II.4 Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί το «ομογενές Nullstellensatz»: Αν το $I \subset S = k[x_0, \ldots, x_n]$ είναι ένα ομογενές ιδεώδες, και f είναι ένα ομογενές ιδεώδες κσι $f \in S$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού $\deg f > 0$ ώστε $f(P) = 0$ για κάθε $P \in V(I) \subset \mathbb{P}^n$, τότε $f^k \in I$ για κάποιο $k > 0$. Υπόδειξη: μετάβαση στον αφινικό χώρο $\mathbb{A}^{n+1}$ ο οποίος έχει ως δακτύλιο συντεταγμένων τον S.

2. Για ένα ομογενές ιδεώδες $I \subset S = k[x_0, \ldots, x_n]$, οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

   (α΄) $V(I) = \emptyset$

   (β΄) $\sqrt{I} = S$ ή $\sqrt{I} = S_+ = \oplus_{d>0} S_d$

   (γ΄) $I \supset S_d$ για κάποιο $d > 0$.

3. (α΄) Υπάρχει μια $1-1$ αντιστοιχεία (που αντιστρέφει τους εγκλεισμούς) ανάμεσα στα αλγεβρικά σύνολα του $\mathbb{P}^n$ και τα ομογενή ριζικά ιδεώδη του $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ που δεν ταυτίζονται με το $S_+ = \oplus_{d>0} S_d$ που δίνονται από το $Y \mapsto I(Y)$ και $I \mapsto V(I)$.

   (β΄) Δείξτε ότι το αλγεβρικό σύνολο $Y \subset \mathbb{P}^n$ είναι ανάγωγο αν και μόνο αν το $I(Y)$ είναι πρώτο ιδεώδες

   (γ΄) Αποδείξτε ότι το $\mathbb{P}^n$ είναι ανάγωγο.

4. Για $n, d > 0$ θεωρήστε τα μονόνυμα βαθμού d στις $n+1$ μεταβλητές $x_0, x_1, \ldots, x_n$ τα οποία και ονομάζουμε $M_0, M_1, \ldots, M_N$. Αποδείξτε ότι το πλήθος τους είναι $N + 1 = \binom{n+d}{n}$. Στην συνέχεια θεωρείστε την συνάρτηση

$$\begin{aligned} r_d : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ P = [a_0 : a_1 : \cdots : a_n] &\longmapsto [M_0(P) : \cdots : M_N(P)] \end{aligned}$$

   η οποία προκύπτει αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες a_i στα M_k. Αποδείξτε ότι η εικόνα $r_d(\mathbb{P}^n)$ είναι ένα προβολικό υποσύνολο του $\mathbb{P}^N$ και ότι ο r_d είναι ομοιομορφισμός του $\mathbb{P}^n$ στην εικόνα του r_d.

5. Θεωρείστε την συνάρτηση $\psi : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \to \mathbb{P}^N$, $N = rs + r + s$ η οποία δίνεται στέλνοντας $[a_0 : \cdots a_r] \times [b_0 : \cdots : b_s] \to [a_0 b_0 : \cdots : a_i b_j : \cdots : a_r b_s]$, όπου οι προβολικές συντεταγμένες $a_i b_j$ είναι λεξικογραφικά διατεταγμένες. Δείξτε ότι η ψ είναι καλά ορισμένη και 1-1. Δείξτε ότι η εικόνα είναι ένα προβολικό αλγεβρικό υποσύνολο του $\mathbb{P}^N$.