2 Μαρτίου 2021

V αλγεβρικό σύνολο $\longrightarrow I(V)$ $\qquad \dfrac{k[x_1,\dots,x_n]}{I(V)} = k[V]$

$V \subset \mathbb{A}^n_k$

$$\frac{k[x,y,z]}{\langle x^2+y^2-1, z\rangle} \cong \frac{k[x,y]}{\langle x^2+y^2-1\rangle}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{A}^m_k & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{A}^n_k \\
\cup & & \cup \\
V & & W \\
\uplus & & \uplus \\
(\alpha_1,\dots,\alpha_m) & \longrightarrow & \left(f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_m), \dots, f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\right)
\end{array}$$

$f_i \in k[x_1,\dots,x_m]$

$$C = V(y^2-x^2) \subset \mathbb{A}^2 \longleftarrow \mathbb{A}^1$$
$$(a^2, a^3) \longleftarrow a$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "f\circ\phi"'] & W \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{A}^1_k
\end{tikzcd}$$

$k[W] \longrightarrow k[V]$

? "συναρτήσεις" στο W $\qquad$ συναρτήσεις στο V.

$I(V) \subset k[x_1,\dots,x_m] \qquad I(W) \subset k[y_1,\dots,y_n]$

$$\Phi \quad \Big(\underset{\substack{\| \\ y_1}}{\overset{\in k[x_1,\dots,x_m]}{f_1(x_1,\dots,x_m)}}, \dots\dots, \underset{\substack{\| \\ y_n}}{\overset{k[x_1,\dots,x_m] \ni}{f_n(x_1,\dots,x_n)}}\Big)$$

$$k[W] = \frac{k[y_1,\dots,y_n]}{I(W)} \ni g(y_1,\dots,y_n) \xrightarrow{\Phi^\#} g(f_1(x_1,\dots,x_m), \dots, f_n(x_1,\dots,x_m)) \in k[V] = \frac{k[x_1,\dots,x_m]}{I(V)}$$

Αν η Φ στέλνει στοιχεία $\bar{a} = (a_1,\dots,a_m) \in V$ του $V \longrightarrow W$ τότε η $\Phi^\#$ είναι καλά ορισμένη

άρα κάθε $f \in I(V)$, $f(\bar{a}) = 0$

$(b_1,\dots,b_n) \in W$

$$\Phi^\#(I(W)) \subset I(V)$$

$k[x_1,\dots,x_n] \supset f_1,\dots,f_n$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \| \quad\quad\quad \|$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; g_1 \quad\quad\; g_n$

$$k[y_1,\dots,y_n] \longrightarrow k[x_1,\dots,x_m]$$

$$g(y_1,\dots,y_n) = g(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots g_n)$$

$$\frac{k[y_1,\dots,y_n]}{I(W)} \longrightarrow \frac{k[x_1,\dots,x_m]}{I(V)}$$

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow C < \mathbb{A}^2_k \qquad C = V(y^2 - x^3)$$

$$a \xrightarrow{\phi} (a^2, a^3)$$

$$\phi(t) = (t^2, t^3), \quad t^2 = x,\ t^3 = y$$

$$\frac{k[x,y]}{(y^2-x^3)} \longrightarrow k[t]$$

$$g(x,y) \longmapsto g(t^2, t^3)$$

$$k[x,y] \xrightarrow{\phi_1^\#} k[t]$$

$$g(x,y) \longmapsto g(t^2,t^3)$$

$\ker \phi_1^\# =$ Τα πολυωνυμα που μηδενιζονται στο $I(V(y^2-x^3))$
$= y^2 - x^3$

Η συναρτηση $\phi: V \to W$ είναι μορφισμος αν η επαγομενη συναρτηση $\phi^\#: k[W] \to k[V]$ είναι ομομορφισμος δακτυλιων

Πλεονεκτηματα: είναι ανεξάρτητος της εμφυτευσης. $V \subset W$

Ειναι ανεξαρτητος της παραστασης του $k[W]$, $k[V]$ ως πεπερασμενα παραγομενες k-άλγεβρες.

$k[x_1,\dots,x_n]/I$ ← μορφή μιας πεπερασμενα παραγομενης k-αλγεβρας

γεννητορες

σχεσεις

$k[W]$

$\psi: V \longrightarrow W$, $\underset{\text{επί}}{1-1}$ $\qquad \phi^{\#}: k[W] \xrightarrow{\cong} k[V]$ ισομορφισμός δακτυλίων

τότε $\underbrace{(V, k[V])}_{\text{variety}}$ και $(W, k[W])$ είναι ισομόρφα.

Στην ισομορφία δεν αρκεί το σύνολο από μόνο του, πρέπει να κρατήσουμε και την πληροφορία των συναρτήσεων.

$k[\mathbb{A}^1] = k[x]$ — $\mathbb{A}^1_k$

$I = \langle x^2 \rangle$ $\qquad V(x^2) = V(x)$

$I(V(x^2)) = I(V(x)) = \langle x \rangle$ ριζικό

$$k[\mathbb{A}^1] = \frac{k[x]}{I(x)} \cong k[V(k[x])] / I(x)$$

$k[x] = \cancel{\dfrac{k[x_1, [illegible] x]}{\langle x^2 \rangle}}$

γενικεύεται affine varieties

Ο δακτύλιος συντεταγμένων γνωρίζει τα σημεία.

$$\pi: k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(\bar{V})} = k[\bar{V}]$$

Τα $\bar{x}_i = x_i + I(\bar{V})$ γεννήτορες

Το $m = \langle \bar{x}_1 - a_1, \dots, \bar{x}_n - a_n \rangle$ αν $(a_1, \dots, a_n) \in \bar{V}$

μέγιστο ιδεώδες του $k[\bar{V}] / m \cong k$ σώμα $\qquad \bar{x}_i \longrightarrow a_i$

m είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του $k[\bar{V}]$

$\pi^{-1}(m)$ θα δείξουμε σε λίγο ότι είναι μέγιστο ιδεώδες του $k[x_1, \dots, x_n]$

$\|$

$\langle x_1 - b_1, \dots, x_n - b_n \rangle$ $\qquad$ Θα δείξουμε ότι

$(b_1, \dots, b_n) \in \bar{V}$ $\qquad$ κάθε $f \in I(\bar{V})$

Αρκεί να δείξει κανείς $\langle x_1 - b_1, \dots, x_n - b_n \rangle \supseteq I(\bar{V})$

$$f = (x_1 - b_1) g(x_1, \dots, x_n) + (x_2 - b_2) g(x_1, \dots, x_n) + \cdots$$

$-(x_n-b_n)$

$g_n(\dots$

$$f(b_1,\dots,b_n)=0 \quad \forall f\in I(\bar V) \Rightarrow (b_1,\dots,b_n)\in \bar V .$$

$$k[x_1,\dots,x_n] \xrightarrow{\pi} \frac{k[x_1,\dots,x_n]}{I(V)} = k[\bar V]$$

$$\pi^{-1}(0) = I(\bar V)$$ ορισμος του πυρηνου.

$$\langle x_1-b_1,\dots,x_n-b_n\rangle = \pi^{-1}(m) \supset \pi^{-1}(0)=I(V)$$

Αλγεβρικη γεωμετρια: Οι συναρτησεις γνωριζουν τα παντα.

R αντιμεταθ. δακτυλιος με 1.

$$\mathrm{Spm}(R) = \{ m \text{ maximal ιδεωδη του } R \}$$

1-1 επι

R ειναι πεπερασμενα παραγμενη k-αλγεβρα.

σημεια του αλγεβρικου συνολου.

Προβλημα.

$$R \xrightarrow{\varphi} S$$

P πρωτο ιδεωδες του S $\Leftrightarrow$ S/P ακ. περιοχη

$\varphi^{-1}(P)$ ειναι πρωτο ιδεωδες του R

$$R/\varphi^{-1}(P) \xrightarrow{1-1} S/P$$ φυσιολογικη συναρτηση.

$$x+\varphi^{-1}(P) \longrightarrow x+P \qquad \ker\varphi = \varphi^{-1}(P).$$

P πρωτο $\Leftrightarrow$ S/P ακ. περιοχη $\Rightarrow$ $R/\varphi^{-1}(P)$ ακ. περιοχη

$\Rightarrow \varphi^{-1}(P)$ πρωτο.

Οι ομομορφισμοι αντιστρεφουν τα πρωτα σε πρωτα.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \qquad \underbrace{\langle 0\rangle \lhd \mathbb{Q}}_{\text{μεγιστο του } \mathbb{Q}} \qquad \mathbb{Q}/\langle 0\rangle \text{ σωμα.}$$

$$i^{-1}(\langle 0\rangle) = \langle 0\rangle$$

πρώτο. αλλά όχι μέγιστο. $\mathbb{Z}/0$ ακ. περιοχή όχ. σώμα.

Άρα δεν ισχύει εν γένει ότι $\varphi^{-1}(m)$ είναι μέγιστα

μέγιστου

Αν τώρα R, S είναι πεπ. παραγ. k-άλγεβρες σώματα.

$\phi^{-1}(m)$ είναι μέγιστο

μέγιστου

Λήμμα

1) Αν το A είναι ακ περιοχή ώστε κάθε $a \in A$ να είναι αλγεβρικό υπεράνω του σώματος k τότε το A είναι σώμα

Nullstellensatz

2) Αν το $\mathrm{Quot}(A)$ περιέχεται σε πεπ. παραγ. k-άλγεβρα τότε το A είναι αλγεβρικό υπεράνω του k

$a \in A$, $\neq 0$ $\quad \{ f(x) \in k[x]$ με $\underline{f(a)=0} \} = I(\{a\})$

αλγ.

είναι κύριο

ιδεώδες των στο $k[x]$ που μηδεν. στο a

$A \supset k[a] = k[x]/\cancel{\langle f \rangle}$.

A ακ. περιοχή

$\Downarrow$

F είναι ανάγωγο

Αν το F είναι ανάγωγο τότε $k[x]/\langle F \rangle$ είναι σώμα.

$k[\alpha] = k(\alpha)$ και το α αντιστρέφεται.

Ας θεωρούμε $\varphi : k[V] \longrightarrow k[W]$

και ας υποθέσουμε ότι το V είναι ακ. περιοχή.

m μέγιστο ιδεώδες του $k[W]$ τότε το $\varphi^{-1}(m)$ είναι μέγιστο.

$$R = \frac{k[V]}{\varphi^{-1}(m)} \subset \frac{k[W]}{m}$$ σώμα αφού το m μέγιστο.

Κάθε στοιχείο του R είναι αλγεβρικό υπέρ το k και το R είναι ακ. περιοχή ($\varphi^{-1}(m)$ πρώτο)

m μέγιστο άρα πρώτο

άρα $\varphi^{-1}(m)$ πρώτο.

Άρα το R σώμα και το $\varphi^{-1}(m)$ μέγιστο.

Πρόταση: Για κάθε αλγεβρικό σύνολο V υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία του V και στα μέγιστα ιδεώδη του $k[V]$

$$\mathbb{A}^n_k \supset V \ni (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \longleftrightarrow \langle x-\alpha_1,\dots,x-\alpha_n\rangle$$ μέγιστο ιδεώδες του $k[V]$

Αν m_α το μέγιστο ιδεώδες που ορίζεται από τα $\langle x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n\rangle$

$(\Phi^*)^{-1}(m_\alpha)$ = μέγιστο ιδεώδες του $k[W]$ που ορίζεται από

$$\langle y_1-b_1,\dots,y_m-b_m\rangle \qquad b_j = f_j(\alpha_1,\dots,\alpha_n), \quad 1\le j\le m$$

$$k[x_1,\dots,x_n] \supset V \xrightarrow{\Phi=(f_1,\dots,f_m)} W \subseteq k[y_1,\dots,y_m]$$

$$k[W] \xrightarrow{\Phi^*} k[V]$$

$$g(y_1,\dots,y_m)+I(W) \longrightarrow g(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$$

$$\Phi^{*-1}(m) \longrightarrow m = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$$

$=$

$\langle y_1-b_1,\dots,y_m-b_m\rangle$

$b_i = f_j(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

$$\mathrm{Spm}\,k[W] \longrightarrow \mathrm{Spm}\,k[V]$$

$b_j = f_j(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$$\Phi^*(y_j - b_j) = \underbrace{f_j(x_1,\dots,x_n) - f_j(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}_{\text{μηδενίζεται στα } (\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$$

μέγιστο ιδεώδες

$$\underbrace{\langle y_1-b_1,\dots,y_m-b_m\rangle}_{\text{μέγιστο ιδεώδες}} \subset \Phi^{*-1}(m_\alpha)$$

αφού $\Phi^*(y_j-b_j) \in m_\alpha$

$$\langle y_1-b_1,\dots,y_m-b_m\rangle = \Phi^{*-1}(m_\alpha)$$

Ορισμός V αλγεβρικό σύνολο με δακτύλιο συντεταγμένων

$k[V]$

$(V, k[V])$ λέγεται αφινική αλγεβρική πολ/τα.

Spm $k[V]$ $\Phi : V \longrightarrow W$, $\Phi^{\#}$ ομομορφισμο αλγεβρων

$\Phi^{\#} : W \longrightarrow V$

$$(\Phi, \Phi^{\#}) : (V, k[V]) \longrightarrow (W, k[W])$$ ομομορφισμος

Ορισμος R μια πεπ. παραγμενη k-αλγεβρα R χωρις να απαιτησουμε οτι δεν μηδενοδυναμα στοιχεια.

πχ. $R = k[x_1, \dots, x_n] / \langle f^2 \rangle$

Reduced = δεν εχει μηδενοδυναμα στοιχεια

$= \sqrt{0} = 0$

$\sqrt{I(V)} = I(V)$

$(\text{Spm}\, R, R)$ γενικευμενη αφινική πολ/τα. $k[x]/\langle x^2 \rangle$

Η προηγουμενη περιπτωση $(V, k[V]) = (\text{Spm}\, k[V], k[V])$

1-1

επι,

$k[V] = \dfrac{k[x_1, \dots, x_n]}{I(V)}$

Δηλαδη στις αφινικες αλγεβρικες πολ/τες δεν έχουμε μηδενοδυναμα ενω έχουμε στις γενικευμενες

$V = V(J)$

$I(V(J)) = \sqrt{I}$

Ένας ομομορφισμος S, R πεπ. παραγμενες k-αλγεβρες

$\psi : S \longrightarrow R$

επαγει

$\psi^{\alpha} : \text{Spm}\, R \longrightarrow \text{Spm}\, S$

$m \longrightarrow \psi_{\alpha}(m) = \psi^{-1}(m)$

μορφισμος τετοιων αλγεβρων.

nilpotents

$$\frac{k[x]}{\langle x^2 \rangle} \not\cong \frac{k[x]}{\langle x \rangle} \cong k$$

$$\text{Spm}\, \frac{k[x]}{\langle x^2 \rangle} = \text{Spm}\, \frac{k[x]}{\langle x \rangle} = \{ \langle x \rangle \} = \{ 0 \}$$

$(\{0\}, k) \neq \left(\{0\}, k[x]/\langle x^2 \rangle\right)$ first order infinitesimals.

$\varepsilon = 10^{-10}$

$\varepsilon^2 = 10^{-100} = 0$

$(\mathrm{Spm}\,R, R)$ σημεία, συναρτήσεις

Το $\mathrm{Spm}\,R$ ένα τοπολογικό χώρο.

$\forall f \in R$

$\underbrace{D(f)}_{\text{ανοιχτό}} = \{ m \in \mathrm{Spm}\,R : f \notin m \} \subset \mathrm{Spm}\,R$

Δηλαδή το $D(f)$ αποτελείται από όλα τα f που δεν μηδενίζονται στο m.

$k[x]$ $\quad \langle x-3 \rangle$ μέγιστο ιδεώδες του $k[x]$ $\quad k \cong k[x]/\langle x-3 \rangle$

$f \longrightarrow f \bmod \langle x-3 \rangle = f(3)$ $\quad v = 0$

$f(x) = \pi(x)(x-3) + v$ $\quad \deg v < 1$

v σταθερά.

$f(3) = \pi(3)\cancel{(3-3)}^{0} + v$

$f \bmod m =: f(m)$

$m = \langle x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n \rangle$

$f(x_1, \ldots, x_n)$

$f(x_1, \ldots, x_n) \bmod m = \underbrace{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_{\in k} \bmod m.$

$f(m) = 0 \Leftrightarrow f \bmod m = 0 \bmod m \Leftrightarrow f \in m.$

$D(x^2 + y^2 - 1) = \{ m \in \mathrm{Spm}\, k[x,y] : f \notin m \}$

$= \mathbb{A}^2_k \setminus V(f)$ το συμπλήρωμα του κύκλου

Τα σύνολα $D(f)$ αποτελούν μια βάση ανοιχτών για την τοπολογία Zariski.

$$U \text{ ανοιχτό} \Longleftrightarrow \bigcup_{a\in A} D(f_a)$$

$$V(f) = D(f)^c = \{ m \in \mathrm{Spm}(R) : f \in m \}$$

υπερεπιφάνειες

(Γενικά μια υπερεπιφάνεια είναι αλγεβρικό σύνολο που ορίζεται από μία μόνο εξίσωση)

$$\{p\} \subset V(I) \Rightarrow I\{p\} \supset I\,V(I)$$

$$p \in V(I) \overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} m \supset \sqrt{I}$$

μέγιστο ιδεώδες που αντ. στο p

$$p \in V(f) \Leftrightarrow m \supset \langle \sqrt{f} \rangle \supset \langle f \rangle \Rightarrow f \in m$$

$$V(I) = \bigcap_{f\in I} V(f)$$

$$D(I) = V(I)^c = \bigcup_{f\in I} D(f)$$

το τυχαίο συμπλήρωμα ιδεώδους

ένωση των ανοιχτών συνόλων.