Αλγεβρικη Γεωμετρία 15 Απριλιου 2021

U ανοιχτο υποσύνολο του $(X, \mathcal{O}_X)$ ← σχημα
$\subset X$

$\underline{(U, \mathcal{O}_X|_U)}$ περιορισμος του sheaf $\mathcal{O}_X$ στο U

V ανοιχτο του U ανοιχτο του X $\Rightarrow$ V ανοιχτο του X.

$\mathcal{O}_X|_U(V) = \mathcal{O}_X(V)$.

Ανοιχτο υποσχήμα του X.

$U \subset \mathbb{R}^n$
$U \subset M$
ανοιχτα υποπολ/τες

$(g, g^\#) : (Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$

$\underline{g : Z \longrightarrow X}$ συνεχης συνάρτηση των υποκείμενων τοπολογικών χώρων.

τοπολογικο επιπεδο: $\to Z \underset{\text{ομοιομορφισμο}}{\cong} U \subset X$ ανοιχτο υποσυνολο.

$g(Z) = U$, υπαρχει $g^{-1} : U \longrightarrow Z$ συνεχης

$g^\# : \mathcal{O}_X \longrightarrow g_* \mathcal{O}_Z$

Εχουμε ορισει μορφισμους sheaves στην ίδια βαση στο ίδιο τοπολογικο χωρο

$g_* \mathcal{O}_Z$ είναι το push forward του $\mathcal{O}_Z$ σαν ενα sheaf πανω στο X

Απαιτουμε το

$g^\# : \underline{\mathcal{O}_X|_U \xrightarrow{\cong} g_* \mathcal{O}_Z|_U}$

να είναι ισομορφισμος.

$g_* \mathcal{O}_Z(V) = \mathcal{O}_Z(g^{-1}(V))$

V: ανοιχτο του X — $g^{-1}(V)$: ανοιχτο του Z

$\boxed{\text{ΑΝΟΙΧΤΗ IMMERSION.}}$

$(i, i^\#) : Y \longrightarrow X$ $\qquad i(Y)$ κλειστος υποχωρος του X

$i^\# : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_* \mathcal{O}_Y$ να είναι $\underline{\text{επιμορφισμος}}$

(Y, i) κλειστό υπόσχημα.

$f : W \to X$ $\qquad$ $\partial : W \xrightarrow{\cong} Y$ το οποίο Y να είναι κλειστό υπόσχημα.

$f = i \circ \partial$

ΚΛΕΙΣΤΗ IMMERSION

Παράδειγμα $\quad a \triangleleft R \qquad \underbrace{V(a)}_{\text{κλειστό σύνολο.}} \subset X = \operatorname{Spec} R$

$$V(\alpha) = \{ p \in \operatorname{Spec} R : \alpha \subset p \} \cong \operatorname{Spec} R/a$$

Τα ιδεώδη του R/a είναι $\xleftrightarrow[\text{επί}]{1-1}$ ιδεώδη $p \triangleleft R$ ώστε $\alpha \subset p$

$\triangleright$

$p + a \longleftarrow p$

κλειστό υποσύνολο

κλειστό $\operatorname{Spec} R/\alpha$ $\qquad \bar{V}(I) = \{ p + a \quad I \subset p + a \}_{a \subset p}$

$\operatorname{Spec} R \qquad V(a)$

$$\boxed{R \xrightarrow{\pi} R/a}$$

οι φυσιολογικοί συναρτήσεις είναι επί

$Y = \operatorname{Spec} R/\alpha \longrightarrow \operatorname{Spec} R = X$

$\bar{p} = p + a \longrightarrow \pi^{-1}(\bar{p}) = p \supset a$

$Y \xrightarrow{\text{ομοιομορφισμός}} V(\alpha) \subset X$

$\mathcal{O}_{X,p} = R_p \xrightarrow[\text{επιμορφισμός}]{} (f_* \mathcal{O}_Y)_p = \underline{(R/\alpha)_p}$

$R \xrightarrow[\text{επί}]{} R/a$

Παρατήρηση $\quad$ Ένα κλειστό υποσύνολο ενός σχήματος δεν περιγράφει την δομή του σχήματος.

Πολλές διαφορετικές δομές σχήματος στο ίδιο κλειστό

$V(\alpha) = V(b)$ είναι ίδια κλειστά υποσύνολα του $\operatorname{Spec} R$

$\sqrt{\alpha} = \sqrt{b}$

$k[x] \xrightarrow{\pi} k[x]/\langle x^n \rangle \qquad n = 1, 2, \ldots$

$\operatorname{Spec} k[x]/\langle x^n \rangle \longrightarrow \operatorname{Spec} k[x] \cong \mathbb{A}^1$

$V(x^n) = V(x)$ ένα μοναδικό κλειστό σημείο

Σε επίπεδο τοπολογικών χώρων έχουμε ταύτιση.

Τα sheaves είναι διαφορετικά

$k \neq k[x]/\langle x^n \rangle \supset$ nilpotents

περιέχει και την πληροφορία της πολλαπλότητας.

Κατηγορίες και Σχήματα

Κατηγορία $\mathcal{C}$ $\rightarrow$ $Ob(\mathcal{C})$ καθορισμένων αντικειμένων

$\rightarrow$ $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \qquad A, B \in Ob(\mathcal{C})$

σύνολο ή όχι

$g \in$ θα λέγεται μορφισμός $A \to B$

$A, B, C \in Ob(\mathcal{C}) \qquad f \in \operatorname{Hom}(A, B)$

$g \in \operatorname{Hom}(B, C) \qquad g \circ f \in \operatorname{Hom}(A, C)$

$A, B, C, D \in Ob(\mathcal{C})$

$f \in \operatorname{Hom}(A, B)$

$g \in \operatorname{Hom}(B, C)$

$h \in \operatorname{Hom}(C, D)$

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$

$A \in Ob(\mathcal{C})$ $\quad Id_A \in Hom(A,A)$

$f \circ Id_A = f \quad Id_B \circ f = f$

$f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$

Παραδείγματα $\mathcal{C} = Set$ κατηγορία των συνόλων

$Ob(Set)$ τα σύνολα

$Hom_{set}(A,B)$ οι (συνολοθεωρητικές) συναρτήσεις $A \to B$

$\mathcal{C} = {}_k\Delta.X$ $\quad Ob({}_k\Delta X) =$ τους k. διανυσματικός χώρος

A, B διαν. χώρος

$Hom(A,B)$ είναι γραμμικές συναρτήσεις.

R δακτύλιος $\quad R\text{-mod} \quad Ob(R\text{-mod}) = R$-modules

$Hom(A,B)$ R-module ομομορφισμοί.

Κατηγορία των τοπολογικών χώρων αντικείμενα τους τοπολ. χώρους

συναρτήσεις: $A \to B$ συνεχείς συναρτήσεις

Κάθε μαθηματική θεωρία → Αντικείμενα της
→ φυσιολογικές συναρτήσεις ανάμεσα τους.

Πολύ συχνά ένα αντικείμενο ανήκει σε διάφορες κατηγορίες

R-module M - ανήκει R-mod

-//- (στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων)

-//- (κατηγορία των συνόλων)

$$Hom_{R\text{-mod}}(A,B) \subsetneq \underline{Hom_{Ab\text{-}grp}(A,B)} \subsetneq Hom_{set}(A,B)$$

$f: A \to B$

$f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)$

Μπορεί να μην ισχύει

$f(r\alpha) = r f(\alpha)$

$f: Hom(A,B)$ θα λέγεται ισομορφισμός

$f: Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ θα λέγεται ισομορφισμός

αν υπάρχει $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ $\quad f \circ g = Id_B$

$g \circ f = Id_A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

$$v \circ f = g \circ u$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$$g \circ f = h.$$

Θεωρία Κατηγοριών: Abstract ~~nonsense~~ → φυσιολογική γλώσσα για την Αλγεβρική γεωμετρία

Συναρτητής (Functor)

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ δυο κατηγορίες

$$F: Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{D}).$$

$$A \longrightarrow F(A)$$

$$F: Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$ covariant συναλλοίωτος

$$Hom_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$$ contravariant αντιαλλοίωτος

Αν έχουμε

$\mathcal{C}$ κατηγορία $\quad$ δυϊκή κατηγορία $\mathcal{C}^{o}$

$$Ob(\mathcal{C}^{o}) = Ob(\mathcal{C})$$

$$Hom_{\mathcal{C}^{o}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X).$$

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\mathcal{C}^{o} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$Id_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \qquad Id_{\mathcal{C}}(X) = X$$

$$Id_{\mathcal{C}}(f) = f$$

Σύνθεση συναρτητών.

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D} \qquad G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$X \in Ob(\mathcal{C}) \qquad f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$$

$$G \circ F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$X \longrightarrow (G \circ F)\, X = \overbrace{G(\underbrace{F(X)}_{\text{αντικ. της } \mathcal{D}})}^{\text{αντικείμενο της } \mathcal{E}}$$

$$G \circ F(f) = G(F(f))$$

$f : A \longrightarrow B$

$F : F(A) \longrightarrow F(B)$

$GF : GF(A) \longrightarrow GF(B)$

σύνθεση

$F^{covar} \circ G^{cov}$ covariant

$F^{contra} \circ G^{contra}$ covariant

$$\left.\begin{array}{ll} F^{cov.} & G^{contr} \\ G^{contr} & F^{cov.} \end{array}\right\} \text{contra.}$$

$$F \circ Id_{\mathcal{C}} = F$$

$$Id_{\mathcal{D}} \circ F = F.$$

Μορφισμός μεταξύ συναρτητών

Natural transformation.

Οικογένεια συναρτήσεων

$$\eta(C) : F(C) \longrightarrow G(C)$$

$$\forall \quad C \in Ob(\mathcal{C})$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, bend right, "F"'] \arrow[d, bend left, "G"] \arrow[d, phantom, "\Rightarrow"] \\ \mathcal{D} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Ob(\mathcal{C}) \ni C \arrow[dl] \arrow[d] \\ F(C) \arrow[r, "\eta"] & G(C) \end{tikzcd}$$

$f : C \xrightarrow[\mathcal{C}]{} C'$

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta(C)"'] & F(C') \arrow[d, "\eta(C')"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C') \end{tikzcd}$$

έχουμε μια $\eta(C)$ για κάθε $C \in Ob(\mathcal{C})$ να συμβαίνει η. (Δηλαδή το διάγραμμα παραπάνω να είναι αντιμεταθετικό)

Αν $\eta(C)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $C \in Ob(\mathcal{C})$ τότε θα λέμε ότι οι συναρτητές F, G είναι ισόμορφοι $F \xrightarrow[\cong]{\eta} G$

__Ισοδυναμίων κατηγοριών__

$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ υπάρχει $G: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$

$$G \circ F \cong Id_{\mathcal{C}} \qquad F \circ G \cong Id_{\mathcal{D}}$$

Τότε οι κατηγορίες θα λέγονται ισοδύναμες (covariant)

__Προσοχή__: Απαιτούμε $G \circ F$ είναι ισόμορφο με το $Id_{\mathcal{C}}$
$F \circ G$ — // — $Id_{\mathcal{D}}$

και Απαιτούμε ισομορφία συναρτητών και όχι __ταύτιση__

Αν F (και G) ήταν contravariant οι κατηγορίες θα λέγονται αντ-ισοδύναμες.

__Θεώρημα__ Θεωρούμε τον contravariant συναρτητή από την κατηγορία των αντιμεταθετικών δακτυλίων στην κατηγορία των αφινικών σχημάτων που δίνεται ως.

__Object__ Ring $R \longrightarrow$ Affine scheme $F(R) = (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$

$\phi: S \longrightarrow R$ μορφισμός αντιμ. δακτυλίων $\quad F(\phi): \phi^{a}: \operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} S$
$\qquad \mathfrak{p} \longrightarrow \phi^{-1}(\mathfrak{p})$

$\boxed{F \text{ contravariant}}$

__Αποδ__ Χρειαζόμαστε ένα contravariant συναρτητή

$$G: \text{Affine-Schemes} \longrightarrow \text{Rings}$$

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \underbrace{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)}$$

sheaf συναρτήσεων.

Δακτύλιος πάνω από όλο τον χώρο.

$$(\underline{X}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\underline{Y}, \mathcal{O}_Y)$$

$$(f, \vartheta) \longmapsto G(f,\vartheta) : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(Y, f_* \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

$f: X \longrightarrow Y$

$\underline{\vartheta}: \mathcal{O}_Y \longrightarrow \underline{f_* \mathcal{O}_X}$.

Η ϑ για κάθε ανοιχτό $\mathcal{U}$ του Y

$$\vartheta : \underline{\mathcal{O}_Y(\mathcal{U})} \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X(\mathcal{U}) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(\mathcal{U})).$$

$$\mathcal{U} = Y \qquad f^{-1}(Y) = X$$

$$G(\underline{F}(R)) = \Gamma(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) = R$$

$\phi: R \longrightarrow S$

$G(F(\phi)) : \Gamma(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) = R \longrightarrow S = \Gamma(\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S})$

ταυτίζεται με την ϕ.

$$\phi^{\#}: \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \longrightarrow \phi^{\alpha}_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}.$$

$$G \circ F = Id_{(Ring)}$$

$F \circ G$:

Θεωρούμε ένα μορφισμό $(f, \vartheta): (Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$

$$\vartheta: \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \longrightarrow f_* \mathcal{O}_Z$$

μορφισμός sheaves

επάγει μορφισμό δακτυλίων (Διαλέγω να πάρω το μεγαλύτερο ...)

ανοιχτο Spec R

$$\Phi: R = \Gamma(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) \longrightarrow \Gamma(\operatorname{Spec} R, f_*\mathcal{O}_Z) \cong \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$$

$$Z = f^{-1}(\operatorname{Spec} R)$$

Για καθε $z \in Z$ εχουμε την κανονικη συναρτηση

$$\nu_z : \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{O}_{Z,z}}_{\text{local ring στο } z} \quad \underline{\text{εντοπισμος}}$$

<u>Προταση</u> Για ενα μορφισμο

$$(f,\vartheta) : (Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$$

$$f(z) = \Phi_z^{-1}(m_z) \qquad z \in Z$$

m_z ειναι το μεγιστο ιδεωδες του $\mathcal{O}_{Z,z}$

$$\Phi_z = \nu_z \circ \Phi.$$

$$\operatorname{Hom}_{Sch}(Z, \operatorname{Spec} R) \cong \operatorname{Hom}_{Ring}(R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z))$$

(f,ϑ) δακτυλιος   δακτυλιος

$$Z \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} R$$

Ομομορφισμο στα Sheaves

$$\vartheta : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \longrightarrow f_* \mathcal{O}_Z \qquad \text{μορφισμος απο sheaves}$$

$$\vartheta_p : R_p = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R, p} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,z} \qquad z \in Z, \; p = f(z).$$

ειναι τοπικος ομομορφισμος (το έχουμε ζητησει εξ ορισμου στην κατηγορια των τοπικ δακτυλιοχώρων.)

$$\vartheta_p(pR_p) \subset m_z \quad \text{(ορισμος μορφισμου).}$$

μέγιστο
ιδεώδες του
τοπικού δακτυλίου
R_p

$\vartheta_p^{-1}(m_z) = \mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$

αφού $\varphi^{-1}(\mathfrak{p} R_p) = \mathfrak{p}$

$$\psi : R \xrightarrow{\text{επιμορφισμός}} R_p \xrightarrow{\vartheta_p} \mathcal{O}_{Z,z}$$

$\mathfrak{p} = \psi^{-1}(\mathfrak{p}) \qquad \underline{\mathfrak{p} R_p} \qquad m_z$

$\Phi_z^{-1}(m) = \mathfrak{p} \qquad \Phi : R \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$

$f(z) = \mathfrak{p} = \Phi_z^{-1}(z) \longleftarrow z \in Z$

$\Phi : R \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ περιγράφει το $\mathfrak{p}$.

Έστω $(f, \vartheta) \in Hom_{Sch}(Z, \operatorname{Spec} R) \xrightarrow{\cong} Hom_{Ring}(R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z))$

$(f, \vartheta) \longrightarrow \Phi : R \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$

$\qquad\qquad \Gamma(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) \to \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$

Αντιστρόφως : $Hom_{Ring}(R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)) \longrightarrow Hom_{Sch}(Z, \operatorname{Spec} R)$

$$\psi : R \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\nu_z} \mathcal{O}_{Z,z} \triangleright m_z$$

δακτύλιος των φύτρων στο z.

$\mathcal{O}_{Z,z} = \varinjlim_{U \ni z} \mathcal{O}_Z(U)$

$m_z \triangleleft \mathcal{O}_{Z,z} \qquad \psi^{-1} \nu_z^{-1}(m_z)$ είναι πρώτο ιδεώδες του R

$f : Z \longrightarrow \operatorname{Spec} R$

$z \longrightarrow \psi_z^{-1}(m_z)$

$\psi_z = \psi \circ \nu_z$.

1) Η f είναι συνεχής. $X = \operatorname{Spec} R$

Αρκεί να δείξουμε ότι για $g \in R$ $\quad f^{-1}(\underline{X_g})$ ανοιχτό.

$X_g = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R : g \notin \mathfrak{p} \}$

$X_g = D(g)$

$f^{-1}(X_g) = \{ z \in Z : \underline{\nu_z \psi(g) \notin m_z} \}$

$$= \{ z \in Z : \ \underbrace{v_z\, \psi(g) \text{ είναι αντιστρέψιμο στο } \mathcal{O}_{Z,z}}_{\text{τοπικος δακτυλιος}} \}$$

$$= \{ z \in Z : \ \psi(g)(z) \neq 0 \}$$

ανοιχτο συνολο.

$$\mathcal{O}_{Z,z} \setminus m_z = \xi(\mathcal{O}_{Z,z})$$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Gamma(\overline{f^{-1}(X_g)}, \mathcal{O}_Z) \\
& \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_{\psi(g)} \arrow[ur, "\bar{\rho}_g"] &
\end{tikzcd}$$

ομομορφισμο δακτυλιων Περιορισμος στο sheaf $\mathcal{O}_Z$

localization ως προς το $\psi(g)$

υπαρχει μοναδική συναρτηση απο την universal ιδιοτητα του εντοπισμου.

$$\psi : R \longrightarrow R_{\mathfrak{p}}$$

$$\psi_g : R_g \longrightarrow \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)_{\psi(g)}$$

$$\vartheta_g = \bar{\rho}_g \circ \psi_g : R_g \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(X_g), \mathcal{O}_Z)$$

Για ανοιχτα X_g, $f^{-1}(X_g)$ οριζουμε τον μορφισμο των sheaves. X_g βαση της τοπολογιας

$$\vartheta_g : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \longrightarrow \mathcal{O}_Z$$

$$(f, \vartheta) : (Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$$

$$\operatorname{Hom}_{(Sch)}(Z, \operatorname{Spec} R) \rightleftarrows \operatorname{Hom}_{Ring}(R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z))$$

Η δυο αυτες κατασκευες είναι η μια αντιστροφη της άλλης.

$$F \circ G = Id_{Aff.\ Sch.}$$

$$\underline{G((f,\partial))} : \Gamma(Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$$

μορφισμό affine σχημάτων : $(Y,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X,\mathcal{O}_X)$

$$\begin{tikzcd}
(Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[r] \arrow[d, "G"] & (X,\mathcal{O}_X) \\
\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[r] \arrow[d, "F"] & \Gamma(X,\mathcal{O}_X) . \\
R \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

<u>Παράδειγμα</u> X τοπολογικός χώρος

$Top(X)$ $\quad Ob(Top(X))$ είναι ανοιχτά σύνολα

$$U, V \in Ob(Top(X))$$

$$Hom(U,V) = \begin{cases} i_{V,U} : U \hookrightarrow V & U \subset V \\ \emptyset & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Sheaf αβελιανών ομάδων $\quad G : Top(X) \longrightarrow Mod_{\mathbb{Z}}$

$$U \in Ob(Top(X)) \longrightarrow G(U) \in Mod_{\mathbb{Z}}.$$

$$\rho_{V,U} : G(i_{V,U}) : G(V) \longrightarrow G(U).$$

Μορφισμός μεταξύ sheaves G_1, G_2 είναι ένα natural transformation μεταξύ συναρτητών

$$V \supset U$$

$$\begin{tikzcd}
G_1(U) \arrow[r, "res"] \arrow[d, "f"'] & G_1(V) \arrow[d, "f"] \\
G_2(U) \arrow[r, "res"] & G_2(V)
\end{tikzcd}$$

μορφισμό συναρτητών