III.11 Ασκήσεις

1. Έστω I ένα ιδεώδες του δακτυλίου R. Να αποδειχτεί ότι το
$$N_R := \{f \in R : f^m = 0 \text{ για καποιο } n \in \mathbb{N}\}$$
ταυτίζεται με το $\sqrt{I}$ στην περίπτωση που
$$V(I) = \mathrm{Spec}R.$$

2. Για μια πεπερασμένα παραγώμενη άλγεβρα R πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k, θεωρούμε το μέγιστο φάσμα $\mathrm{Spm}R$ εφοδιασμένο με την τοπολογία Zariski. Ως σύνολο το $\mathrm{Spm}R$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathrm{Spec}R$. Για ένα ιδεώδες J του R, για να διακρίνουμε το κλειστό σύνολο $V(J)$ (αντίστοιχα του ανοιχτό σύνολο $D(J)$ του $\mathrm{Spec}(R)$ θα γράφουμε $V_m(J)$ και αντίστοιχα $D_m(J)$ για το κλειστό και ανοιχτό υποσύνολο του $\mathrm{Spm}R$.

   Να αποδειχτεί ότι
$$V_m(J) = V(J) \cap \mathrm{Spm}R \text{ και } D_m(J) = D(J) \cap \mathrm{Spm}R$$
   Δείξτε ότι το sheaf αντιμεταθετικών δακτυλίων $\mathcal{O}_{\mathrm{Spm}R}$ πάνω από $\mathrm{Spm}R$ μπορεί να οριστεί ως
$$\Gamma(D_m(J), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}R}) = \Gamma(D(J), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}R}).$$

3. Θεωρούμε τον δακτύλιο $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ και τον χώρο $\mathbb{A}^n_k = \mathrm{Spec}R$. Αποδείξτε ότι για το ανοιχτό σύνολο $U = \mathbb{A}^n_k - \{0\}$, όπου το 0 είναι η αρχή συντεταγμένων του $\mathbb{A}^n k$, έχουμε
$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_k}) = R, \text{ για } n \geqslant 2.$$
   Συνεπώς, το U δεν είναι ένα αφινικό ανοιχτό σύνολο.

4. Για ένα sheaf $\mathcal{F}$ πάνω από ένα τοπολογικό χώρο X ορίστηκε το stalk του $\mathcal{F}$ στο x ως
$$\mathcal{F}_x = \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in U}} \mathcal{F}(U).$$
   Στο σύνολο
$$\mathbb{F} = \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$
   ορίζεται μια τοπολογία ως εξής. Ένα στοιχείο $s_x \in \mathcal{F}_x$ είναι εξ ορισμού το φύτρο μιας section $s \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ στο x, όπου V είναι ένα ανοιχτό που περιέχει το x. Θέτουμε $V(s)$ να είναι το υποσύνολο $\{s_y : y \in V\} \subset \mathbb{F}$. Δείξτε ότι μεταβάλλοντας τα x, s_x και $s \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ παίρνουμε μια τοπολογία η οποία για βάση ανοιχτών τα σύνολα $\{V(s)\}$. Θεωρούμε την $p : \mathbb{F} \to X$ την συνάρτηση που στέλνει τα στοιχεία του $\mathcal{F}_x$ στο x. Δείξτε ότι η p είναι συνεχής και τοπικά ομοιομορφισμός, δηλαδή ομοιομορφισμός από το $V(s)$ στο V.

   Το $\mathbb{F}$ θα λέγεται ο sheaf χώρος του $\mathcal{F}$ και η $p : \mathbb{F} \to X$ η συνάρτηση δομής του $\mathbb{F}$. Αποδείξτε τα

   (α΄) Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα sheaf προσθετικών ομάδων οι συναρτήσεις
$$\begin{aligned} a_\pm : \mathbb{F} \times_X \mathbb{F} = \{(ax, b_x) \in \mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_x : x \in X\} &\longrightarrow \mathbb{F}, \\ (a_x, b_x) &\longmapsto a_x \pm b_x \end{aligned}$$
   είναι συνεχείς. Η συνάρτηση
$$\begin{aligned} 0 : X &\longrightarrow \mathbb{F}, \\ x &\longmapsto 0_x \end{aligned}$$

είναι επίσης συνεχής, όπου 0_x είναι το μηδενικό στοιχείο της προσθετικής ομάδας $\mathcal{F}_x$. Αν το $\mathcal{F}$ είναι ένα sheaf αντιμεταθετικών δακτυλίων, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} m : \mathbb{F} \times_X \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F}, \\ (a_x, b_x) &\longmapsto a_x b_x \end{aligned}$$

είναι επίσης συνεχής.

(β') Για ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset X$, θέτουμε

$$\Gamma(U, \mathbb{F}) = \{s : U \to \mathbb{F} : p \circ s = \mathrm{Id}_U,\ \text{όπου } s \text{ συνεχής}\}.$$

Δείξτε ότι $\Gamma(U, \mathbb{F}) = \mathcal{U}$.

5. Για ένα presheaf $\mathcal{G}$ υπεράνω ενός τοπολογικού χώρου X ορίζουμε το stalk του $\mathcal{G}$ στο x,

$$\mathcal{G}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{G}(U).$$

Ορίζουμε μια τοπολογία στο

$$\widetilde{\mathbb{G}} = \prod_{x \in X} \mathcal{G}_x.$$

Ορίζουμε

$$\widetilde{\mathcal{G}}(U) = \{s : U \to \widetilde{\mathbb{G}} : p \circ s = \mathrm{Id}_U, s \text{ συνεχής}\}.$$

Δείξτε ότι το $\widetilde{\mathcal{G}}$ είναι ένα sheaf υπεράνω του X. Δείξτε ότι η φυσική συνάρτηση

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}(U), \\ t &\longmapsto \{U \ni y \mapsto t_y\}, \end{aligned}$$

είναι ομομορφισμός προσθετικών ομάδων ή αντιμεταθετικών δακτυλίων. Το $\widetilde{\mathcal{G}}$ θα λέγεται η sheafification του $\widetilde{\mathcal{G}}$. Δείξτε ότι ο sheaf χώρος $\widetilde{\mathcal{G}}$ είναι ομοιομορφισμός με το $\widetilde{\mathbb{G}}$.

IV.8 Ασκήσεις

1. Στην κατηγορία των συνόλων (Sets), για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $q_1 : X \to Z$, $q_2 : Y \to Z$, δείξτε ότι το ινώδες γινόμενο $(X \times_Z Y, (p_1, p_2))$ υπάρχει και ότι
$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y : q_1(x) = q_2(y)\}.$$

2. Σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ και για ένα μορφισμό $p : X \to Z$ και για τον ταυτοτικό μορφισμό $\mathrm{id}_Z : Z \to Z$ αποδείξτε ότι το ινώδες γινόμενο $X \times_Z Z$ υπάρχει και ότι $X \times_Z Z \cong X$.

3. Για ένα αντικείμενο X σε μια κατηγορία $\mathcal{C}$ ορίζουμε τον συναρτητή $h_X(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$. Τότε για $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ορίζουμε την συνάρτηση
$$\phi : \mathrm{Hom}(h_X, h_Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$
με
$$\phi(\eta) = \eta(X)(\mathrm{Id}_X) \in h_Y(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$
Δείξτε ότι η ϕ είναι 1-1 και επί.

4. Έστω L μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση ενός σώματος K και $\overline{K}$ η αλγεβρική κλειστότητα του K. Τότε $X = \mathrm{Spec}L$ και $Y = \mathrm{Spec}\overline{K}$ είναι σχήματα πάνω από το $Z = \mathrm{Spec}K$. Αποδείξτε ότι το $X \times_Z Y$ είναι ισόμορφο με το ευθύ άθροισμα $[L : K]$ το πλήθος αντιγράφων του $\mathrm{Spec}\overline{K}$ (δηλαδή ξένη ένωση σχημάτων).

5. Έστω
$$X_0 = \mathrm{Spe}\mathbb{R}[x, y]/\langle x^2 + y^2\rangle.$$
   (α΄) Δείξτε ότι το X_0 είναι ακέραιο σχήμα.
   (β΄) Δείξτε ότι το $X_0 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ είναι ανηγμένο αλλά όχι ανάγωγο.
   (γ΄) Δείξτε ότι υπάρχει μόνο ένα $\mathbb{R}$-valued point στο X_0 ενώ υπάρχουν άπειρα $\mathbb{R}$-valued points στο X_0.

6. Δείξτε ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα R-valued points στο X (δηλαδή $f : \mathrm{Spec}R \to X$) και στα ζευγάρια (x, g) σημείων $x \in X$ και τοπικών ομοιομορφισμών $g : \mathcal{O}_{X,x} \to R$.

7. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα k-ρητά σημεία του προβολικού χώρου $\mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ και στα σημεία $[a_0 : a_1 : \cdots : a_n]$ του προβολικού χώρου.