U \longrightarrow V \times_{Spec\, k} U$$

$$\begin{tikzcd}
 & U \times_{Spec} U \arrow[dl, "\pi_1'"'] \arrow[dr, "\pi_2'"] \arrow[d, dashed, "\Phi \times Id_u"] & \\
U \arrow[dd, "\Phi"'] & V \times_{Spec\, k} U \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & U \arrow[dd, "Id"] \\
 & & \\
V \arrow[dr] & & U \arrow[dl] \\
 & Spec\, k &
\end{tikzcd}$$

Spec..

$$Id_U \times \phi : U \times_{\mathrm{Spec}\,k} U \longrightarrow U \times_{\mathrm{Spec}} V$$

$$\phi \times \phi : U \otimes_{\mathrm{Spec}} U \longrightarrow V \times_{\mathrm{Spec}} V$$



$A^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\underline{\underline{(a, a)}}$

$\underline{\underline{(\alpha, \beta)}}$

$$\Delta : Z \longrightarrow Z \times_{\mathrm{Spec}\,k} Z$$

$$\Delta_1 : X \longrightarrow X_1 = X \times_{\mathrm{Spec}\,k} X$$

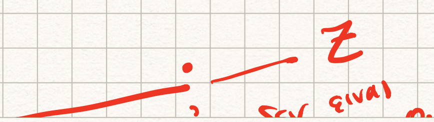
$$\Delta_2 : Y \longrightarrow X_4 = Y \times_{\mathrm{Spec}\,k} Y$$

$$\mathrm{Im}(\Delta) = Z \times_{\mathrm{Spec}} Z \setminus \{Q_1, Q_2\}$$

$\parallel$

$\Delta(Z)$ όχι κλειστό

δεν είναι κλειστό.



διαχωρισμένε

Θεώρημα

① $f: X \to Y$ διαχωρισμένη
$g: Y \to Z$ —//—

$f: X \to Z$ είναι διαχωρισμένη

② $j: Z \to X$ είναι κλειστή immersion
ανοιχτή
είναι διαχωρισμένη

③ $f: X \to S$ διαχωρισμέν.

$X \times_S T \to T$ είναι διαχωρισμέν.

④
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

$g \circ f$ είναι διαχωρισμένη τότε και η f είναι διαχωρισμένη.

① $\Delta_{X/Y}: X \to X \times_Y X$

$\Delta_{Y/Z}: Y \to Y \times_Z Y$

κλειστές immersions

X ειναι ενα σχημα πανω απο το Z (μεσω της $g \circ f$.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \times_Z X \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, "(f,f)"] & \\
X \arrow[d, "f"] & Y \times_Z Y \arrow[dl] \arrow[dr] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
 & Z &
\end{tikzcd}
$$

$$(f,f) : X \times_Z X \to Y \times_Z Y$$

$$
\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "\phi'"] & \\
Y \times_{Y \times_Z Y} X \times_Z X = H \arrow[d] \arrow[dr] & \cong & X \times_Y X \arrow[dl, "t"] \arrow[r] & X \\
Y \arrow[dr, "\Delta_{Y/Z}"'] & X \times_Z X \arrow[d, "(f,f)"] & \\
 & Y \times_Z Y &
\end{tikzcd}
$$

$$h_H(W) = \mathrm{Hom}(W, H)$$
$$\downarrow$$
$$h_{X \times_Y X}(W)$$

$$
\begin{tikzcd}
 & X \times_Y X \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
X & X \times_Z X \arrow[l] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
$$

$\searrow Z \swarrow$

W

$$h_H(W) \cong h_{X\times_Y X}(W)$$

$$W = X \times_Y X$$

$$h_H(X\times_Y X) \cong h_{X\times_Y X}(X\times_Y X) \ni \mathrm{Id}$$

$$X\times_Y X \xrightarrow{\sim} H!$$

$$\Delta_{X/Z} : X \longrightarrow X\times_Z X$$ closed immersion

$\Delta_{X/Y}$

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d, "\Delta_{X/Y}"] \\
Y \times_{Y\times_Z Y} X\times_Z X = H \arrow[rr, phantom, "\cong"] \arrow[d] \arrow[drr] & & X\times_Y X \arrow[d, "f"] \arrow[ll, bend right] \\
Y \arrow[d, "\Delta_{Y/Z}"] & \Delta_{Y/Z}^{*}|_{Y\times_Z Y}^{(f,f)} & X\times_Z X \arrow[d, "{(f,f)}"] \\
 & &
\end{tikzcd}$$

closed immersion

$Y \times_Z Y$

Αλλαγή βάσης της closed imm.

$\Delta_{Y/Z}$ με $Y \times_Z Y$

Λήμμα: Αλλαγές βάσης κλειστών immersions είναι κλειστές immersions