Αλγεβρικη Γεωμετρία 20/4/2021

Σημεία X σχήμα $\underset{\text{σχήμα}}{S} \longrightarrow X$ θα λεγεται ενα S-σημειο. Απεικονισεις "$S \longrightarrow X$" θα τα βλέπουμε ως σημεία.

$S = \operatorname{Spec} R$ Τοτε ένας τετοιος μορφισμος θα λεγεται σημειο με τιμες στον δακτυλιο R.

Παραδειγμα

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ f_2(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_e(x_1,\dots,x_n) \end{array}\right. \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$$

$$A = \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n] \Big/ \underbrace{\langle f_1(x_1,\dots,x_n),\dots f_e(x_1,\dots,x_n)\rangle}_{I}$$

Δακτύλιος συντεταγμενων

k σωμα. Ενα k-valued point

$$\psi : \operatorname{Spec} k \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

$$\phi : A \longrightarrow k \qquad \psi = \varphi^a$$

$\varphi^a : \operatorname{Spec} k \to \operatorname{Spec} A$

$\underbrace{\mathfrak{p} \longrightarrow \phi^{-1}(\mathfrak{p})}$

$$A/m_\phi \cong k \qquad m_\phi = \ker \phi$$

μεγιστο. ιδεωδες του A

$$x_1,\dots,x_n \in \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$$

$$\underbrace{\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n} \in A = \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n] \big/ I$$

$k \ni a_j = \varphi(x_j)$ αφού ο φ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

$$\phi : f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$$

$$A = \frac{\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]}{\langle f_1, \dots \rangle}$$

$$f_i(\varphi(\bar{x}_1), \dots, \varphi(\bar{x}_n)) = 0$$

$$f_i(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = 0$$

$$\Phi : f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

το ανήκει στο αλγεβρικό σύνολο

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} A$$

$\mathbb{Z}$ ~σημείο

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$\ker\varphi$ = πρώτο ιδεώδες του A

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x_1) &= \alpha_1 \in \mathbb{Z} \\ \varphi(x_e) &= \alpha_e \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_e) \in \mathbb{Z}^n$$

είναι ένα $\mathbb{Z}$-σημείο του $V(f_1, \dots, f_e)$

$\mathbb{Z}$-σημεία: λύσεις διοφαντικών εξισώσεων.

$f(x,y)$ πολυώνυμο δύο μεταβ. $f(x,y) \in k[x,y]$

$$A = k[x,y] / \langle f(x,y) \rangle$$

$$R_n[t] = k[t] / \langle t^{n+1} \rangle$$

ο n-δακτύλιος απειροστών.

Δεν είναι ακ. περιοχή

Έχει nilpotents

$$R_0 = k \qquad k[t]/\langle t \rangle$$

$R_1 = k[t]/(t^2)$ first order infinitesimals

$R_2 = k[t]/(t^3)$ στον R_1 $t^2=0$

$\vdots$

$\dots$ $k[t]/\langle t^{n+1}\rangle$ „προσεγγίσεις Taylor μέχρι n"

$\varepsilon = t \bmod t^2$

$k[\varepsilon] = k[t]/(t^2)$ $\varepsilon^2 = 0$

„μικρές ποσότητες"

10^{-10} $\boxed{0,1\overset{10}{2}3456789}$

$0, \text{----} \quad ,1 \,|\, \text{———} \; 1$

$(10^{-10})^2 = 10^{-20}$

$A = k[x,y]/(f(x,y))$

$\operatorname{Spec} R_n \longrightarrow \operatorname{Spec} A$: $\varphi_n : A \longrightarrow R_n$

γεννήτορες $\underset{\sim}{\bar{x}, \bar{y}} \in A \longrightarrow$

$\varphi_n(\bar x) = g_n(t) \bmod t^{n+1}$

$\varphi_n(\bar y) = h_n(t) \bmod t^{n+1}$

Ο Μορφισμός φ_n καθορίζεται μοναδικά τα $\underline{g_n(t), h_n(t)}$

ικανοποιούν την εξίσωση

$f(g_n(t), h_n(t)) = 0$

$R/I \xrightarrow{\varphi} S$

$\varphi_n(f) = 0$

$\varphi(I) = 0$

$\varphi_n(f(\bar x, \bar y)) = f(\varphi_n(\bar x), \varphi_n(\bar y)) = 0$

$$\varphi_{n,n+1} : R_{n+1} \longrightarrow R_n$$

$$k[t]/\langle t^{n+2}\rangle \longrightarrow k[t]/\langle t^{n+1}\rangle$$

$$f(t) = a_0 + \alpha_1 t + \dots \alpha_{n+1} t^{n+1} \mod t^{n+2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \mod t^n$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n \mod t^{n+1}$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} R_{n+1} \arrow[dr, "\Phi_{n+1}"] & \\
\operatorname{Spec} R_n \arrow[u, "\Phi_{n,n+1}"] \arrow[r, "\Phi_n"'] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}$$

Καθε $\operatorname{Spec} R_{n+1}$ σημειο δινει ενα $\operatorname{Spec} R_n$ σημειο

$$\Phi_{n+1} \circ \Phi_{n,n+1} = \Phi_n$$

$$f(g_{n+1}(t), h_{n+1}(t)) = 0 \mod t^{n+1}$$

$$\downarrow \mod t^n$$

$$f(g_n(t), h_n(t)) = 0 \mod t^n$$

$$\operatorname{Spec} R_n \xrightarrow{\Phi_n} \operatorname{Spec} A$$

Δεδομενου ενος τετοιου σημειο

$\operatorname{Spec} R_{n+1}$ $\quad \Phi_{n+1}$

προσπαθούμε να επεκτείνουμε

Αν φτάσουμε να βρίσκουμε τέτοιες λύσεις βήμα βήμα

$$\Phi : A \longrightarrow k[[t]]$$

δακτύλιος των τυπικών δυναμοσειρών.

Newton

περιεγμένη μορφή

$$f(g(t), h(t)) = 0 \qquad g, h \in k[[t]]$$

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (\sin(t), \cos(t))$$

παραμετρική

λύση

$\sin(t)$, $\cos(t)$ $\in \mathbb{R}[[t]]$

Διοφαντικές Εξισώσεις

$$k[t]/\langle t^n \rangle \qquad \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

p πρώτος

Hensel

$$\frac{f(\alpha, \beta) \bmod p^n}{f(\alpha, \beta) \bmod p^{n+1}}$$

$$k[[t]] \qquad \mathbb{Z}_p$$

ο δακτύλιος των ακ. p-αδικών

Σημεία $\quad (X, \mathcal{O}_X)$

$$\lim_{\overrightarrow{U \ni x}} \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X,x}$$ τοπικός δακτύλιος στο x

$m_{..}$ μέγιστο ιδεώδες

$$k(x) = \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x$$

Οι „συναρτήσεις" σε περιοχές του X λαμβάνουν τιμές στο k(x)

Ένας μορφισμός $\underbrace{(\mathrm{Spec}\, k(x),\ k(x))}_{\text{affine scheme}} \longrightarrow \underbrace{(X, \mathcal{O}_X)}_{\text{Γενικό σχήμα.}}$

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "res"] \arrow[rr, bend right] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r] & k(x) \end{tikzcd}$$

Κάθε σημείο του X (με την „κλασική")

$x \in X$ $\quad x \in U = \mathrm{Spec}\, R$ ανοιχτό από την ανοιχτή κάλυψη του X

$\mathfrak{p}$ πρώτο ιδεώδες

$$\mathrm{Spec}\, k(x) \xrightarrow[\text{μορφισμός}]{} X$$

$(\mathrm{Spec}\, R,\ X\ )$ $\quad$ ~~Ree~~ $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow R$

Γενική έννοια σημείου η οποία περιέχει τα κλασικά σημεία

Εφαπτόμενα διανύσματα ως "σημεία"

$S \longrightarrow X$" $\quad$ X σχήμα $\quad$ σημείο.

"$X \longrightarrow S$ $\quad$ „βάση"

$\mathcal{C}/Z$ $\quad Z \in Ob(\mathcal{C})$ ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{C}/Z$

Αντικείμενα στην $\mathcal{C}/Z$ $\quad (X,p) \quad X \in Ob(\mathcal{C})$

$p : Hom_{\mathcal{C}}(X,Z)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \\ Z \end{tikzcd}$$

$h \in Hom_{\mathcal{C}/Z}\big((X,p),(Y,q)\big)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Covering spaces στην αλγεβρική τοπολογία

$p : X \to Z$

μορφισμός δομής Z βάση

$e \quad \mathcal{C}$ τελικό αντικείμενο $\quad Hom_{\mathcal{C}}(X,e)$ αποτελούνται από ακριβώς ένα στοιχείο.

e αρχικό αντικείμενο $\quad Hom_{\mathcal{C}}(e,X)$ αποτελούνται από ένα στοιχείο.

$\mathcal{C}_e \quad e$ τελικό αντικείμενο

$X \longrightarrow e$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & e & \end{tikzcd}$$

<u>Πρόταση</u> Στην κατηγορία των δακτυλίων $\mathbb{Z}$ είναι αρχικό αντικείμενο ενώ στην κατηγορία των σχημάτων το $Spec\,\mathbb{Z}$ είναι ένα τελικό αντικείμενο.

$R \in Ob(Rings) =$ Αντιμεταθετικοί δακτύλιοι με $\underline{\underline{1}}$.

$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \underline{R}$ f ομομορφισμος δακτυλιων.

$\underline{f(1_{\mathbb{Z}}) = 1_R}$

$$f(1_{\mathbb{Z}} \cdot 1_{\mathbb{Z}}) = f(1_{\mathbb{Z}})$$
$$f(1_{\mathbb{Z}}) \cdot f(1_{\mathbb{Z}})$$
$$0 = f(1_{\mathbb{Z}}) \cdot (f(1_{\mathbb{Z}}) - 1_R)$$

$$\mathrm{Hom}_{Ring}(\mathbb{Z}, R) = \{f\}.$$

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}})$$
$$\updownarrow 1\text{-}1$$
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$ ~ αντιμετ. και αυτος ειναι μοναδικος

$$Sch = Sch/_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \quad \left(= Sch/_{\mathbb{Z}}\right)$$

τελικο αντικειμενο της κατηγοριας

$$X \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$$

R αντιμεταθετικος δακτυλιος

$Sch/_R$ αντι $Sch/_{\mathrm{Spec}\,R}$

$\checkmark$ $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\,R$

R σώμα $Sch/_k$ Σχηματα $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\,k$ $\checkmark$

Καθε $\underbrace{\mathcal{O}_X(U)}$ $\longleftarrow k$

ειναι k- διανυσματικος χωρος

(πιθανοτατα άπειρης διαστασης

$$\mathcal{O}_{\cdot}(\mathbb{A}^1(k)) = k[x]$$

$\mathbb{A}^1(k)$

Παράδειγμα

$$y^2 + x^2 = t$$

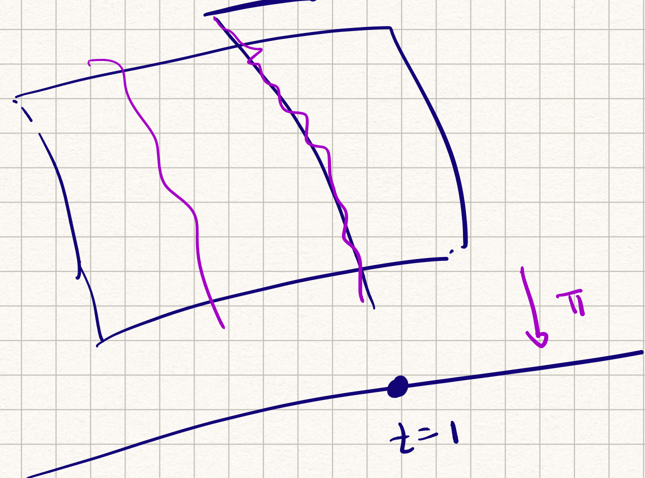
$$A = \frac{k[x,y,t]}{\langle y^2+x^2-t\rangle} \xleftarrow{\ i\ } k[t]$$

Ο δακτύλιος A είναι $k[t]$-άλγεβρα

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}\left(\dfrac{k[x,y,t]}{\langle y^2+x^2-t\rangle}\right) & \xrightarrow{\pi} & \operatorname{Spec} k[t] \\ \uparrow & \text{οικογένεια} & \uparrow \\ Z & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k \end{array} \qquad \begin{array}{c} k[t] \\ \downarrow \\ k \end{array}$$

Z ίνας

$t = 1$



$\mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[t]$

$$\pi^{-1}(1) = \frac{k[x,y]}{\langle x^2+y^2-1\rangle}$$

$S \longrightarrow X$ σημεία

$X \longrightarrow S$ ινώδεις χώροι (προβολές)

Εφαπτόμενος χώρος Zariski

$x \in (X, \mathcal{O}_X)$

$$\boxed{m_x / m_x^2}$$

είναι $k(x) = \mathcal{O}_{X,x} / m_x$

διανυσματικός χώρος

μέγιστο ιδεώδες

m_x είναι το μέγιστο ιδεώδες

$\mathcal{O}_{X,x}$ ~ δακτύλιος φύτρων συναρτήσεων στο x

m_x = συναρτήσεις που μηδενίζονται στο x

m_x^2 = τα γινόμενα δυο στοιχείων του m_x.

$\frac{m_x}{m_x^2}$ είναι ο συνεφαπτόμενος χώρος του X στο x

$$T_x X = \mathrm{Hom}_{k(x)}\left(\frac{m_x}{m_x^2}, k(x) \right)$$

$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$: Τελεστές (μερικές παράγωγοι) από τις διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$

m_x = f συναρτήσεις οι οποίες μηδενίζονται στο x

γραμμικό κομμάτι του Taylor

$$f(x) = \overset{0}{a_0} + \underbrace{a_1 x}_{\text{γραμμικών συναρτήσεων}} + \underbrace{x^2 + \dots}_{0}$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots a_n x_n$

Βάση του m_x / m_x^2

$x_1, \dots, x_n$

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ το δυϊκό στοιχείο της βάσης

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$$

Παρατηρηση Στις συνεχών συναρτησεων

$x \in m_x$ (και μηδενιζεται στο 0)

$\sqrt{x} \in m_x$

συνεχής όχι παραγωγίσιμη

$m_x / m_x^2 = 0$

$$T_x X = \mathrm{Hom}_{k(x)}\left(\frac{m_x}{m_x^2}, k(x) \right)$$

Υπαρχει μια 1-1 και επι αντιστοιχια ανάμεσα στους μορφισμους

$$\Phi = (\phi, \phi^{\#}) : \left(\mathrm{Spec}\, k[t]/\langle t^2 \rangle, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, k[t]/t^2}\right) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

στην κατηγορια των Sch/k

με τα εφαπτομενα διανύσματα πανω απο το k

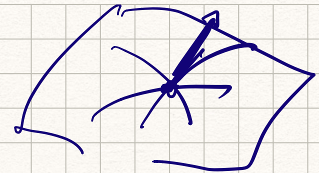
δηλαδη $\partial \in T_x X$.

Εφαπτομενα διανύσματα ειναι $\mathrm{Spec}\, k[t]/\langle t^2 \rangle$ -σημεια

$\mathrm{Spec}\, k \longrightarrow X$ γεωμετρικο σημειο

$\mathrm{Spec}\, k[t]/\langle t^2 \rangle \longrightarrow X$ και σημειο και εφαπτομενο διανυσμα

Ενας ορισμος εφαπτομενου χώρου στο P είναι το σύνολο των καμπυλων που περνανε απο P modulo μια σχεση ισοδυναμιας (να εχουν την ίδια κατευθυνση)



$\gamma'(0) = \gamma'(k)$

$\operatorname{Spec} k[t] \longrightarrow X$

$\boxed{\operatorname{Spec} k[t]/(t^2)} \xrightarrow{\ \phi\ } X$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k[t]/(t^2) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr] & X \arrow[d, "p"] \\
& \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

$X \in Sch/k$

$X \longrightarrow \operatorname{Spec} k$

Δομής: επιβάλει

$\mathcal{O}_X(U)$ είναι k διανυσματικοί χώροι

Υποκείμενος χώρος του $\operatorname{Spec} k[t]/t^2$ είναι είναι ενα σημείο

x είναι η εικόνα αυτού του σημείου.

$k[t]/(t^2) \longrightarrow$

$V(t^2) = V(t)$

$$\begin{tikzcd}
k[t]/\langle t^2\rangle & & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[ll, "\phi_x^\#"'] \\
& k \arrow[ul] \arrow[ur, "p_x^\#"']
\end{tikzcd}$$

$a_0 + a_1 t \mapsto a_0 \in k.$

$K = \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ είναι σώμα

Σώμα που περιέχει το k.

$\mathcal{O}_{X,x}/m_x \overset{?}{=} k$

K

$\alpha \in K \setminus k$

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

$0 = f(\alpha)$

$0 = \phi_x^\#(f(\alpha)) = \sum^{n} a_i \left(\phi_x^\#(\alpha)\right)^i \longrightarrow$ είναι ρίζα του

$i=0$

$f \quad \sigma_0 \quad k$

$\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = \underline{k}$

ϕ^*