

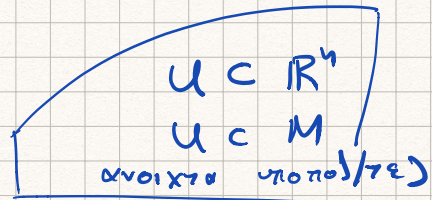
Άλγεβρική Γεωμετρία 15 Απριλίου 2021

U ανοιχτό υποσύνολο του (X, \mathcal{O}_X) \Leftarrow σχήμα

$(U, \mathcal{O}_{X|U})$ περιορισμός του sheaf \mathcal{O}_X στο U
 \forall ανοιχτό του U $\Rightarrow \forall$ ανοιχτό του X

$$\mathcal{O}_{X|U}(V) = \mathcal{O}_X(V).$$

Ανοιχτό υποσχήμα του X .



$$(g, g^\#) : (Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

$$g : Z \rightarrow X$$

συνεχής συνάρτηση των ποικιλιών
 τοπολογικών χώρων.

τοπολογία
 εμμερσο

$$Z \cong U \subset X$$

ανοιχτό υποσύνολο.

$$g(Z) = U, \text{ υπάρχει } g^{-1} : U \rightarrow Z \text{ συνεχής}$$

$$g^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow g_* \mathcal{O}_Z$$

Εχουμε ορίσει μορφισμούς sheaves συν ίδια βάση στο ίδιο τοπολογικό χώρο

$g_* \mathcal{O}_Z$ είναι το push forward του \mathcal{O}_Z συν ένα sheaf πάνω στο X

Απαιτούμε το

$$g^\# : \mathcal{O}_X|_U \xrightarrow{\cong} g_* \mathcal{O}_Z|_U$$

να είναι ισομορφισμός.

$$g_* \mathcal{O}_Z(V) = \mathcal{O}_Z(g^{-1}(V))$$

↑ ανοιχτό του X ↑ ανοιχτό του Z

ΑΝΟΙΧΤΗ IMMERSION.

$$(i, i^\#) : Y \rightarrow X$$

$i(Y)$ μέγιστος υποχώρος του X

$$i^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y$$

να είναι επιμορφισμός

(Y, i) υψιστο υποσχημα.

$$f: W \rightarrow X$$

$$\partial: W \xrightarrow{\cong} Y$$

το οποίο Y
να είναι υψιστο
υποσχημα.

$f = i \circ \partial$
ΚΛΕΙΣΤΗ IMMERSION

Παράδειγμα

$$a \triangleleft R$$

$$V(a) \subset X = \text{Spec } R$$

υψιστο
υποσχημα.

$$V(a) = \{ P \in \text{Spec } R : a \subset P \} \cong \text{Spec } R/a$$

Τα ιδεώδη του R/a είναι $\begin{matrix} \xrightarrow{\text{ιδεώδη}} \\ \text{επί} \end{matrix} P \triangleleft R$ ώστε $a \subset P$

υψιστο
υποσχημα

$$\begin{matrix} \triangle \\ P+a \triangleleft \text{---} P \end{matrix}$$

$$\underbrace{V(I)}_{\text{υψιστο Spec } R/a} = \bigvee_{a \subset P} \{ R+a \mid I \subset P+a \}$$

$$\text{Spec } R \quad V(a)$$

$$\boxed{R \xrightarrow{\pi} R/a} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{οι} \\ \text{φασεολογικες} \\ \text{συναρτησεις} \\ \text{ειναι επι} \end{array} \right.$$

$$Y = \text{Spec } R/a \longrightarrow \text{Spec } R = X$$

$$\underline{P} = P+a \longrightarrow \pi^{-1}(P) = P \supset a$$

$$Y \xrightarrow{\text{σφαιρομορφισμος}} V(a) \subset X$$

$$\mathcal{O}_{X,P} = R_P \xrightarrow{\text{επιμορφισμος}} (f_* \mathcal{O}_Y)_P = \underline{(R/a)_P}$$

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{R} \xrightarrow{\text{επι.}} \overline{R/a}$$

Παρατήρηση

Ενα υψιστο υποσχημα ενός σχήματος
δεν περιλαμβάνει την δομή του σχήματος.

Πολλές διαφορετικές δομές αλγεbras στο ίδιο κλειστό
 $V(a) = V(b)$ είναι ίδια κλειστά υποσύνολα του $\text{Spec } R$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

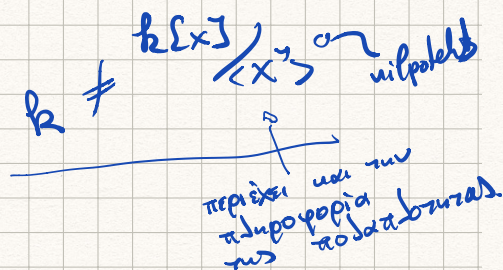
$$k[x] \xrightarrow{\pi} k[x]/\langle x^n \rangle \quad n=1,2,\dots$$

$$\text{Spec } k[x]/\langle x^n \rangle \rightarrow \text{Spec } k[x] \cong A^1$$

$$V(x^n) = V(x) \quad \text{ένα μοναδικό κλειστό σημείο}$$

Σε επίπεδο τοπολογικών χώρων έχουμε ταύτιση.

Τα Speakers είναι διαφορετικά



Κατηγορίες και Σχήματα

Κατηγορία $\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C})$ καθορισμένων αντικειμένων

$$\mathcal{C} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \quad A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

$\overset{\text{όπως}}{\underset{\text{απλ}}{\rightarrow}}$ g θα λεγεται μορφισμός $A \rightarrow B$

$$A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad f \in \text{Hom}(A, B) \quad g \in \text{Hom}(B, C) \quad g \circ f \in \text{Hom}(A, C)$$

$$A, B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$

$$f \in \text{Hom}(A, B)$$

$$g \in \text{Hom}(B, C)$$

$$h \in \text{Hom}(C, D)$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

$$A \in \text{Ob}(C) \quad \text{Id}_A \in \text{Hom}(A, A)$$

$$f \circ \text{Id}_A = f \quad \text{Id}_B \circ f = f$$

$$f \in \text{Hom}_C(A, B)$$

Παραδείγματα

$C = \text{Set}$ κατηγορία των συνόλων
 $\text{Ob}(\text{Set})$ τα σύνολα
 $\text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)$ οι (συνολοθεωρητικές) συναρτήσεις $A \rightarrow B$

$C = {}_R\Delta.X$ $\text{Ob}({}_R\Delta.X) =$ τους R -δισυμμετρικούς χώρους
 A, B δισυμ. χώροι
 $\text{Hom}(A, B)$ είναι γραμμικές συναρτήσεις.

R δακτύλιος $R\text{-mod}$ $\text{Ob}(R\text{-mod}) = R\text{-modules}$
 $\text{Hom}(A, B)$ R -module ομομορφισμοί.

Κατηγορία των τοπολογικών χώρων αντιστοιχούν τους τοπολογικούς χώρους
 Hom συναρτήσεις: $A \rightarrow B$
 σχέσεις συναρτήσεων

Κάθε μαθηματική θεωρία \rightarrow Αντιστοιχούν \rightarrow φυσιογνωστικές συναρτήσεις ανάμεσα τους.

Πολλοί συχνά ένα αντιστοιχένον ανήκει σε διάφορες κατηγορίες

$R\text{-module}$ M - ανήκει $R\text{-mod}$
 -// (αν κατηγορία των αβελιανών ομάδων)
 -// (κατηγορία των συνόλων)

$$\text{Hom}_{R\text{-mod}}(A, B) \not\subseteq \text{Hom}_{\text{Ab-grp}}(A, B) \not\subseteq \text{Hom}_{\text{Set}}(A, B)$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

Μπορεί να μην ισχύει

$$f(va) = v f(a)$$

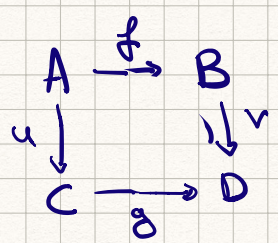
f // (A, B) \rightarrow δίνεται : ομομορφισμοί

$f: \text{Hom}_e(A, B)$ on \dots

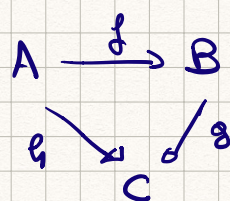
ω υπάρχει $g \in \text{Hom}_e(B, A)$

$$f \circ g = \text{Id}_B$$

$$g \circ f = \text{Id}_A$$



$$v \circ f = g \circ u$$



$$g \circ f = h$$

Θέωρα Κατηγοριών:

~~Abstract nonsense~~

φυσιοδοξία
για την
Αλγεβρα
Γεωμετρία

Συναρτησι (Functor)

\mathcal{C}, \mathcal{D} δυο κατηγορίες

$$F: \text{Ob}_{\mathcal{C}}(F) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$$

$$A \longrightarrow F(A)$$

$$F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$$

covariant
συναρτησι

contravariant
συναρτησι

Αν έχουμε

\mathcal{C} κατηγορία

δύο αντικείμενα e^0

e^0

$$\text{Ob}(e^0) = \text{Ob}(e)$$

$$\text{Hom}_{e^0}(X, X) = \text{Hom}_e(X, X)$$

$$e \rightarrow \mathcal{D}$$

$$e^0 \rightarrow \mathcal{D}$$

$$\text{Id}_e : e \rightarrow e$$

$$\text{Id}_e(x) = x$$

$$\text{Id}_e(f) = f$$

Συνθεση συναρτησεων.

$$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \quad G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$X \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \quad f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

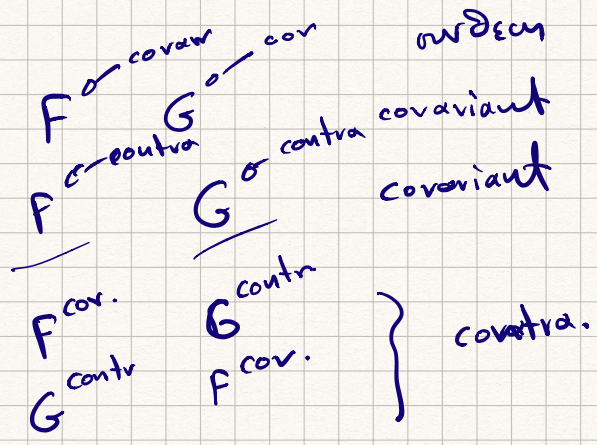
$$G \circ F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$X \rightarrow (G \circ F) X = \underbrace{G}_{\text{αντιστρεφω } \mathcal{D}} (\underbrace{F(X)}_{\text{αντι. } \mathcal{D}})$$

$$G \circ F(f) = G(F(f)) \quad f: A \rightarrow B$$

$$F: \mathcal{C}(A) \rightarrow \mathcal{C}(B)$$

$$GF: GF(A) \rightarrow GF(B)$$



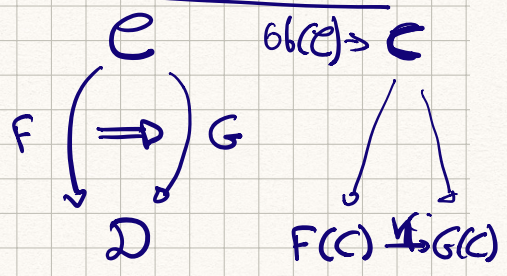
$$F \circ \text{Id}_{\mathcal{C}} = F$$

$$\text{Id}_{\mathcal{D}} \circ F = F$$

Μορφισμο μεταφο συναρτησεων
 Natural transformation:
 Ομομορφισμο συναρτησεων

$$\eta(C): F(C) \rightarrow G(C)$$

$$\forall C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$$



$$\begin{array}{ccc}
 F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\
 \eta(C) \downarrow & & \downarrow \eta(C') \\
 G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C')
 \end{array}
 \quad f: C \rightarrow C'$$

Εχουμε μια $\eta(C)$ για καθε $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
 να ομαλοποιε η . (Αλλαξη το διαγραμμη
 κρητων να ειναι
 ανιμεταθετικο)

Αν $\eta(C)$ ειναι ισομορφια για καθε $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

τοτε θα λεμε οτι οι συναρτησε F, G
 ειναι ισομορφιοι

$$F \xrightarrow[\cong]{\eta} G$$

Ισοδωρων ιατηρια

$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ υπαρχει $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$

$$G \circ F \cong \text{Id}_{\mathcal{C}} \quad F \circ G \cong \text{Id}_{\mathcal{D}}$$

τοτε οι ιατηριασε θα λεγοναι ισοδωρες (covariant)

Προσχη: Απαιτουσε $G \circ F$ ειναι ισομορφο με το $\text{Id}_{\mathcal{C}}$
 $F \circ G$ || $\text{Id}_{\mathcal{D}}$

και Απαιτουσε ισομορφια συναρτηων και οχι
ταυτιση

Αν F (και G) ειναν contravariant οι ιατηριασε
 θα λεγοναι αν-ισοδωρες.

Θεωρημα Θεωρουσε τον contravariant συναρτητη
 απο την ιατηρια των ανιμεταθετων δατυλων
 στην ιατηρια των αφινικων σχηματων που δινεται
 ως.

Affine scheme

Object Ring $\mathbb{R} \longrightarrow F(\mathbb{R}) = (\text{Spec } \mathbb{R}, \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{R}})$

$\phi: S \rightarrow \mathbb{R}$
 μορφισμος αφιν.
 δατυλων

$F(\phi): \phi^\alpha: \text{Spec } \mathbb{R} \longrightarrow \text{Spec } S$
 $p \longrightarrow \phi^{-1}(p)$

F contravariant

Αποσ Χρειατογινε ενα contravariant συναρτητη

$$G: \text{Affine-Schemes} \longrightarrow \text{Rings}$$

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

↑ sheaf
συναρτησών.

↓ Διαιρέσιμος
πινάκας από ολο τον
χώρο.

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

$$(f, \vartheta) \longmapsto G(f, \vartheta) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(Y, \vartheta_* \mathcal{O}_X)$$

||
Γ(X, O_X)

$$f: X \longrightarrow Y$$

$$\vartheta: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \vartheta_* \mathcal{O}_X$$

Η ϑ για κάθε ανοιχτό U του Y

$$\vartheta: \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \vartheta_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$$

$U = Y \quad f^{-1}(Y) = X$

$$G(\underline{F(R)}) = \Gamma(\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R}) = R$$

$$\Phi: R \longrightarrow S$$

$$G(F(\Phi)): \Gamma(\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R}) = R \longrightarrow S = \Gamma(\text{Spec } S, \mathcal{O}_{\text{Spec } S})$$

Τελειώνεται με την Φ .

$$\Phi^*: \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \longrightarrow \Phi_*^* \mathcal{O}_{\text{Spec } S}$$

$$G \circ F = \text{Id}_{(\text{Ring})}$$

$F \circ G:$

Θεωρούμε ένα μορφισμό $(f, \vartheta): (Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R})$

$$\vartheta: \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \longrightarrow \vartheta_* \mathcal{O}_Z$$

μορφισμός
sheaves

επιλέγει μορφισμό δοκτύπων (Αντίστροφα να πάρω το μεταλλίστερο...)

κρίσιμο
ιδανίδια του
τοπικού δακτύλιου
 R_P

$$\mathfrak{D}_P^{-1}(m_z) = \mathfrak{P} R_P$$

α. ψ. $\psi^{-1}(\mathfrak{P} R_P) = \mathfrak{P}$

$$\Phi_z^{-1}(m) = \mathfrak{P}$$

$$\Phi: R \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$$

$$f(z) = \mathfrak{P} = \Phi_z^{-1}(z) \quad z \in Z$$

$\Phi: R \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ περιγράφει το \mathfrak{P} .

Έστω $(f, \mathfrak{D}) \in \text{Hom}_{\text{Sch}}(Z, \text{Spec } R) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{Ring}}(R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z))$
 $(f, \mathfrak{D}) \longmapsto \Phi: R \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$
 $\Gamma(\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R}) \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$

Αντιστροφή: $\text{Hom}_{\text{Ring}}(R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Sch}}(Z, \text{Spec } R)$

$$\psi: R \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\nu_Z} \mathcal{O}_{Z, z} \xrightarrow{\cong} \varinjlim_{U \ni z} \mathcal{O}_U(0)$$

δακτύλιος των κλάσεων στο z .

$$m_z \triangleleft \mathcal{O}_{Z, z}$$

$\psi^{-1} \nu_Z^{-1}(m_z)$ είναι πρώτο ιδανίδιο του R

$$f: Z \rightarrow \text{Spec } R$$

$$z \longmapsto \psi_z^{-1}(m_z)$$

$$\psi_z = \psi \circ \nu_z.$$

1) Η f είναι συνεχής.

$$X = \text{Spec } R$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για $g \in R$

$$X_g = \{ \mathfrak{P} \in \text{Spec } R : g \notin \mathfrak{P} \}$$

$$f^{-1}(X_g) \xrightarrow{\text{ανοιχτό.}}$$

$$X_g = D(g)$$

$$f^{-1}(X_g) = \{ z \in Z : \nu_z \psi(g) \notin m_z \}$$

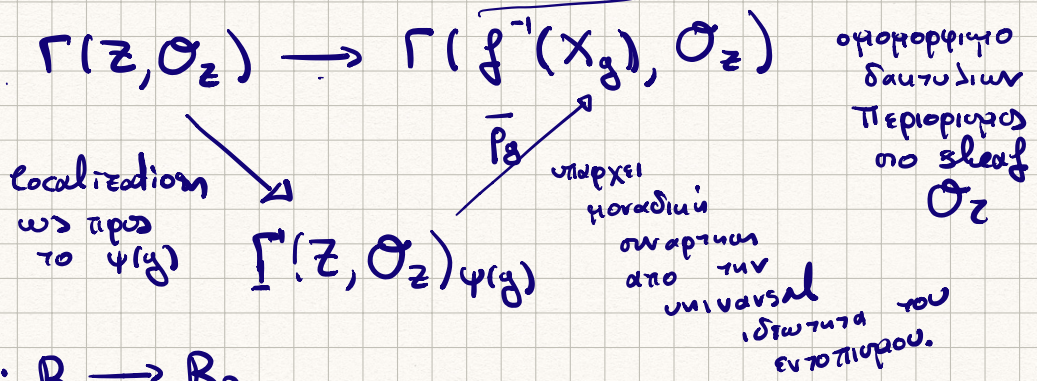
$$= \{z \in Z: \nu_z \psi(g) \text{ είναι αντιστρέψιμο στο } \mathcal{O}_{Z,z}\}$$

τοπικός δακτύλιος

$$= \{z \in Z: \psi(g)(z) \neq 0\}$$

ανοιχτό σύνολο.

$$\mathcal{O}_{Z,z} \setminus \mathfrak{m}_z = \mathcal{F}(\mathcal{O}_{Z,z})$$



$$\psi: R \rightarrow R_f$$

$$\psi_g: R_g \rightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_{\psi(g)}$$

$$\mathcal{D}_g = \bar{p}_g \circ \psi_g: R_g \rightarrow \Gamma(f^{-1}(X_g), \mathcal{O}_Z)$$

Για ανοιχτά X_g , ορίζουμε τον μορφοισμό των sheaves. $f^{-1}(X_g)$ είναι X_g βάσει της τοπολογίας

$$\mathcal{D}_g: \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \rightarrow \mathcal{O}_Z$$

$$(f, \mathcal{D}): (Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (\text{Spec } R, \mathcal{O}_{\text{Spec } R})$$

$$\text{Hom}_{(\text{Sch})} (Z, \text{Spec } R) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{Ring}} (R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z))$$

Η δύο αυτές κατηγορίες είναι η μία αντιστροφή της άλλης.

$$F \circ G = \text{Id}_{\text{Aff. Sch.}}$$

$$\begin{array}{c}
 \underline{G(f, \vartheta)} : \Gamma(X, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \\
 \text{μορφο xffine} \\
 \text{σχημάτων} \\
 : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \\
 \downarrow G \\
 \Gamma(X, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \\
 \downarrow F \\
 R \rightarrow S
 \end{array}$$

Παράδειγμα X τοπολογικός χώρος
 $\text{Top}(X)$ $\text{Ob}(\text{Top}(X))$ είναι ανοιχτά σύνολα

$$U, V \in \text{Ob}(\text{Top}(X))$$

$$\text{Hom}(U, V) = \begin{cases} i_{V,U} : U \hookrightarrow V & U \subset V \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Scheaf α βελτιώνων ομάδων $G : \text{Top}(X) \rightarrow \text{Mod}_Z$

$$U \in \text{Ob}(\text{Top}(X)) \rightarrow G(U) \in \text{Mod}_Z$$

$$f_{V,U} : G(i_{V,U}) : G(V) \rightarrow G(U)$$

Μορφοσ μεταφυσ sheaves G_1, G_2 είναι έναν natural transformation μεταφυσ ομάδων

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{G_1(U)} & \xrightarrow{\text{res}} & \underbrace{G_1(V)} \\
 \downarrow f & & \downarrow f \\
 \underbrace{G_2(U)} & \xrightarrow{\text{res}} & \underbrace{G_2(V)}
 \end{array}$$

$V \supset U$
μορφοσ ομάδων