4 / 3 / 2021

$(\mathrm{Spm}(R), R)$ γενικευμένη αφινική ποικιλία. $R \to$ πεπ. παραγ. k-άλγεβρα

$$D(f) = \{ m \in \mathrm{Spm}(R) : f \notin m \} = V(f)^c$$

$$f(m) := \overset{f \in R}{f \bmod m} \qquad f \notin m \iff f(m) \neq 0.$$

$$V(f) = \{ m \in \mathrm{Spm}(R) : f \in m \}$$

Παράδειγμα

$f \in R$ δεν είναι μηδενοδύναμο $\left(f \notin \sqrt{0} \iff f^n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \right)$

$\langle 1 - ft \rangle \in R[t]$ $\qquad S = \underbrace{R[1/f]}_{\text{"αντιστρέφουμε το } f\text{"}} = \dfrac{R[t]}{\langle 1 - ft \rangle}$

Επιβάλουμε το f να είναι αντιστρέψιμο. "Localization" $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

Αν αντιστρέφουμε στοιχεία σε ένα δακτύλιο τότε χάνουμε ιδεώδη.

$\varepsilon \in \mathcal{E}(R)$ τότε $\varepsilon \in I \Rightarrow I = R$

Τότε κάθε ιδεώδες m ώστε $f \in m$ εξαφανίζεται δεν είναι μέγιστο

$R = k[x_1, \dots, x_n]/J$ πεπ. παραγ. k-άλγεβρα

$V(J) \subset \mathbb{A}^n_k$

$$\varphi : k[x_1, \dots, x_n, t] \longrightarrow S = \frac{k[x_1, \dots, x_n, t]}{\langle J, 1 - ft \rangle}$$

k-αλγ. ομομορφισμός

Μέγιστα ιδεώδη του S δίνονται από τα $(a_1, \dots, a_n, b) \in k^{n+1}$ και ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\varphi^{-1}(m) = \langle x - a_1, \dots, x_n - a_n, t - b \rangle$$

$$m = \varphi \varphi^{-1}(m)$$

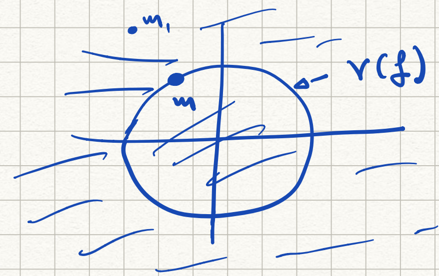
$$m' = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle < k[x_1, \dots, x_n]$$

(*) $\boxed{1 = f(a_1, \dots, a_n) b} \Rightarrow f \notin m'$ $\qquad m' =$ ιδεώδες των πολυωνύμων που μηδενίζονται στα $a_1, \dots, a_n$

$R/m' \cong k$ υπάρχει μοναδικό b ώστε να ισχύει η (*). $\quad b = \dfrac{1}{f(a_1, \dots, a_n)}$

$$Spm(S) \xleftrightarrow[\text{επι}]{1-1} D(f) = \{ m' \in Spm(R) : f \notin m' \}$$

$f = (x^2+y^2-1)$ $\quad V(f) \subset \mathbb{A}^2$



$P = \overline{V(m)} \subset \overline{V(f)}$

$m \subset \sqrt{m} = I(P) \supset \langle f \rangle$

$=$

$m \ni f$

m_1 όχι στον κύκλο $\quad m_1 \not\ni f$

Εντοπισμός: Αντιστρέφουμε το f κάθε ιδεώδες $m \ni f$ ← μονάδα

S

$(D(f), S)$ αφινική αλγεβρική πολ/τα

$D(f)$: αλγεβρικό σύνολο, S: δακτύλιο.

$Spm\, S \xrightarrow{\sim} D(f)$

Αλγεβρικές Ομάδες

G αλγεβρικό σύνολο με δομή ομάδας

Διαφορίσιμες πολ/τες

G Lie group

ομάδα + διαφ. πολ/τα.

$GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$

$GL_n(k)$ = αfine πολ/τα

με δακτύλιο συντεταγμένων

$k[x_{ij}, \det(x_{i,j})^{-1}]$

$M_n(k) \cong \mathbb{A}_k^{n^2}$ $\quad k[\mathbb{A}_k^{n^2}] = k[x_{ij}]$

$1 \le i,j \le n$

αντιστροφή της ορίζουσας

$\det((x_{ij}))$

$Spm(k[x_{ij}, \det(x_{ij})^{-1}]) = D(\det(x_{ij}))$ ανοιχτό σύνολο στην Zariski τοπολογία με τους αντιστρέψιμους πίνακες.

$A = (a_{ij})$

$m = \langle x_{ij} - a_{ij} \rangle$ αν $\det(a_{ij}) = 0$ δεν αντιστρέφονται.

X τοπολ. χώρος

X τοπολ. χώρ.

Y τοπολ. χώρ.

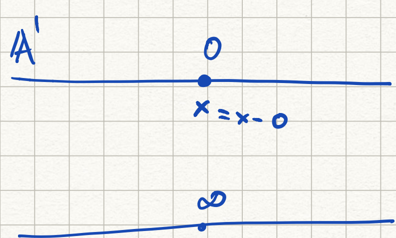
$$X \supset \underset{\text{ανοιχτό}}{U_X} \xrightarrow{\cong} U_Y \subset Y$$

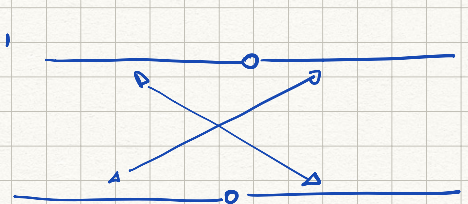
f ομοιομορφισμός

Νέος τοπολογικός χώρος $(X \amalg Y)/\sim$ $\quad x \sim y \iff y = f(x)$

$$U_1 = (\mathbb{A}^1_k, k[x]) \qquad U_{01} = (\underline{D(x)}, \underline{k[x, \tfrac{1}{x}]})$$

$$U_2 = (\mathbb{A}^1_k, k[y]) \qquad U_{10} = (D[y], k[y, \tfrac{1}{y}])$$





$$\psi : k[y, \tfrac{1}{y}] \longrightarrow k[x, \tfrac{1}{x}]$$

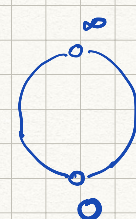
$$f(y, \tfrac{1}{y}) \longrightarrow f(\tfrac{1}{x}, x)$$

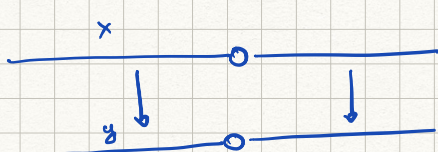
$$y \longrightarrow \tfrac{1}{x}$$

$$* \longrightarrow \tfrac{1}{y}$$

$$k \setminus \{0\} \longrightarrow k \setminus \{0\}$$

$\underline{\mathbb{P}^1_k} = k \cup \{\infty\}$ "<u>προβολική ευθεία</u>" ← προβολικά σύνολα.





$x \longrightarrow y$

$y \longrightarrow$

Ευθεία με δυο αρχές

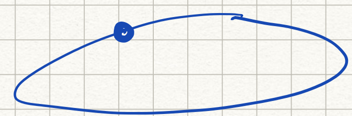
(Όχι διαχωρίσιμο)

"Separable" η οποία θα παίξει τον ρόλο του χώρου Hausdorff..

$I \longrightarrow V(I) \longrightarrow I(V(I)) = \sqrt{I}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{όχι κατ' ανάγκη} \\ \text{αλγεβρικό}}}{Y} \subset \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \underbrace{I(Y)}_{\triangleleft\, k[x_1,\dots,x_n]} = \{ f \in k[x_1,\dots,x_n] \quad f(P)=0 \quad \forall P\in Y\}$$

$$V(I(Y)) = \overline{Y}$$ ← η κλειστότητα του αρχικού συνόλου Y στην τοπολογία Zariski. Μικρότερο κλειστό που περιέχει το Y



$Y \subset V(I(Y))$

$f : f(P)=0 \quad \forall P \in Y$

$P \in \mathbb{A}^n_k : \quad f(P)=0 \quad \forall f \in I(Y)$

$$Y \subset \overline{Y} = \bigcap_{\substack{\text{κλειστών} \\ W \supset Y}} W \subset \underbrace{V(I(Y))}_{\substack{\text{κλειστό} \\ \text{που περιέχει} \\ \text{το } Y}}$$

$$\boxed{\overline{Y} \subset V(I(Y))}$$

Έστω W κλειστό σύνολο που περιέχει το Y

$W = V(J)$

$$Y \subset V(J) \quad \Big| \quad J \subset \sqrt{J} = I(V(J)) \subset I(Y)$$

$$V(I(Y)) \subset W$$ κάθε κλειστό W που περιέχει το Y περιέχει και το $V(I(Y))$

$$V(I(Y)) \subset \overline{Y} = \bigcap_{\substack{W \supset Y \\ W \text{ κλειστά}}} W$$

<u>Ορισμός</u> Ένας τοπολογικός χώρος X θα λέγεται Noether αν ικανοποιεί την φθίνουσα συνθήκη αλυσίδας για κλειστά σύνολα.

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \supset Y_n \supset \dots$$

γίνεται τελικά σταθερή $\exists r \quad Y_r = Y_{r+1} = \dots$

$\mathbb{R}^n$ με την συν. τοπολογία δεν είναι Noether $\quad [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \quad n \in \mathbb{N}$

φθίνουσα ακολουθία από κλειστά σύνολα που δεν γίνεται σταθερή.

$\mathbb{A}^n_k$ είναι Noether.

$$Y_1 \supset \dots \supset Y_n \supset$$

τότε $I(Y_1) \subset \dots \subset I(Y_n) \subset$ είναι αύξουσα ακολουθία ιδεωδών

του $k[x_1,\dots,x_n]$ η οποία είναι τελικά σταθερή.

Noether δακτύλιος κάθε ιδεώδες είναι πεπ. παραγόμενο.
Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι κάθε αύξουσα ακολουθία ιδεωδών είναι τελικά σταθερή.

$$\langle a_1,\dots,a_r\rangle = \bigcup_{i=1}^{\infty} I(Y_i)$$ ιδεώδες. το οποίο είναι πεπ. παραγόμενο

$a_i \in I(Y_{j(i)})$

$i \geq R$

όταν το i είναι αρκετά μεγάλο για να περιέχει όλα τα $a_1,\dots,a_r$ $I(Y_R) = I(Y_{R+1}) = \dots$

$$I(Y_R) = I(Y_{R+N}) \qquad N>0$$

$$Y_R = \overline{Y}_R = V(I(Y_R)) = V(I(Y_{R+N})) = \overline{Y}_{R+N} = Y_{R+N}$$

Πρόταση Σε ένα τοπολογικό χώρο της Noether κάθε μη κενό κλειστό σύνολο Y γράφεται ως πεπερασμένη ένωση

$$Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$$ ανάγωγων κλειστών συνόλων.

Αν απαιτήσουμε $Y_i \not\subseteq Y_j$ για $i \neq j$ τότε η ανάλυση είναι μοναδική.

Ανάγωγο:
$Y = Y' \cup Y''$
κλειστά
όχι
$\emptyset \subsetneq Y', Y'' \subsetneq Y$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια διάσπαση.

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{μη κενά υποσύνολα του } X \\ \text{κλειστά και δεν μπορούν} \\ \text{ως πεπ. ένωση κλειστών} \\ \text{ανάγωγων στοιχείων.} \end{array} \right\}$$

$A \neq \emptyset$ τότε το A έχει ελάχιστο στοιχείο.

$X_0 \in A$ είναι ελάχιστο;

$\supsetneq$ είναι ελάχιστο;

X_1

$\supsetneq$

X_2
$\cup$
X
$\vdots$
X_r

δεν μπορουμε να απαντησμε παντα οτι δεν ειναι ελάχιστο

Noether

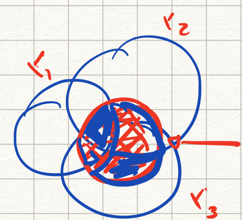
Y το ελάχιστο. Είναι ανάγωγο $\to$ Ναι $Y \notin A$ άτοπο.
$\to$ όχι

$$Y = Y' \cup Y'' \qquad Y' \subsetneq Y, \quad Y'' \subsetneq Y$$

$$Y' \notin A, \quad Y'' \notin A \qquad Y' = Y_1 \cup \dots \cup Y_r, \quad Y'' = Y_1' \cup \dots \cup Y_s'$$

$$Y = Y' \cup Y'' = Y_1 \cup \dots \cup Y_r \cup Y_1' \cup \dots \cup Y_s' \quad \text{άτοπο}$$

$$Y = Y_1' \cup \dots \cup Y_s' = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$$



$$Y_1' \subset Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$$

$$Y_1' = \bigcup_{i=1}^{s} (Y_i \cap Y_1')$$

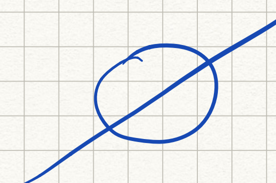
Y_1' είναι ανάγωγο. άρα $Y_1' = Y_i \cap Y_1' \Rightarrow Y_1' \subset Y_i$

$$Y_1' \subset Y_1 \qquad Y_1' \subset Y_1 \subset Y_j'$$

το οποίο το έχουμε αποδείξει

$$Y_1' = Y_1 = Y_j'$$

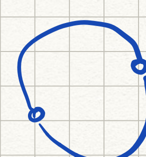
$(x-y)(x^2+y^2-1)$



$$W = \overline{Y \setminus Y_1}$$

$$W = Y_2 \cup \dots \cup Y_r = Y_2' \cup \dots \cup Y_s'.$$

επαγωγή.



Πόρισμα Κάθε αλγεβρικό υποσύνολο του A^n μπορεί να γραφεί μοναδικά ως πεπ. ένωση ανάγωγων αλγεβρικών συνόλων.

Διάσταση τοπολογικού χώρου.

$\dim X$ = supremum όλων των ακεραίων για τους οποίους υπάρχει μια αλυσίδα αναγώγων κλειστών (μη κενών) υποσυνόλων του X

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$$

$\mathbb{A}^1_k$: αλγεβρικά σύνολα είναι ο χώρος και σημεία.

$$\underset{0}{\{pt\}} \subset \underset{1}{\mathbb{A}^1} \rightsquigarrow 1.$$

$\dim \mathbb{A}^n_k \geq n$

$$\underset{}{pt} \subset \underset{1}{\text{ευθεία}} \subset \underset{2}{\text{επίπεδο}} \subset \underset{3}{\text{δχ.}} \subset \dots$$

$$\sum a_{ij} x_i = 0$$

Σε ένα δακτύλιο ύψος (height) ενός πρώτου ιδεώδους είναι το supremum όλων των ακεραίων n

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n = P \subset \dots$$

Η μεγαλύτερη αλυσίδα από ιδεώδη που περιέχονται στο P

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ $\qquad$ $k[x_1, \dots, x_n]$

$$\dots \langle x_1, \dots, x_{n-2} \rangle \subsetneq \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle \subsetneq \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

height $\rightsquigarrow$ συνδιάσταση

$$V(P_0) \supsetneq \dots \supsetneq V(P_{n-1}) \supsetneq V(P)$$

Θεώρημα k σώμα B ακ. περιοχή πεπ. παραγ. k-άλγεβρα

1) $\dim B$ = βαθμός υπερβατικότητας του $\mathrm{Quot}(B)/k$

$\dim B$ είναι το supremum των υψών των πρώτων ιδεωδών. Krull διάσταση.

$$\dim_{\text{τοπ.}}(X) = \dim_{Krull} k[X]$$

2) Για κάθε πρώτο ιδεώδες $P \triangleleft B$

$$\boxed{\text{height } P + \dim B/P = \dim B}$$

$\dim \mathbb{A}^n_k = n$

$$k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow k(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in k[x_1, \dots, x_n],\ g \neq 0 \right\}$$

L

$|$ $\quad$ βαθμός υπερβατικότητας είναι το πλήθος

k $\quad$ ... υπερβατικών ... από το k

k των αλγεβρικά ανεξάρτητων στοιχείων πάνω από το k

$k[x_1]$ $f(x_1)$ πολυώνυμο ικανοποιούν μια πολ. εξίσωση

$$T - f(z) = 0 \qquad T = f(x),\ z = x$$

$\dfrac{B}{J}$ $\quad B/P$ ποια είναι τα ιδεώδη του: είναι τα ιδεώδη του B $\underline{J \supset P}$

f ένα στοιχείο του $k[x_1, \dots, x_n]$

$V(f)$ λέγεται υπερεπιφάνεια.

πχ. $V(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \subset \mathbb{A}^n_k$

f είναι ανάγωγο $\longrightarrow$ έχει διάσταση $\underline{n-1}$

$$x_n = \sqrt{-x_1^2 + \dots + -x_{n-1}^2}$$

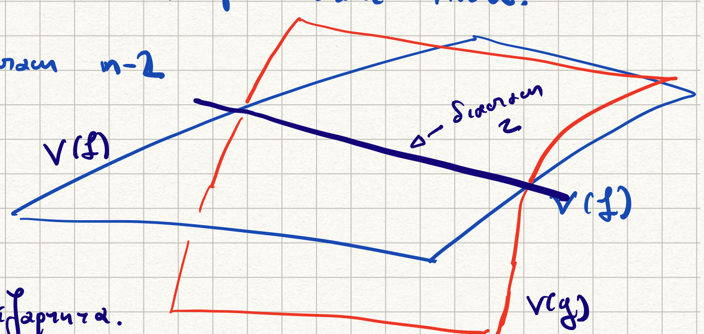
Το ύψος του f είναι 1. ύψος = συνδιάσταση.

Ένα ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο συνδιάστασης 1 είναι $V(f)$

$\underline{\dim Y = n-1}$ $\qquad Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$

$Y = V(f)$ $\qquad$ Hauptidealsatz Krull.

<u>Συνδιάσταση δύο</u> διάσταση $n-2$



$V(f)$ και $V(g)$

τα τέμνονται εγκάρσια (transversal)

$\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ γραμμικά ανεξάρτητα.

Αλγεβρική γεωμετρία

συνδιάσταση $r \geq 2$ δεν <u>σημαίνει ότι το ιδεώδες</u> παράγεται από <u>r-στοιχεία.</u>

compete intersection.