I.2 Ασκήσεις

1. (α΄) Θεωρούμε την επίπεδη καμπύλη $Y = V(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2_k$. Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων $k[Y]$ είναι ισόμορφος με πολυωνυμικό δακτύλιο μίας μεταβλητής.

   (β΄) Θεωρούμε την επίπεδη καμπύλη $Z = V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2_k$. Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων $k[Z]$ δεν είναι ισόμορφος με πολυωνυμικό δακτύλιο μίας μεταβλητής.

2. Θεωρούμε το σύνολο $Y = \{(t, t^2, t^3) : t \in k\} \subset \mathbb{A}^3_k$. Να αποδειχθεί ότι είναι αλγεβρικό και να βρεθούν γενήτορες του ιδεώδους του. Στην συνέχεια αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων είναι ισόμορφος με τον πολυωνυμικό δακτύλιο μίας μεταβλητής.

3. Να αποδειχθεί ότι μια k-άλγεβρα B είναι ισόμορφη με τον δακτύλιο συντεταγμένων αφινικού αλγεβρικού συνόλου αν και μόνο αν B είναι πεπερασμένα παραγώμενη k-άλγεβρα χωρίς μηδενοδύναμα στοιχεία.

4. Αν το Y είναι ανάγωγο σύνολο στο Y να αποδειχθεί ότι και η κλειστότητα του $\overline{Y}$ είναι επίσης ανάγωγο.

5. Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.

   (α΄) Αν I ιδεώδες του R αποδείξτε ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα ιδεώδη του R/I και τα ιδεώδη του R που περιέχουν το I.

   (β΄) Ένα σύνολο S θα λέγεται πολλαπλασιαστικό αν $1 \in S$ και για κάθε $a, b \in S$ έχουμε $ab \in S$. Αποδείξτε ότι αν P πρώτο ιδεώδες τότε $S = R \backslash P$ είναι πολλαπλασιαστικό. Αν $f \in R$ αποδείξτε ότι το σύνολο $S = \{f^n\}_{n \geqslant 0}$ είναι πολλαπλασιαστικό. Θεωρήστε το σύνολο $S^{-1}R = \{r/f\}$, όπου r/f είναι η κλάση ισοδυναμίας από ζευγάρια (a, s), $a \in R, s \in S$ όπου $(a, s) \cong (b, t)$ αν και μόνο αν $(at - bs)u = 0$ για κάποιο $u \in S$. Με τον ίδιο τρόπο που κατασκευάσαμε το σώμα κλασμάτων μιας ακέραιας περιοχής αποδείξτε ότι το σύνολο $S^{-1}R$ έχει δομή δακτυλίου.

   (γ΄) Δείξτε ότι τα πρώτα ιδεώδη του $S^{-1}R$ είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τα πρώτα ιδεώδη του R που έχουν κενή τομή με το S. Στην περίπτωση που $S = R \backslash P$ το τελευταίο σύνολο ταυτίζεται με τα πρώτα ιδεώδη του R που περιέχονται στο P.

6. Θεωρούμε το αλγεβρικό σύνολο $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ το οποίο ορίζεται από τα πολυώνυμα $x^2 - yz$ και $xz - z$. Να δειχθεί ότι το Y είναι ένωση τριών ανάγωγων αλγεβρικών συνόλων για τα οποία να βρεθούν τα πρώτα ιδεώδη τους.

7. Να αποδειχθεί ότι κάθε ανοιχτό σύνολο σε ένα ανάγωγο τοπολογικό χώρο είναι πυκνό και ανάγωγο. Να δειχθεί ότι αν $Y \subset X$ είναι είναι ανάγωγο στην τοπολογία που επάγεται από το X, τότε και το $\overline{Y}$ είναι ανάγωγο.

8. Έστω ένα $Y \subset \mathbb{A}^n_k$ αλγεβρικό σύνολο διάστασης r. Αν η H είναι υπερεπιφάνεια στο $\mathbb{A}^n_k$ με $Y \subsetneq H$ τότε να δειχθεί ότι κάθε ανάγωγη συνιστώσα του $Y \cap H$ έχει διάσταση $r - 1$.

9. Έστω I ιδεώδες του $k[x_1, \ldots, x_n]$ ιδεώδες το οποίο παράγεται από r το πλήθος στοιχεία. Να δειχθεί ότι κάθε ανάγωγη συνιστώσα του $V(I)$ έχει διάσταση $\geqslant n - r$.