Αλγεβρικη γεωμετρια 22/4/2021

$S \longrightarrow X$ ένα S-σημειο του σχήματος X.

$(X, \mathcal{O}_X)$ scheme. $x \in X$ σημειο

m_x / m_x^2 συνεφαπτόμενο χωρο $\qquad \underbrace{Hom_{k(x)}\left(m_x/m_x^2, k(x)\right)}_{\text{εφαπτομενο χωρο στο } x.}$

$k(x) = \mathcal{O}_x / m_x^2$

Προταση

$\partial \in Hom_{k(x)}\left(m_x/m_x^2, k(x)\right)$

$\updownarrow$

$$\left(Spec\, k[t]/\langle t^2\rangle, \mathcal{O}_{Spec\, k[t]/\langle t^2\rangle}\right) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X).$$

$$\begin{tikzcd}
\Phi\ Spec\, k[t]/\langle t^2\rangle \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl, "p"] \\
& Spec\, k &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k[t]/\langle t^2\rangle & & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[ll, "\Phi^\#"'] \\
& k \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}_{X,x}/m_x = k$ $\left(\begin{array}{l}\text{αν το } k \text{ ειναι αλγεβρικα} \\ \text{κλειστο δεν θα ειχαμε τιποτα} \\ \text{να δειξουμε}\end{array}\right)$

$$\begin{tikzcd}
k \cong k[t]/\langle t\rangle & & \mathcal{O}_{X,x}/m_x \arrow[ll, "\Phi_x^\#"'] \\
& k \arrow[ul, "Id"] \arrow[ur, "p_x^\#"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Phi_x^\#(m_x^2)$ είναι 0 στο $k[t]/\langle t^2\rangle$

$\varphi_x^{\#}(m_x) \subset \langle t \rangle$

$m_1 \cdot m_2 \in m_x^2$

$m_1 \in m_x$
$m_2 \in$

$\varphi_x^{\#}(m_1 m_2) \in \langle t^2 \rangle$

$a \bmod m_x^2 \in m_x / m_x^2$

$\boxed{\partial(\alpha)\cdot t} = \varphi_x^{\#}(\alpha) \in \langle t \rangle \in k[t]/\langle t^2 \rangle$

Άρα ορίζουμε τον $\partial(\alpha) \in k$

συντελεστής με τον οποίο πολ/ται το t.

$a = b + s \in m_x^2 \to 0 \qquad m_x^2 \to 0$

$\boxed{\varphi = (\varphi, \varphi^{\#})}$

$\partial f(\alpha) \qquad m_x/m_x^2 \to k \qquad \partial(\alpha) t$

$x \in X \qquad k(x) = \mathcal{O}_x / m_x$

$\partial \in T_x X = \mathrm{Hom}_{k(x)}\left(m_x / m_x^2 , k(x) \right)$

$(X, \mathcal{O}_x) \xrightarrow[\text{δομής}]{\text{μορφισμός}} (\mathrm{Spec}\, k, k) \qquad X \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k$

σχήματα

$k(x) = k$

$p_x^{*} : k \longrightarrow \mathcal{O}_{x,x} \qquad \mathcal{O}_{x,x} \xrightarrow{q_x} k(x) = \mathcal{O}_x / m_x = k$

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "p_x^{*}"] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & \mathcal{O}_{x,x} \arrow[r, "q_x"] & k \end{tikzcd}$$

$a \in \mathcal{O}_{x,x} \longrightarrow \bar{a} \quad \mathcal{O}_{x,x}/m_x^2$

$a = \cancel{\alpha_0} + \alpha_1 t + \cancel{\alpha_2 t^2}$

$a_0 = p_x^{*}(q_x(a)) \qquad q_x(\alpha) = \mathcal{O}_{x,x}/m_x = k$

συν.

$$\alpha - \alpha_0^{\text{σταθερη τιμη της συναρ.}} =: \underline{\underline{a_1}}$$

α_0 δεν ειναι υποχρεωτ. στοιχειο m_x

$\alpha_1 \in m_x$ γιατι

$$\begin{aligned} \varphi_x(\alpha_1) &= \varphi_x(\alpha) - \varphi_x(a_0) \\ &= \varphi_x(a) - \underbrace{\varphi_x p_x^{\#}}_{Id} \varphi_x(a)) \\ &= \varphi_x(a) - \varphi_x(a) = 0 \end{aligned}$$

τιμη της συναρτησης στο m_x

$$\psi_x : \mathcal{O}_{X,x} / m_x^2 \longrightarrow k[t] / \langle t^2 \rangle \ni v_0 + v_1 t \cdots, \quad v_0 \in k$$

$$a \in \mathcal{O}_{X,x} \qquad \overline{a} \longmapsto \boxed{\psi_x(\overline{a}) = \varphi_x(a_0) + \partial(\overline{\alpha}_1)\, t}$$

m_x

σταθερη τιμη

$$a_1 \in m_x$$

$$\overline{a}_1 \in m_x / m_x^2 \xrightarrow{\partial} k$$

$$\overline{\alpha}_1 \longrightarrow \partial(\overline{\alpha}_1)$$

$$(a+b)_0 = p_x^{\#}\left(\varphi_x(a+b)\right) = p_x^{\#}(\varphi_x(\alpha) + p_x^{\#}(\varphi_x(b)) = a_0 + b_0$$

$$(a+b)_1 = \alpha_1 + b_1$$

$$\begin{aligned} (\alpha+b)_1 &= (a+b) - (a+b)_0 \\ &= \underbrace{a - \alpha_0}_{\alpha_1} + \underbrace{b - b_0}_{b_1} \end{aligned}$$

$$(ab)_0 = a_0 b_0$$

$$= p^{\#} \varphi(\alpha b) = p^{\#} \varphi(\alpha)\, p^{\#} \varphi(b)$$

$$(\alpha b)_1 = \alpha b - (\alpha b)_0$$ ορισμός
$$= \alpha \cdot b - \alpha_0 \bar{b}_0$$

$$\alpha_1 = \alpha - \alpha_0$$
$$b_1 = b - b_0$$

$$\alpha_1 b_1 = (\alpha - \alpha_0)(b - b_0) = \underbrace{\alpha b - \alpha_0 b_0}_{(\alpha b)_1} - \alpha_0 b - b_0 \alpha$$

$$(\alpha b)_1 = \alpha_1 b_1 + b_0 \alpha_1 + \alpha_0 \bar{b}_1$$ $\alpha_1 b_1 \in m_x^2$

$$\overline{(\alpha b)}_1 \in \mathcal{O}_x / m_x^2 = \overline{a_0 b_1} + \overline{b_0 \alpha_1}$$

δε

τιμή τομ.

π.

$$D(fg) = f D(g) + g D(f)$$

$$\varphi_x(\bar{a}) \varphi_x(\bar{b}) = \left(\varphi_x(a_0) + \partial(\bar{\alpha}_1) t\right)\left(\varphi_x(b_0) + \partial(\bar{b}_1) t\right) \bmod t^2$$

$$= \varphi_x(a_0)\varphi_x(b_0) + \varphi_x(b_0)\partial(\bar{\alpha}_1) + \varphi_x(a_0)\partial(\bar{b}_1) t \quad \bmod t$$

$$= \varphi_x(a_0 b_0) + \partial(\overline{b_0 \alpha_1} + \overline{\alpha_0 b_1}) t \quad \bmod t^2$$

$$\varphi_x(\alpha b)_0 + \partial(\alpha b)_1 \quad \bmod t^2$$

$$= \varphi_x(\overline{\alpha b})$$

καθορίζεται με βάση το ∂

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{x,x} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\Phi^{\#}"'] & \mathcal{O}_{x,x}/m_x^2 \arrow[r, "\varphi_x"] & k[t]/\langle t^2 \rangle
\end{tikzcd}$$

$$(\phi, \phi^{\#}) : \left(\operatorname{Spec} k[t]/t^2, \langle t^2 \rangle, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k[t]/(t^2)}\right) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

τοπολογικά

x $\xleftrightarrow{\Phi}$ X.

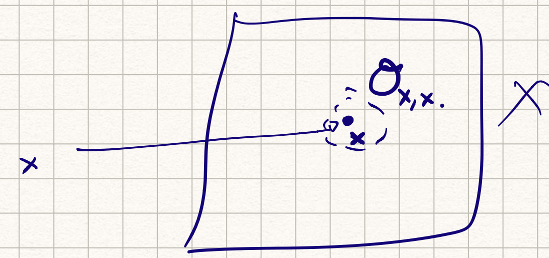
σημείο   scheme.

$$\phi^\# : \mathcal{O}_X \longrightarrow \varphi_*\left(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, k[t]/\langle t^2\rangle}\right)$$

αρκεί να τον ορίσω πάνω στα φύτρα $\mathcal{O}_{X,x}$

x $\phi^\#$ που ορίσαμε στο $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow k[t]/t^2$ παραπάνω.

$y \neq x$ $\phi^\#$ ορίζεται να είναι η μηδενική συνάρτηση



Πολλαπλή κατασκευή

$S \to X$ S-σημεία. είναι αρκετά γενικά ώστε να συμπεριλάβουν τους εφαπτόμενους χώρους.

$k[t]/\langle t^2\rangle$ έχει απειροστή πληροφορία.

Αναπαραστάσιμοι συναρτητές και γινόμενα

$\mathcal{C}$ $W \in Ob(\mathcal{C})$ σταθερό

$$h_W(X) = \underbrace{Hom_{\mathcal{C}}(X, W)}_{\text{σύνολο}} \qquad X \in Ob(\mathcal{C})$$

$$h_W : \mathcal{C} \longrightarrow Set.$$

$f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$

$a \in h_W(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$

$h_W(f)(a) = a \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a\circ f"] \arrow[d, "f"'] & W \\ Y \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{C} : X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h_W} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W) = h_W(Y) \xrightarrow{h_W(f) = a\circ f} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W)$

$X \longrightarrow W$

Contravariant συναρτήσης

$h_W^{(0)}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$ μετ.   σταθερό   Covariant συναρτηση.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

$X \xrightarrow{f} Y$

$h_W^{(0)}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \xrightarrow[f\circ a]{h_W^{(0)}(f)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) = h_W^{(0)}(Y)$

h_W, $h_W^{(0)}$

Ερώτημα: Representable functor.

$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$

$X \longrightarrow F(X)$

Υπαρχει ενα $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ωστε

$\phi_X : F(X) \xrightarrow{\cong} h_W(X)$ για καθε αντικείμενο X

ισομορφισμος συνόλων

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2)$

$$\begin{tikzcd} F(X_2) \arrow[r, "\cong", "\phi_{X_2}"'] \arrow[d, "F(f)"'] & h_W(X_2) \arrow[d, "h_W(f)"] \\ {} & {} \end{tikzcd}$$

[Ισομορφισμος συναρτησεων]

$$F(X_1) \xrightarrow[\Phi_{X_1}]{\cong} h_W(X_1)$$

Αν ναι τότε ο συναρτητής ονομάζεται representable.

<u>Συνέπειες του ορισμού</u>

ιδιαίτερο σύνολο. $\longrightarrow F(W) \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\cong}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, W) = h_W(W)$

$$\underline{\psi} \in F(W) \longleftrightarrow W \xrightarrow{Id_W} W \qquad Id$$

Το ζευγάρι (W, ψ) καθορίζει τον συναρτητή F.

$X \in Ob(\mathcal{C})$ $\qquad h$ τυχαίο στοιχείο $X \longrightarrow W$

$$\begin{tikzcd}
\psi \in F(W) \arrow[r, "\Phi_W", "\cong"'] \arrow[d, "F(h)"'] & h_W(W) \ni Id : W \longrightarrow W \arrow[d, "h_W(h)"] \\
F(h)(\psi) \in F(X) \arrow[r, "\Phi_X", "1-1 \text{ επί}"'] & h_W(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \ni h
\end{tikzcd}$$

$$\Phi_X\big(F(h)(\psi)\big) = h_W(h)(\underline{Id}) = h$$

$$F(X) = \{ F(h)\underline{\psi} : h \text{ διατρέχει του } h_W(X) \}$$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "Id"] & W \\
X \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

universal αντικείμενο. στο $F(W)$

<u>Moduli spaces</u>: Θα ήθελε να έχει representable συναρτητές

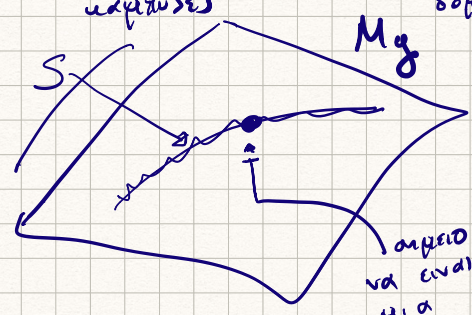
X είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο (πχ αλγεβρικές καμπύλες)

... των αλγεβρικών καμπυλών με βάση

ταξινόμηση των ... ένα affine Scheme S.

$$F\left(\text{καμπυλών}/S\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{σύνολο που}\\ \text{περιέχει κλάσεις}\\ \text{ισομορφισμών}\\ \text{από τέτοιες}\\ \text{καμπύλες}\end{array}\right)$$

$$F(S) = \underbrace{\mathrm{Hom}(S, M_g)}_{S\text{-σημείο}}$$



Λήμμα $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ contravariant

(W, φ) — αντικείμενο που αναπαριστά — ταυτότητα

είναι μοναδικά καθορισμένο μέχρι ισομορφισμού.

Αποδ. $\left[\begin{array}{l}(\tilde{W}, \tilde{\varphi})\\ (W, \varphi)\end{array}\right.$ αναπαριστούν και τα δύο τον F.

$\Phi : F \longrightarrow h_W \qquad \tilde{\Phi} : F \longrightarrow h_{\tilde{W}}$

$$\begin{array}{llll} \Phi_W & F(W) \longrightarrow h_W(W) & \tilde{\Phi}_{\tilde{W}} : & F(\tilde{W}) \longrightarrow h_{\tilde{W}}(\tilde{W}) \\ & \varphi \longrightarrow \Phi_W(\varphi) = \mathrm{Id}_W & & \tilde{\varphi} \longrightarrow \tilde{\Phi}_{\tilde{W}}(\tilde{\varphi}) = \mathrm{Id}_{\tilde{W}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & F(W) & \xrightarrow{\Phi_W} & h_W(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, W) & \\ \varphi & \longrightarrow & & \longrightarrow & \mathrm{Id} \\ \downarrow & \Big\downarrow F(h)\varphi & & & \\ \tilde{\varphi} \in \Phi_{\tilde{W}} : & F(\tilde{W}) & \underset{\Phi_{\tilde{W}}}{\xrightarrow{\sim}} & h_W(\tilde{W}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{W}, W) & \\ & \tilde{\varphi} & & & \end{array}$$

$$\eta = \Phi_{\tilde{W}}(\tilde{\varphi}) : \tilde{W} \longrightarrow W$$

$$\tilde{W} \xrightarrow{\ \eta\ } W$$

$$\tilde{\Phi}_W : F(W) \xrightarrow{\tilde{\Phi}_W} h_{\tilde{W}}(W) = \mathrm{Hom}_e(W, \tilde{W})$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{\Phi}_W(\psi) :$$

$$\tilde{\Phi}_W : F(W) \to h_{\tilde{W}}(W) = \mathrm{Hom}(W, \tilde{W})$$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\tilde{\eta}"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Id}_W"] & \tilde{W} \arrow[r, "\eta"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_{\tilde{W}}"'] & W \arrow[r, "\tilde{\eta}"] & \tilde{W}
\end{tikzcd}$$

$$\eta \circ \tilde{\eta} = \mathrm{Id}_W$$

$$\tilde{\eta} \circ \eta = \mathrm{Id}_{\tilde{W}}$$