Αλγεβρική Γεωμετρία 23 Μαρτίου 2021

R $\quad X = \operatorname{Spec} R$ το σύνολο των πρώτων ιδεωδών.

τοπολογικό χώρο ορίζοντας ως ανοιχτά

$D(f) = X_f = \{ P \in \operatorname{Spec} R : f \notin P \}$ Βάση ανοιχτών της τοπολογίας

$X_f \cap X_g = X_{f \cdot g}$

$X_f \supset X_g \iff g \in \sqrt{\langle f \rangle}$ $\quad \exists\, n \in \mathbb{N},\ r \in R \quad g^n = r f.$

Sheaf συναρτήσεων στο Spec R

X τοπολ. χώρο $\quad U$ ανοιχτά και για κάθε U

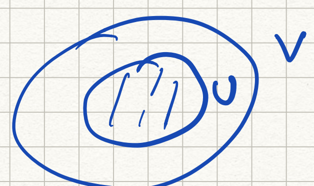
$\underline{\mathcal{F}(U)}$ (module / δακτύλιος / ομάδα)

$U \subset V$

υπάρχει ένας ομομορφισμός

$\rho_{V,U} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ συνάρτηση περιορισμού.

$\mathcal{F}$ Συναρτήσεις στα ανοιχτά. $\quad \underline{\mathcal{F}(U)\ f : U \xrightarrow{f} k}$



$f \in \mathcal{F}(V) \longrightarrow f|_U \in \mathcal{F}(U)$

- $\rho_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$
- $W \subset V \subset U$

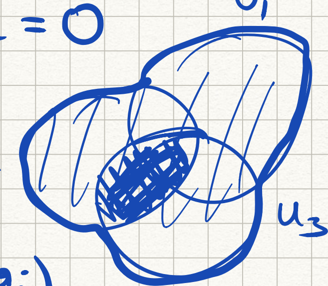
$\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$

$\Bigg\}$ presheaf.

Για καθε $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$ ανοιχτη κάλυψη του U

sheaf

$\alpha \in \mathcal{F}(U)$: $\rho_{U,U_i}(\alpha) = 0 \quad \forall i \in I$ τοτε $\alpha = 0$



Αν εχουμε μια συλλογη $a_i \in \mathcal{F}(U_i)$ ~~τοτε~~

$$\rho_{U_i, U_i \cap U_j}(\alpha_i) = \rho_{U_j, U_i \cap U_j}(a_j)$$

τοτε $\underline{\alpha \in \mathcal{F}(U)}$ $\rho_{U,U_i}(\alpha) = a_j$

$\mathbb{C}$

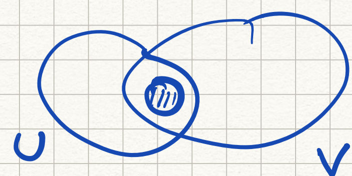
$$\frac{1}{1-t} = \sum_{r=0}^{\infty} t^r \quad |t| < 1$$

αναπτυγμα της γεωμετρικης σειρας.

Λανθασμενη ασάφεια.

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ Δυο συναρτησεις είναι ισες αν εχουν το ίδιο πεδίο ορισμου, ...

$f \in \mathcal{F}(U)$ $\qquad g \in \mathcal{F}(V)$



$f \sim g$ αν υπαρχει ένα W

$W \subset U$

$W \subset V$

ώστε η $\rho_{U,W}(f) = \rho_{V,W}(g)$

Ευθέα όρια

I συνολο δεικτων εφοδιασμενο με μια διαταξη „$\leq$"

ωστε για καθε $i, j \in I$ υπαρχει ενα c

$i \leq c$ κοινο μεγαλύτερο
$j \leq c$

$\{A_i\}$ συνολο με κάποια δομη

(ομαδες, δακτύλοι, modules)

ομομορφισμος στην δομη.

$\forall \quad i \leq j \qquad f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ απο το μικροτερο στο μεγαλύτερο

(A_i, f_{ij}) θα λέγεται ένα ευθυ σύστημα με δεικτες απο το I.

$$\varinjlim = \left(\coprod_{i \in I} A_i \right) \Big/ \sim \qquad x_i \sim x_j$$

αν και μονο αν

υπαρχει k $\quad i, j \leq k$

$$f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$$

- f_{ii} ταυτοτητα στο A_i
- $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ $\quad i \leq j \leq k$.

Παρατηρηση

$$\begin{aligned} \Phi_i : A_i &\longrightarrow A = \varinjlim A_i \\ a_i &\longrightarrow [a_i] \end{aligned}$$

Παραδειγματα

$\mathcal{F}$ sheaf επι του τοπολογικου χωρου $x \in X$

οι ανοιχτες περιοχες U ωστε $x \in U$

αποτελουν ένα ευθυ συστημα διατεταγμενο

$U \leq V \iff U \supseteq V \qquad (\mathcal{F}(U), r_{U,V})$

το οποιο έχει οριο

$\varinjlim \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_x$ ← δακτύλιο των φύτρων

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \\ x \in U}} F(U) = F_x$$

Αν F το sheaf των συναρτήσεων $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$x \in \mathbb{C}$ $\quad F_x = \left\{ \begin{array}{l} \text{ο δακτύλιος των} \\ \text{ολομορφων συναρτησεων} \\ \text{στο } x \end{array} \right\}$ στο

$$\|$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{δακτύλιο των δυναμοσειρών} \\ \text{που συγκλίνουν σε κάποια} \\ \text{μη τετριμμένη ακτίνα σύγκλισης} \end{array} \right\}$

$$\frac{1}{1-t} \qquad \frac{1}{1-2t}$$

$$\sum_{v=0}^{\infty} t^v + \sum_{v=0}^{\infty} (2t)^v = \sum_{v=0}^{\infty} (1+2^v)\, t^v$$

!

$|t| < 1$ $\qquad |2t| < 1$

$\qquad\qquad |t| < \frac{1}{2}$

$$X_f \supset X_g \iff g \in \sqrt{(f)} \iff g^n = r f \qquad n \in N,\ r \in R$$

Οι "φυσιολογικές συναρτήσεις" στο X_f είναι

το $\underline{R_f} = \left\{ \frac{r}{f^m} : r \in R,\ m \in N \right\}$

$\frac{r}{f^m} \to$ προσεκτικός πότε δύο κλάσματα είναι ίσα.

$$\underbrace{X_f = \{ P \in \operatorname{Spec} R,\ f \notin P \}}_{\text{σύνολο των σημείων που } \underline{\text{δεν}} \text{ μηδενίζονται στο } P.} \Rightarrow \underset{f}{\underline{f(P)}} \neq 0 \bmod P$$

$k[x]$ $\qquad$ μέγιστα ιδεώδη

$f(a) = f \bmod (x-a)$

Αυτά επιτρέπεται να τα έχω στον παρονομαστή.

$\alpha \in k$ ... που παραγ.

$$(X_f, R_f) \longrightarrow (X_g, R_g) \qquad X_f \supset X_g$$

$$R_f \xrightarrow{res} R_g \qquad g^n = a f$$

για κάποιο n, $a \in R$

$$\frac{r}{f^m} \longmapsto \frac{a^m r}{g^{nm}} \qquad f^m = a^m g^{nm}$$

Εντοπισμός (localization)

S R το οποίο δεν περιέχει το 0

$(1 \in S)$ → κάνει τα πράγματα ευκολότερα

$$a \in S,\ b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S$$

$S = R \setminus P$ όπου P πρώτο ιδεώδες

$S = R \setminus \{0\}$ όπου το $\{0\}$ πρώτο ιδεώδες $\Leftrightarrow$ R ακ. περιοχή

$$S = \{f, f^2, f^3, f^4, \ldots\}$$

f να μην είναι μηδενοδύναμο

$$R_S = S^{-1}R = \left\{ \frac{r}{s} : r \in R,\ s \in S \right\}$$

συμβολισμός για τις κλάσεις ισοδυναμίας

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} \Longleftrightarrow \exists\ s' \in R \qquad s'(r_1 s_2 - s_1 r_1) = 0$$

R ακ. περιοχή $\quad S = R \setminus \{0\}$

$$R_S = \mathrm{Quot}(S)$$

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{\ldots} \quad \text{και είναι}$$

$$\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{\quad}{ss'}$$

καλά ορισμένες)

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} = \frac{rr'}{ss'}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6}$$

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{6} =$$

$$\underline{R} \xrightarrow{\varphi_s} R_s$$

$$r \longrightarrow \frac{r}{1}$$ αν ο R έχει μονάδα

αν ο R δεν έχει μονάδα.

$$r \longrightarrow \frac{rs}{s}$$ για κάποιο s και θα δείξουμε ότι πρέπει να ο φ_s είναι ανεξάρτητος της επιλογής του s

$$\ker \varphi_s = \{ r \in \underline{R} : rs = 0 \text{ για κάποιο } s \in S \}$$

$$X_f \supset X_g \Rightarrow g^n = a\underline{\underline{f}} \Rightarrow f = \frac{g^n}{a}$$

$$\rho_{X_f, X_g} : R_f \longrightarrow R_g$$

$$\frac{r}{f^m} \longrightarrow \frac{a^m r}{g^{nm}}$$

καλά ορισμένη:

$$\frac{r}{f^m} \equiv \frac{r'}{f^{m'}} \rightsquigarrow \frac{a^m r}{g^{nm}} = \frac{a^{m'} r'}{g^{nm'}}$$

ισοδυναμία

$$X_f \supset X_g \supset X_h$$

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[r, "\rho_{X_h, X_g}"] \arrow[rr, bend right, "\rho_{X_h, X_f}"'] & R_g \arrow[r, "\rho_{X_g, X_h}"] & R_h \end{tikzcd}$$

$X_f \supset X_g \qquad \underline{g^{n_1} = a f} \qquad X_g \supset X_h \qquad a, b \in R$

$\underline{h^{n_2} = b g} \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{N}$

$$h^{n_1 n_2} = (bg)^{n_1} = \underbrace{b^{n_1} a}\, f$$

$$\frac{r}{f^m} \xrightarrow{\rho_{X_h, X_f}} \frac{a^m b^{m n_1} r}{h^{m n_1 n_2}}$$

$=$

$$\rho_{X_h, X_g} \circ \rho_{X_g, X_f}\left(r/f^m\right) =$$

$$\underbrace{\rho_{X_h, X_g}}\left(\frac{a^m r}{g^{m n_1}}\right) = \frac{a^m b^{m n_1} r}{h^{m n_1 n_2}}$$

$$U_{\mathfrak{p}} = \{ X_f : \mathfrak{p} \in X_f \} = \{ X_f : f \notin \mathfrak{p} \}$$

Οικογένεια ανοιχτών που περιέχει το $\mathfrak{p}$.

Γράφουμε $X_f \leq X_g \iff X_f \supset X_g$

X_f, X_g έχουν κοινό περιορισμό

$\overset{\cap}{U_{\mathfrak{p}}}$ $\qquad X_f \cap X_g = X_{f \cdot g} \in U_{\mathfrak{p}}$

$$\boxed{\varinjlim_{X_f \in U_{\mathfrak p}} R_f = R_{\mathfrak p}}$$ Πρόταση

Θεωρούμε ένα στοιχείο του $R_{\mathfrak p}$ · είναι της μορφής g/f με $f, g \in R$ $f \notin \mathfrak p$

$\Rightarrow \mathfrak p \in X_f$ στο R_p αν

$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'}$ $f' \notin \mathfrak p$ τότε (εξ ορισμού) υπάρχει $s \in R \setminus \mathfrak p = S$

ώστε $s(f'g - fg') = 0$

$$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'} = \frac{fg'}{ff'} = \frac{f'g}{ff'}$$

$\mathfrak p \in X_{f'}$, $\mathfrak p \in X_{ff'}$

$$\left[\left(\frac{g}{f}, X_f\right)\right] = \left[\left(\frac{fg}{ff'}, X_{ff'}\right)\right] = \left[\left(\frac{g'}{f'}, X_{f'}\right)\right]$$

Ορίζεται μια συνάρτηση

$$\Phi : R_p \to \varinjlim_{X_f \in U_p} R_f$$

$$\frac{g}{f} \mapsto \left[\left(\frac{g}{f}, X_f\right)\right]$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ομομορφισμός. $[\cdot]$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου.

$$\frac{g}{f} + \frac{r}{h} = \frac{gh + fr}{fh} \quad \text{στο } R_{fh}$$

$$\Phi\left(\frac{g}{f}\right) = \left[\left(\frac{g}{f}, X_f\right)\right] = \left[\left(\frac{gh}{fh}, X_{fh}\right)\right]$$

$$\Phi\left(\frac{r}{h}\right) = \left[\left(\frac{r}{h}, X_h\right)\right] = \left[\left(\frac{fr}{fh}, X_{fh}\right)\right]$$

$$\Phi\left(\frac{g}{f} + \frac{r}{h}\right) = \left[\left(\frac{gh + fr}{fh}, X_{fh}\right)\right]$$

$$\psi : \varinjlim_{X_f \in U_p} R_f \longrightarrow R_p$$

$$\left[\left(\frac{g}{f^m}, X_f\right)\right] \longrightarrow \frac{g}{f^m}$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι καλά ορισμένη.

$$\left[\left(\frac{g}{f^m}, X_f\right)\right] = \left[\left(\frac{r}{h^n}, X_h\right)\right]$$

$$\left[\left(\frac{g}{f^m}, X_f\right)\right] = \left[\left(\frac{f^{m(n-1)} h^{nm}}{(fh)^{nm}}, X_{fh}\right)\right]$$

$$\left[\left(\frac{r}{h^n}, X_h\right)\right] = \left[\left(\frac{f^{mn} h^{(m-1)n}}{(fh)^{mn}}, X_{fh}\right)\right]$$

άρα στο $R_{(fh)^{mn}}$

$$\frac{g}{f^m} = \frac{f^{m(n-1)} h^{mn}}{(fh)^{mn}} = \frac{f^{mn} h^{(m-1)n}}{(fh)^{mn}} = \frac{r}{h^n} \qquad R_p$$

Η ψ είναι καλά ορισμένη.

Είναι ομομορφισμός (πράξεις με ομόνυμα κλάσματα)

$$\psi \circ \varphi\left(\frac{g}{f}\right) = \psi\left(\left[\left(\frac{g}{f}, X_f\right)\right]\right) = \frac{g}{f}$$

$$\varphi\, \psi\left(\left[\left(\frac{g}{f}; X_f\right)\right]\right) = \varphi\left(\frac{g}{f}\right) = \left[\left(\frac{g}{f}, X_f\right)\right]$$

ψ, φ είναι 1-1 και <u>επί</u>.

<u>Παράδειγμα</u> $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \ni \mathfrak{p} = \langle p \rangle$

$\mathfrak{p} \in X_f \Leftrightarrow f \notin \mathfrak{p} \Leftrightarrow p \nmid f.$ $\qquad f, p$ ακέραιοι

$$U_{\mathfrak{p}} = \{\, X_f \text{ ώστε } (f, p) = 1 \,\}$$

$f = \pm p_1^{\alpha_1} \cdots\cdots p_e^{\alpha_e} \qquad a_j \geq 1 \qquad \sqrt{f} = \langle p_1, \ldots, p_e \rangle$

$$\frac{r}{f^m} = \frac{r'}{\underbrace{p_1^{c_1} \cdots p_e^{c_e}}_{t}} = \frac{r'}{t} \qquad p_j \nmid r'$$

$$\frac{r}{f^m} = \frac{r'}{t} \qquad [(\tfrac{r'}{t}, X_t)] = [(\tfrac{r}{f^m}, X_f)]$$

Δηλαδή $\displaystyle\lim_{\substack{\longrightarrow \\ f\in U_p}} \mathbb{Z}_f$ γράφεται ως ανάγωγο

κλάσμα r'/t $\quad p \nmid t$.

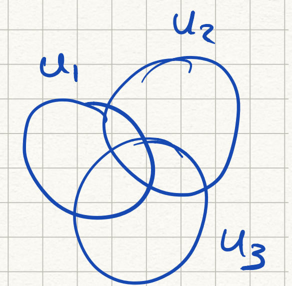
$(t,p) = 1 \qquad s/t \qquad [(\tfrac{s}{t}, X_t)] \in \displaystyle\lim_{\substack{\longrightarrow \\ f\in U_p}} \mathbb{Z}_f$

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{ s/t : s/t \text{ ανάγωγο κλάσμα } (t,p)=1 \}$$

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ X_f \in U_f}} \mathbb{Z}_f$$

$$\mathbb{Q} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ X_f \in U_0}} \mathbb{Z}_f = \mathbb{Z}_{(0)}$$

και το σώμα πηλίκων (σε αν. περιοχή)
είναι ένας δακτύλιος φύτρων.



$$\boxed{\begin{array}{l} \rho_{U,U_i}(\alpha) \equiv 0 \\ \text{τότε το } \alpha = 0 \end{array}}$$

__Λήμμα__

Αν $\underline{X_f} = \bigcup_{\alpha\in A} \underline{X_{f_\alpha}}$

και για κάθε $a \in R_f$

$$\rho_{X_{f_\alpha}, X_f}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

__Απόδ.__

$x = g/f^m$ στοιχείο του R_f το $x = 0$

αν και μονο αν $\exists\, n \in \mathbb{N}$ με $f^n g = 0$

$$\frac{g}{g^m} - \frac{0s}{f^k} \qquad \{f^n\}_{n\in\mathbb{N}} = S \Rightarrow S^{-1} \qquad f^k g$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \iff \exists\, s \in S \quad 0 = s(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$I = \{ h \in R : h \cdot g = 0 \} \triangleleft R$$

$x = 0$ στο R_f αν και μονο αν $f^n \in I$

$$f \in \sqrt{I} \qquad \sqrt{I} = \bigcap_{\substack{I \subset P \\ P \in \operatorname{Spec} R}} P$$

Δηλαδη $f \in \sqrt{I}$ ειναι ισοδυναμη ότι για τα πρωτα ιδεωδη P του R που περιέχουν το I

$$\underline{f \in P}$$

Εστω $x \neq 0$ R_f τοτε υπάρχει πρωτο.

P με $P \supset I$ και

$$\begin{tikzcd}
x \quad R_f \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr] & R_{f_\alpha} \arrow[d] \\
& R_P
\end{tikzcd}$$

0

$$\rho_{X_{f_\alpha}, X_f}(x) = 0$$

γιατι έχουμε υποθεσει οτι ο περιορισμος ειναι 0 σε όλα τα ανοιχτα X_{f_α}.

Αρα η εικονα

του $g = \frac{f}{a}$ στο R_P ειναι 0.

Δηλαδη υπαρχει $b \in R \setminus P$ $bg = 0$

$\Rightarrow b \in I$ ομως $P \supset I$ $\Rightarrow b \in P$ σε

αντιφαση $b \in R \setminus P$ αρα x είναι 0 στο R_f.