Αλγεβρικη Γεωμετρια 13/5/2021

Fiber product.

$$G(T) = \left\{ (f,g) : \begin{array}{l} f: T \longrightarrow X \\ g: T \longrightarrow Y \end{array} \right.$$

$$\varphi_1 f = \varphi_2 \circ g$$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

$$h : T_1 \longrightarrow T_2$$

$$G(h) : G(T_2) \longrightarrow G(T_1)$$
$$(f,g) \longrightarrow (f \circ h, g \circ h)$$

$$\begin{tikzcd} & T_1 \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f \circ h"'] \arrow[ddr, bend left, "g \circ h"] & \\ & T_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Αν ο συναρτητης G ειναι representable τότε

το αν $G \cong h_W = Hom(\cdot, W)$

τοτε το $W = X \times_Z Y$

$$G(T) \ni (f,g) = (p_1 \circ h, p_2 \circ h)$$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & W = X \times_Z Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Δεν είναι όλοι οι συναρτητες αναπαραστάσιμοι
(moduli spaces)

Στην κατηγορία των σχηματων υπαρχουν fiber products

<u>Λήμμα</u> $X = Spec\, A$ $\qquad \varphi_1 : X \longrightarrow Z$

$Y = Spec\, B$ $\qquad \varphi_2 : Y \longrightarrow Z$

$Z = \operatorname{Spec} C$

$$X \times_Z Y = \underline{\operatorname{Spec}(A \otimes_C B)}$$

Τα A, B είναι C- αλγεβρες (προϋπόθεση για το τανυστικό γινόμενο)

$$q_1 : \underset{\operatorname{Spec} A}{\overset{\|}{X}} \longrightarrow \underset{\operatorname{Spec} C}{\overset{\|}{Z}}$$

$$q_2 : \underset{\operatorname{Spec} B}{\overset{\|}{Y}} \longrightarrow Z$$

$v_1 : C \longrightarrow A$ ομομορφισμοί δακτυλίων

$v_2 : C \longrightarrow B$

A, B γίνεται C- modules

M_1 R- module

M_2 R- module.

$M_1 \otimes_R M_2$

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec}(A \otimes_C B) \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
\operatorname{Spec} A \arrow[dr] & & \operatorname{Spec} B \arrow[dl] \\
 & \operatorname{Spec} C &
\end{tikzcd}$$

Μορφισμοί δακτυλίων.

$$A \longrightarrow A \otimes_C B \qquad\qquad B \longrightarrow A \otimes_C B$$

$$a \longrightarrow a \otimes 1 \qquad\qquad b \longrightarrow 1 \otimes b$$

$$\operatorname{Spec} A \xleftarrow{\ p_1\ } \operatorname{Spec}(A \otimes_C B) \qquad\qquad \operatorname{Spec} B \xleftarrow{\ p_2\ } \operatorname{Spec}(A \otimes_C B)$$

$$
\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\operatorname{Spec} A \arrow[dr] & & \operatorname{Spec} B \arrow[dl] \\
& \operatorname{Spec} C &
\end{tikzcd}
$$

T — τυχαίο σχήμα

Οι συναρτήσεις f, g καθορίζονται πλήρως μορφισμούς δακτυλίων

$$\Phi : A \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$$

$$\Psi : B \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$$

δακτύλιοι global section του sheaf δομής του σχήματος T.

$\Phi \circ v_1$

$$
\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\operatorname{Spec} A \arrow[dr, "\varphi_1"'] \arrow[rr, phantom, "//"] & & \operatorname{Spec} B \arrow[dl, "\varphi_2"] \\
& \operatorname{Spec} C &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \Gamma(T, \mathcal{O}_T) & \\
A \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[rr, phantom, "//"] & & B \arrow[ul, "\Psi"'] \\
& C \arrow[ul, "v_1"] \arrow[ur, "v_2"'] \arrow[uu, bend right=60, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$R = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$$

$$C \underset{\psi \circ v_2}{\overset{\varphi \circ v_1}{\rightrightarrows}} \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$$

C - άλγεβρας

$$G(T) = \{(f,g) \in \operatorname{Hom}(T,X) \times \operatorname{Hom}(T,Y) : \varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ g\}$$

$$= \{(\Phi\ \Psi) \in \operatorname{Hom}(A,R) \times \operatorname{Hom}(B,R) : \Phi \circ v_1 = \Psi \circ v_2\}$$

$\phi \circ v_1 = \psi \circ v_2$

$$\phi(c \cdot 1_A) = \psi(c \cdot 1_B) \quad \forall\ c \in C$$

$1_A, 1_B$ μονάδες των δακτυλίων A, B

C- αλγεβρας που δίνεται

$$\phi(c \cdot a) = \overset{\phi \circ v_1(c)}{\overset{\shortparallel}{c}} \cdot \phi(\alpha)$$

$$\psi(c \cdot a) = c \cdot \psi(\alpha)$$

$$\phi(c \cdot 1_A\, a)$$

$$\phi(v_1(c)\, a) = \underbrace{\phi(v_1(c))}\phi(\alpha)$$

$c \cdot \phi(\alpha)$

πολλαπλασιασμός ορισμένος από την σύνδεση

$$\Phi : A \times B \longrightarrow R = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$$

$$(a, b) \longrightarrow \varphi(\alpha) \cdot \psi(b)$$

Διγραμμική επιπλέον $a \in A,\ b \in B,\ c \in C$

① $$\Phi(c \cdot a, b) = \Phi(\alpha, c\, b) = c\, \Phi(\alpha, b)$$

$$\varphi(c\alpha)\psi(b) = \varphi(\alpha)\psi(c\, b) = c \cdot \varphi(\alpha)\psi(b)$$

② $$\Phi(\alpha_1\alpha_2, b_1 b_2) = \Phi(\alpha_1, b_1) \cdot \Phi(\alpha_2, b_2).$$

Αντιστρόφως $\Phi : A \times B \longrightarrow R$ που ικανοποιεί τα ① ②

$\varphi(a) = \Phi(a, 1_B)$ $\qquad \varphi : A \longrightarrow R$

$\psi(b) = \Phi(1_A, b)$ $\qquad \psi : B \longrightarrow R$

$$\Phi(\alpha, b) = \Phi(a 1_A, b 1_B) = \Phi(a, 1_B)\, \Phi(1_A, b)$$

$= \varphi(a)\ \psi(b)$ ...

$= \varphi(a)\,\psi(b)$ ορισμός του φ, ψ.

$$\varphi \circ v_1 = \psi \circ v_2 .$$

$$\underline{G(T)} = \left\{ \Phi : A \times B \to R,\ \Phi \text{ είναι } C\text{-διγραμμική και ικανοποιεί τις (1) και (2)} \right\}$$

Εξ ορισμού του τανυστικού γινομένου

$$G(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A \otimes_C B,\ R) \ni h$$

Θεωρία τανυστικών γινομένων.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r] \arrow[d] & R \\ A \otimes_C B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \quad C\text{-}\delta\rho.$$

σύνολα

$$\Phi_T : G(T) \xrightarrow[\simeq]{1-1 \text{ επί}} \mathrm{Hom}\big(T,\ \mathrm{Spec}(A \otimes_C B)\big)$$

$j : T_1 \longrightarrow T_2$ μορφισμός σχημάτων

$$j : \Gamma(T_1, \mathcal{O}_{T_1}) \longrightarrow \Gamma(T_2, \mathcal{O}_{T_2})$$

$$R_1 = \Gamma(T_1, \mathcal{O}_{T_1})$$
$$R_2 = \Gamma(T_2, \mathcal{O}_{T_2})$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes_C B \arrow[r] \arrow[dr] & R_1 \arrow[d, "j"] \\ & R_2 \end{tikzcd}$$

$$j : \mathrm{Hom}(A \otimes_C B, R_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A \otimes_C B, R_2)$$

$$\mathrm{Hom}\big(T_2,\ \underbrace{\mathrm{Spec}(A \otimes_C B)}_{W}\big) \xrightarrow{h_W(j)} \mathrm{Hom}\big(T_1,\ \underbrace{\mathrm{Spec}(A \otimes_C B)}_{W}\big)$$

$$\begin{tikzcd} G(T_2) \arrow[r, "\Phi_{T_2}", "\simeq"'] \arrow[d, "G(j)"'] & \mathrm{Hom}(T_2, W) \arrow[d, "h_W(j)"] \\ {} & {} \end{tikzcd}$$

$$G(T_1) \xrightarrow[\Phi_{T_1}]{\cong} \mathrm{Hom}(T_1, W)$$

Απόδειξη της γενικής περίπτωσης

<u>**Βήμα 1**</u>

$q_1 : X \longrightarrow Z$
$q_2 : Y \longrightarrow Z$

και υποθέτουμε ότι υπάρχει το $X \times_Z Y$

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\text{ανοιχτό}}\ p_1^{-1}(U) \subset X \times_Z Y \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr] & \\
U \subset X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

ανοιχτό του X

$$\begin{tikzcd}
 & p_1^{-1}(U) \arrow[dl, "\hat{p}_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
U & & Y
\end{tikzcd}$$

$$\underline{\hat{p}_1 = p_1\big|_{p_1^{-1}(U)}}$$

Ισχυρισμός $p_1^{-1}(U)$ σχήμα (ως ανοιχτό υποσύνολο σχήματος)

είναι το γινόμενο των

$$\underline{U \times_Z Y} = p_1^{-1}(U)$$

Πράγματι

$U \xhookrightarrow{\ i\ } X$ open immersion

$\hat{q}_1 = q_1 \circ i : U \longrightarrow Z$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, bend right] & X \arrow[d, "q_1"] \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

Έστω

$$\begin{tikzcd}
 & & T \arrow[dll, "\hat{f}"'] \arrow[dl, "f"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
U \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[dr, "\hat{q}_1"'] & X \arrow[d, "q_1"] & X \times_Z Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"'] & Y \arrow[dll, "q_2"] \\
 & Z & &
\end{tikzcd}$$

$f = i \circ \hat{f}$

$q_1 f = q_2 \circ g$

$$f = p_1 \circ h \qquad g = p_2 \circ h \qquad f(T) \subset U$$

$$h(T) \subset p_1^{-1}(U)$$

$$h : T \longrightarrow p_1^{-1}(U) \subset X \times_Z Y$$

Αυτο αποδ. οτι το $p_1^{-1}(U)$ αναπαριστα τον

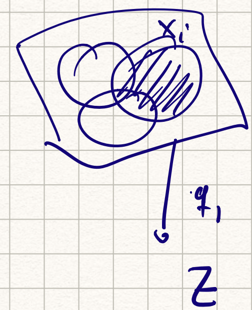
συναρτης $\hat{G} = \left\{ (\hat{f}, g) \quad \begin{matrix} T \xrightarrow{\hat{f}} U \\ T \longrightarrow Y \end{matrix} \right\}$

Βήμα 2

$$X \xrightarrow{q_1} Z \qquad Y \xrightarrow{q_2} Z \qquad \{X_i,\ i \in I\} \text{ ανοιχτο καλυμμα του } X.$$

$$q_1^{(i)} = q_1|_{X_i} : X_i \longrightarrow Z$$

$$q_2 : Y \longrightarrow Z$$



Αν υπάρχουν τα γινόμενα

$$\left(X_i \times_Z Y,\ (q_1^{(i)}, q_2)\right)$$

τοτε υπάρχει και το $\left(X \times_Z Y, (q_1, q_2)\right)$.

$$X_{ij} = X_i \cap X_j$$

Αν $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ $\qquad U_{ij} = (p_1^{(i)})^{-1}(X_{ij}) \subset X_i \times_Z Y$

ανοιχτο

$$X_{ji} \times_Z Y$$
$$\|$$
$$X_{ij} \times_Z Y$$

$$X_{ij} = X_{ji}$$

$$\phi_{ij} : U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ij}$$

p_1^{i} $\qquad p_1^{j}$

$$p_1^{(i)}\big|_{U_{ij}} = p_1^{(j)}\big|_{U_{ji}} \circ \varphi_{ij}$$

$$p_2^{(i)}\big|_{U_{ji}} = p_2^{(j)}\big|_{U_{ji}} \circ \varphi_{ij}$$

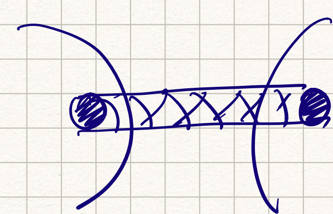
$$X_i \cap X_j \cap X_k \neq \emptyset$$

$$\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}.$$

στο $U_{ij} \cap U_{ik}$ έχουμε ότι $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$

Κολλάμε τα $X_i \times_Z Y$ μέσω των φ_{ij} στα U_{ij}

$X_i \times_Z Y \supset U_{ij} \xrightarrow{\varphi_{ij}} U_{ji} \subset X_j \times_Z Y$



Το "κόλλημα" θα είναι το σχήμα $X \times_Z Y$.

$$\begin{array}{ccc} & X \times_Z Y & \\ \swarrow p_1 & & p_2 \searrow \\ X & & Y \end{array}$$

Θέλουμε τα $p_1 \big| X_i \times_Z Y$ να είναι $p_1^{(i)}$

$p_2 \big| X_i \times_Z Y$ $p_2^{(i)}$

Θα δείξουμε ότι $(X \times_Z Y, (p_1, p_2))$ είναι το fiber product.

$f : T \longrightarrow X$

$g : T \longrightarrow Y$

$$q_1 \circ f = q_2 \circ g$$

$T \quad \rho^{-1}(X) \quad f = P| \quad {}^{(i)} \; P \quad {}^{(i)}$

$T_i = f^{-1}(X_i)$ $\quad f_i = f|_{T_i}$ $\quad \varphi_1 f_i = \varphi_2 g_i$

$g_i = g|_{T_i}$

$\exists!\ h_i : T_i \longrightarrow X_i \times_Z Y$ (γιατι το $X_i \times_Z Y$ ειναι γινομενο)

Οι μορφισμοι h_i ταυτιζονται στα $T_i \cap T_j$ και κολλανε και αυτοι σε μια συναρτηση

$$h : T \longrightarrow \underline{X \times_Z Y}$$

<u>Βημα 3</u>

$\varphi_1 : X \longrightarrow Z$

$\varphi_2 : Y \longrightarrow Z$

Υποθετουμε οτι Y, Z αφινικα X τυχαιο.

$X = \{ X_i \quad i \in I \}$ ανοιχτο καλυμμα απο αφινικα

$X_i \times_Z Y$ υπαρχει. (Λημμα)

<u>Βημα 2</u> $\Longrightarrow$ $\underline{X \times_Z Y}$ υπαρχει.

Z αφινικο, $Z = \operatorname{Spec} C$ $\qquad$ $X \times_{\operatorname{Spec} C} Y$] υπαρχει

X, Y <u>τυχαια</u>.

$Y = \{ Y_j \quad j \in J \}$ ανοιχτη αφινικη καλυψη.

$X \times_Z Y_j$ υπαρχουν. ✓

X, Y, Z τυχαια $\qquad$ $\{ Z_k, k \in K \}$ ανοιχτο αφινικο καλυμμα του Z.

$$X_K = \varphi_1^{-1}(Z_K)$$

$$Y_K = \varphi_2^{-1}(Z_K)$$

$$\varphi_1^{(K)} = \varphi_1|_{X_K}$$

$$\varphi_2^{(K)} = \varphi_2|_{X_K}$$

$$\left(X_K \times_Z Y_K, \left(p_1^{(K)}, p_2^{(K)}\right)\right) = \left(X_K \times_{Z_K} Y\right)$$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "\varphi_1^{(K)}"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ X_K & & Y \end{tikzcd}$$

$$\varphi_1^{(K)} \circ f = \varphi_2 \circ g$$

$$\varphi_2(g(T)) = \varphi_1^{(K)} f(T) \subset \varphi_1^{(K)}(X_K) \subset Z_K$$

$$g(T) \subset Y_K$$

$$h : T \longrightarrow X_K \times_Z Y_K$$

$$f = p_1^{(K)} \circ h$$

$$g = p_2^{(K)} \circ h$$

$\underbrace{X_K \times_{Z_K} Y_K}_{\text{υπαρχει}}$ ειναι το $X_K \times_Z Y$ υπαρχει για καθε K

$\longrightarrow$ Βήμα 2

$X \times_Z Y$ υπάρχει.

<u>Παραδείγματα</u>

$$X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} Y = X \times Y$$

Καθε σχημα είναι $\mathbb{Z}$ σχημα.

$$\mathbb{Z} \longrightarrow R$$
$$1 \longrightarrow 1_R$$

$$\mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^m_k = \mathbb{A}^{n+m}_k.$$

$\mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec} k[x_1,\dots,x_n]$

$\mathbb{A}^m_k = \operatorname{Spec} k[y_1,\dots,y_m]$

$$\mathbb{A}^n_k \times_k \mathbb{A}^m_k = \operatorname{Spec}\left(k[x_1,\dots,x_n] \otimes_k k[y_1,\dots,y_m]\right)$$

$$= \operatorname{Spec}\left(k[x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m]\right)$$

$$\parallel$$

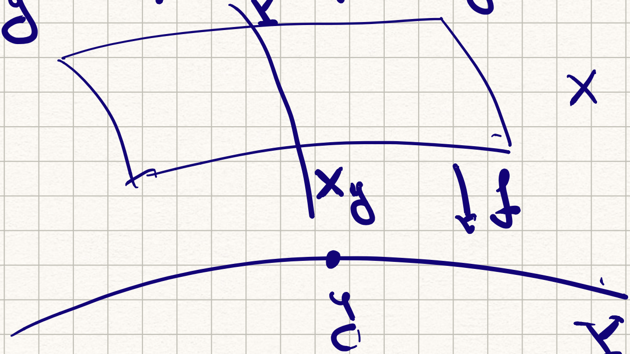
$$\mathbb{A}^{n+m}_k.$$

__Ορισμός__

$f : X \longrightarrow Y$ μορφισμός σχημάτων

$y \in Y$

$X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y)$ θα λέγεται η ίνα του f υπεράνω του y.



X

$X_y =$ "$f^{-1}(y)$" + δομή σχήματος

$k(y) = \mathcal{O}_{Y,y}/m_y$ $\quad m_y$ μέγιστο ιδεώδες του $k(y)$.

$k[t] \longrightarrow k[x,y,t]/\langle xy-t\rangle$ $\quad xy - t$ οικογένεια από υπερβολές με παράμετρο t

$\operatorname{Spec} k[x,y,t]/\langle xy-t\rangle = X \longrightarrow Y = \operatorname{Spec} k[t]$

Εστω y να είναι το σημείο $\langle t-a \rangle = \mathfrak{a}$

$$\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[t]$$

$$X_a = X \times_Y k(y) = \operatorname{Spec}\left(k[x,y,t]/\langle xy-t\rangle \otimes_{k[t]} k[t]/(t-a) \right)$$

$$M \otimes_R R/I \cong \left(M/I\cdot M \right)$$ Ιδιότητα τανυστικών γινομένων.

$$\operatorname{Spec}\left(k[x,y,t]/\langle xy-t,\ t-a\rangle \right)$$

$$\parallel$$

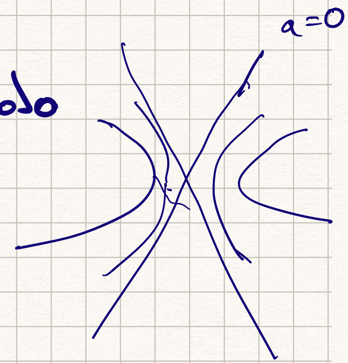
$$\operatorname{Spec}\left(k[x,y]/\langle xy-a\rangle \right)$$

πηλίκο specialization $xy - t \rightsquigarrow t = a$ specialization της παραμέτρου

"$f^{-1}(a)$"

$a \neq 0$ X_a ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο

$a = 0$ έχουμε δύο ευθείες



generic point του $k[t]$

σώμα πηλίκων $k(t)$

$$X_{gp} = \operatorname{Spec} k(t)[x,y]/\langle xy-t\rangle$$

Γενική ίνα.

Παράμετρα να είναι το $k[t]$

$$X = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[x,y]/\langle xy-a\rangle \right) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$$

$p\mathbb{Z}$ πρώτο ιδεώδες

$$X_p = \left(\mathbb{Z}[x,y]/\langle xy-a\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right)$$

$$= \mathbb{F}_p[x,y]/\langle xy-a\rangle$$ αναγωγη $\bmod p$

Αν $p \mid a$ τοτε το X_p δεν είναι αναγωγο.

Γενικη ινα.

$$\operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[x,y]/\langle xy-\alpha\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \right)$$

$$\operatorname{Spec}\left(\mathbb{Q}[x,y]/\langle xy-\alpha\rangle \right)$$