1

Ιδέα: Μελέτη συναρτήσεων αντί γεωμετρικού αντικειμένου

Αλγεβρικές Πολ/τες

Αλγεβρικά σύνολα

Γεωμετρία λύσεων του συστήματος

$$f_\alpha(x_1,\dots,x_n)=0 \qquad \alpha=1,\dots,\ell \qquad f_\alpha \in \overset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}[x_1,\dots,x_n]$$

Θέλουμε αλγεβρικά κλειστό σώμα αλλιώς το σύνολο λύσεων μπορεί να είναι κενό. πχ $x^2+y^2=-1$.

k αλγεβρικά κλειστό σώμα / Αντικατάσταση k από αντιμεταθετικό δακτύλιο.

A^n_k συμβολισμός αντί του k^n.

"$(x_1,\dots,x_n)\in k$" + δομή δακτυλίου συναρτήσεων.

$$V(f_1,\dots,f_\ell)=\{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in k^n \mid f_\alpha(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0,\ \alpha=1,\dots,\ell\}$$

$$\forall g\in\langle f_1,\dots,f_n\rangle \qquad g(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0 \qquad \forall(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in V(f_1,\dots,f_\ell)$$

$$g=\sum_{\alpha=1}^{\ell} g_\alpha(x_1,\dots,x_n)\, f_\alpha(x_1,\dots,x_n)$$

Διανυσματικός χώρος ανεξάρτητος της βάσης

Γενικά $J \lhd k[x_1,\dots,x_n]$ έχουμε

$$V(J)=\{(b_1,\dots,b_n)\in k^n \mid g(b_1,\dots,b_n)=0 \ \forall g\in J\}$$

Gröbner basis: "καλές" βάσεις του J.

Λήμμα $I=(f_1,\dots,f_\ell)$

$V(I)=V(f_1,\dots,f_\ell)$

Αποδ Προφανώς $V(f_1,\dots,f_\ell)\subset V(I)$. Αφού $g\in I$ είναι συνδυασμός

Έστω $(b_1,\dots,b_n)\in V(I)$. Αφού $\forall f_\alpha\in I$ $f_\alpha(b_1,\dots,b_n)$ $\alpha=1,\dots,\ell$

$\Rightarrow V(I)\subset V(f_1,\dots,f_\ell)$

$V((0))=k^n$ κυρία συνθήκη.

Θεώρημα: Hilbert basis R Noetherian $\Rightarrow$ R[x] noetherian

$I\lhd k[x_1,\dots,x_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

($R[x_1,\dots,x_n]$ R Noether ring) $\rightsquigarrow$ θεώρημα

Υπάρχουν και δακτύλιοι που δεν είναι Noether $C^\infty(\mathbb{R})$.

Έστω ένα μη πεπ. παραγ. ιδεώδες α $\langle b_1,\dots,b_n\rangle \neq$, $f_n\in\alpha\setminus b_n$ έχει ελάχιστο βαθμό

$\deg f_0 \le \deg f_1$, όχι φθίνουσα ακολ.

Αλγεβρικά σύνολα του A^1_k: πεπ. σημεία, $\emptyset$, A^1_k

Είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα αλγεβρ

Αν $I \neq k[x_1, \dots, x_n]$, k αλγεβρικά κλειστό. $V(I) \neq \emptyset$.

<u>Πρόταση</u> I, J, I_λ ιδεώδη $\lambda \in \Lambda$ οποιδήποτε

(i) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$

(ii) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda\right)$

(iii) $V(I) \supset V(J)$ για $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$ $\quad V(I) = V(\sqrt{I})$

$\sqrt{I} \supset I$

$\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ ιδεώδες που παράγεται από τα $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (η ένωση δεν είναι ιδεώδες!)

$\sqrt{I} = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n],\ f^m \in I \}$ ~~για m~~
για κάποιο $m \in \mathbb{N}$.

Πχ $I = \langle (x^2+y^2-1)^5 \rangle$ $\quad \sqrt{I} = \langle x^2+y^2-1 \rangle$

Άσκηση: Δείξτε ότι $\sqrt{I}$ είναι ιδεώδες

<u>Αποδ:</u>

$I \subset J \Rightarrow V(I) \supset V(J)$ (αν κάτι είναι ρίζα όλων των πολλών είναι και των λιγότερων)

$V(I \cap J) \supset V(I)$ $\quad V(I \cap J) \supset V(J)$

Άρα $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$

Αντιστρόφως αν $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(I \cap J)$ αν $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \notin V(I)$ τότε $\exists f \in I$ ώστε $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$.

Για <u>τυχαίο</u> $g(x_1, \dots, x_n) \in J$ το $h = f \cdot g \in I \cap J \Rightarrow$

$0 = h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \underset{\neq 0}{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}\, g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$

$V(I \cap J) \subset V(I) \cup V(J)$.

9 Φεβ. 2016 σελ. 9

Απόδειξη Hilbert basis theorem

$\mathfrak{a} \triangleleft R[x]$

υπάρχει ακολουθία

$\{f_0, f_1, \dots\}$ ώστε $b_n = \langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle$

τότε $f_n \in \mathfrak{a} \setminus b_n$ ελαχίστου βαθμού.

$\deg(f_0), \deg(f_1), \dots$ όχι φθίνουσα ακολουθία

$a_n = \mathrm{Lead}(f_n)$ $\quad \bar{b} = \alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots$ $\quad$ R Noetherian

$(\alpha_0) \subset (\alpha_0, \alpha_1) \subset \dots (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ τερματίζεται

$b = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{N-1} \rangle$

$\alpha_N = \sum_{i<N} u_i \alpha_i \quad u_i \in R$

$g = \sum_{i<N} u_i X^{\deg f_N - \deg f_i} f_i$ $\quad$ leading term = leading term of f_n

leading term u_i

$g \in b_N$ ✓

$f_N \notin b_N \Rightarrow f_N - g \in \mathfrak{a} \setminus \bar{b}_N$ βαθμού μικρότερου του $\deg f_N$.

3

Hilbert's Nullstellensatz

$V(I) \neq \emptyset$ $\qquad x^2+y^2+1=0$ στο $\mathbb{Q}$

Θεωρημα $I \triangleleft k[x_1,\dots,x_n]$ υπερ αλγεβρικα κλειστου σωματος k δεν περιέχει την ταυτοτητα ($I \neq k[x_1,\dots,x_n]$) τοτε $V(I)\neq\emptyset$.

Αποδ.

$I \neq k[x_1,\dots,x_n]$ υπάρχει μέγιστο ιδεωδες $m \supset I$. Τοτε $V(I)\supset V(m)$. Αρκει να αποδειξουμε ότι $V(m)\neq \emptyset$.

Υποθετουμε χπτγ I μεγιστο $=m$.

Το $k[x_1,\dots,x_n]/m$ είναι σωμα που περιέχει το k ($k \subset k[x_1,\dots,x_n]/m$)

Αφου k αλγ. κλειστο το επόμενο λημμα* θα μας δωσει $k[x_1,\dots,x_n]_{\bmod m} = k$. Αρα $x_j \bmod m$ καθορίζει a_j στο k

$x_j - a_j \in m$ αφου $x_j - a_j \equiv 0 \bmod m$ Αρα $(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)\subset m$

Ομως $(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$ μέγιστο $\Rightarrow m=(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$

$V(m)=\{(a_1,\dots,a_n)\}$

(*) **Πορισμα** Τα μέγιστα ιδεωδη στο $k[x_1,\dots,x_n]$ υπερ αλγεβρικά κλειστού σώματος έχουν την μορφη
$(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$ $\quad a_j\in k$

Το (*) ονομαζεται ασθενες Nullstellensatz.

Λήμμα* Αν ακ. περιοχη R πεπ. παραγομενη υπερ σώματος K (που δεν είναι αλγ. κλειστο κατ. ανάγκη) είναι σώμα, τότε κάθε στοιχειο του R είναι αλγεβρικο υπέρ το K.

Απδ.

$R = K[z_1,\dots,z_m]$ Θα πρέπει να δειξουμε ότι τα $z_1,\dots,z_m$ είναι αλγεβρικα υπερ το K. Αν $m=1$ αν το z_1 ~~είναι~~ δεν είναι αλγεβρικο τότε είναι υπερβατικο $\Rightarrow R$ όχι σωμα.

$m\geq 2$ $\quad z_1\in R$ $\quad K(z_1)$ είναι υπόσωμα του R

$R = K(z_1)[z_2,\dots,z_m]$

R γενναται απο $m-1$ στοιχεία $z_2,\dots,z_m$ υπερ το $K(z_1)$. Επαγωγικη υπόθεση $z_2,\dots,z_m$ είναι αλγεβρικα υπερ το $K(z_1)$.

Μπορει το z_1 να είναι υπερβατικό όμως;

Δηλαδή για κάθε z_j υπάρχει $f_j \in K(z_1)[x]$ με συντελεστές στο $K(z_1)$ με το z_j ως ρίζα.

Πολ/ντας με στοιχείο του $K(z_1)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$(**)\quad f_j(x) = A_j(x)\, x^{n_j} + B_j^{(1)}(z_1)\, x^{n_j-1} + B_j^{(2)}(z_1)\, x^{n_j-2} + \dots + B_j^{(n_j)}(z_1)$$

$A_j(z_1),\ B_j^{(e)}(z_1) \in K[z_1]$

$$A(z_1) = \prod_{j=2}^{m} A_j(z_1)$$

Και ορίζουμε $S \subset R$ $\quad S = K\left[z_1, \frac{1}{A(z_1)}\right]$

R σώμα $1/A(z_1) \in R$ και S υποδακτ.

$R = S[z_2, \dots, z_m]$ σαφές, ο S έχει το z_1.

Πολ/ζω την (**) με $A(z_1)/A_j(z_1)$ και διαιρώ με $A(z_1)$

Τότε

$g_j(x) = x^{n_j} + b_j^{(1)} x^{n_j-1} + \dots + b_j^{(n_j)}$ μονικό πολυώνυμο με συντελεστές στον S. z_j είναι ακέραιο υπερ S. Τα ακ. στοιχεία αποτελούν ~~R σώμα~~ δακτύλιο, άρα κάθε στοιχείο του R είναι ακέραιο.

Αφού R σώμα S επίσης σώμα (θα το δείξουμε).

α μη μηδενικό στο S, $\alpha^{-1} \in R$ και α^{-1} είναι ρίζα μονικού πολυωνύμου με συντελεστές στο S.

$$\alpha^{-e} + b_1 \alpha^{-e+1} + b_2 \alpha^{-e+2} + \dots + b_e = 0 \qquad b_j \in S$$

$$\Rightarrow 1 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + \dots + b_e \alpha^e = 0 \Rightarrow \alpha^{-1} = -(b_1 + b_2 \alpha + \dots + b_e \alpha^{e-1}) \in S$$

$\Rightarrow \alpha \in S \Rightarrow \alpha^{-1} \in S \Rightarrow S$ σώμα.

Αν z_1 υπερβατικό υπέρ το K τότε $K[z_1]$ είναι πολ. δακτ. υπέρ το K

$\alpha \in K[z_1, 1/A(z_1)]$

$\alpha = \frac{F(z_1)}{A(z_1)^m}$ $\quad F(z_1) \in K[z_1]$ $\quad (F(z_1), A(z_1)) = 1$ τότε το

α^{-1} δεν εκφράζεται ως στοιχείο $\frac{G(z_1)}{A(z_1)^s}$, $G(z_1) \in K[z_1]$

και το S δεν μπορεί να είναι σώμα.

Άρα το z_1 επίσης αλγεβρικό.

3

(ii) $I_\mu \subset \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$

$$V(I_\mu) \supset V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)$$

άρα

$$\bigcap_{\mu\in\Lambda} V(I_\mu) \supset V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)$$

$\forall \lambda$ γράφουμε I_λ σε όρους γεντόρων $I_\lambda = \langle h_{\lambda 1}, \dots h_{\lambda m_\lambda} \rangle$

για

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$ έχουμε

$h_{\lambda_j}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad j = 1, \dots, m_\lambda$

Τα $\{h_{\lambda j}\}_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ 1\le j\le m_\lambda}}$ γεννούν το $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)$

(iii) $I \subset \sqrt{I} \Rightarrow V(\sqrt{I}) \subset V(I)$

Αρκεί να δείξουμε ότι $V(\sqrt{I}) = V(I)$.

Έστω $f \in \sqrt{I} \Rightarrow f^m \in I$ για $m \in \mathbb{N}$. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(I)$

$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^m = 0 \Rightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(\sqrt{I})$.

<u>Πόρισμα</u> $I_1, \dots, I_s$ πεπ.

$$\bigcup_{j=1}^{s} V(I_j) = V\left(\bigcap_{j=1}^{s} I_j\right) \qquad s < \infty$$

Αν το $s = \infty$ δεν ισχύει

$c_1, \dots, c_n$ κριθρ. άπειρη συλλογή στοιχείων του k.

$I_j = (x - c_j)$

$I_{j_1} \cap \dots \cap I_{j_s} = \prod_{i=1}^{s} (x - c_{j_i})$

$\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = (0)$ πρέπει να ισχυει.

$\bigcup_{j=1}^{\infty} V(I_j) = \{c_1, c_2, \dots \qquad V((0)) = \mathbb{A}^1_k \qquad \mathbb{A}^1_k \neq \{c_1, \dots, c$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} V(I_j) \subsetneq V\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j\right)$$

Συμβολισμός

$V \subset \mathbb{A}^n_k$ — V υποσύνολο σε ιδεώδες

$I(V) = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \;\; \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V \}$ για

$J \subset I(V(J))$ Αν το $V = V(J)$ για κάποιο ιδεώδες

Όμως

$V(f^2) = V(f)$ άρα δεν μπορώ να έχω ισότητα. $I(V(J)) = J$

Θεώρημα $J \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ $I(V(J)) = \sqrt{J} \supset J$

Προφανώς $\sqrt{J} \subset I(V(J))$ από τον ορισμό.

Αν $f \in \sqrt{J} \Rightarrow f^m \in J \Rightarrow f^m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \;\forall\; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in V(J) \Rightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f \in \sqrt{J}$ για $f \in I(V(J))$

δηλαδή $f^m \in J$ για κάποιο $m > 0$, $m \in \mathbb{N}$.

x_0 μια νέα μεταβλητή $\tilde{J}$ το ιδεώδες που παράγεται από

$1 - x_0 f(x_1, \dots, x_n)$ και J στον $k[x_0, \dots, x_n]$ σε $n+1$ μεταβλητές.

(localization).

Αν $V(\tilde{J}) \neq \emptyset$ για $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in V(\tilde{J}) \subset k^{n+1}$ έχουμε

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in V(J)$ αφού $J \subset \tilde{J}$ $(V(\tilde{J}) \subset V(J))$

Άρα $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$

$1 - x_0 f \in \tilde{J}$ έχουμε $0 = 1 - \alpha_0 f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$, άτοπο.

Άρα $V(\tilde{J}) = \emptyset$. Τότε όμως $\tilde{J} = k[x_0, \dots, x_n] \Rightarrow \tilde{J} \ni 1$

mod $\tilde{J}$ δεν υπάρχει modulo!

$1 = \text{επί}\,(1 - x_0 f(x_1, \dots, x_n))\; h(x_0, \dots, x_n) \cdot (1 - x_0 f(x_1, \dots, x_n)) + \sum_{j=1}^{\ell} g_j(x_0, \dots, x_n) f_j(x_1, \dots, x_n)$ $\quad h, g_j \in k[x_0, \dots, x_n]$, $f_j \in J$

Αντικαθιστώ το $1/f$ στο x_0 και πολ/ζω με δύναμη του f

$f^p = \dots h(\tfrac{1}{f}, \dots) \dots \in J$

Αρκεί να περιοριστούμε στα reduced ιδεώδη για γεωμετρικές εφαρμογές αφού $V(\sqrt{I}) = V(I)$.

Όμως τα μη reduced ιδεώδη έχουν πληροφορία "διαταραχής" όπως και οι πολ/ές ρίζες.

$V = V(J_1) \supset W = V(J_2)$ τότε

$\sqrt{J_1} = I(V(J_1)) \subset I(V(J_2)) = \sqrt{J_2}$. Αν $\sqrt{J_1} = \sqrt{J_2}$ τότε $V = W$ άτοπο. □

Άσκηση 2.

Όταν $V(I)$ δεν είναι $\emptyset$ ούτε $\mathbb{A}^n_k$ τότε αποδείξτε ότι είναι το συμπλήρωμα

$$V(I)^c = \mathbb{A}^n_k \setminus V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n_k \mid \exists f \in I \text{ με } f(a_1, \dots, a_n) \neq 0\}$$

δεν είναι αλγεβρικό σύνολο.

Αποδ.

Έστω ότι υπάρχει $J \in k[x_1, \dots, x_n]$ ώστε $V(I)^c = V(J)$.

$V(I) \cup V(J) = \mathbb{A}^n_k$ $\quad V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) = \mathbb{A}^n_k \Rightarrow$

$\sqrt{I \cap J} = (0)$. Τότε $I \cap J = (0)$. $(I \subset \sqrt{I})$

Αν $I \neq (0)$ και $J \neq (0)$ τότε $\exists f, g$ $f \in I$, $g \in J$, $f, g \neq 0$

$\Rightarrow f \cdot g \neq 0 \Rightarrow f \cdot g \in I \cap J$ άτοπο αφού $I \cap J = (0)$.

Άρα

$I = (0)$ ή $J = (0)$ $\Rightarrow V(I) = \mathbb{A}^n_k$ ή $V(I) = \emptyset$ άτοπο.

Άσκηση 3 Δείξτε ότι το σύνολο των συμπληρωμάτων αλγεβρικών συνόλων στον $\mathbb{A}^n_k$

$$\mathcal{J} = \{V(I)^c : I \lhd k[x_1, \dots, x_n]\}$$

έχει τις ιδιότητες

(i) $\emptyset \in \mathcal{J}$ $\mathbb{A}^n_k \in \mathcal{J}$ (ii) $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{J}$ αν $O_1 \in \mathcal{J}$ και $O_2 \in \mathcal{J}$

(iii) $\bigcup_{\lambda \in} O_\lambda \in \mathcal{J}$ για $O_\lambda \in \mathcal{J}$ και $\lambda \in \Lambda$

Αποδ

(1) $V(0) = \mathbb{A}^n_k$

$V(k[x_1,\dots,x_n]) = \emptyset$

(2) $O_1 = V(\mathfrak{I}_1)^c$ $\quad O_1 \cap O_2 = (V(\mathfrak{I}_1) \cup V(\mathfrak{I}_2))^c = V(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)^c \in \mathfrak{T}$

$O_2 = V(\mathfrak{I}_2)^c$

3) $O_\lambda = V(\mathfrak{I}_\lambda)^c \quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V(\mathfrak{I}_\lambda)^c = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(\mathfrak{I}_\lambda)\right)^c = V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{I}_\lambda\right)^c \in \mathfrak{T}$

Ορίζουμε την τοπολογία Zariski στο $\mathbb{A}^n_k$ και στο $V(I)$ ως την επαγόμενη.

Πρόβλημα Zariski στο $\mathbb{A}^1_k$ κλειστά: σημεία, $\mathbb{A}^1$, $\emptyset$.

α, b τυχαία σημεία ~~αλλά~~ ανοιχτές περιοχές τους τέμνονται.

Η Zariski στο $\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k = \mathbb{A}^2_k$ δεν είναι η τοπολογία γινόμενου

Καθε Zariski ~~ανοιχτό~~ στην $k = \mathbb{C}$ είναι συνδεσ κλειστό.

Τα ανοιχτά είναι πυκνά.

Affine Algebraic Varieties

Algebraic set reducible αν είναι ένωση δύο αλγεβρικών συνόλων

$V = V_1 \cup V_2 \qquad V \neq V_1, \ V \neq V_2$

Αν δεν είναι reducible λέγεται irreducible ανάγωγο

Συνθήκη

$V(\mathfrak{I}) = V(\mathfrak{I}_1) \cup V(\mathfrak{I}_2) \qquad V(\mathfrak{I}) \neq V(\mathfrak{I}_1)\ ;\ V(\mathfrak{I}) \neq V(\mathfrak{I}_2)$

$V(\mathfrak{I}) \neq V(\mathfrak{I}_j) \Rightarrow \sqrt{\mathfrak{I}} = I(V(\mathfrak{I})) \subsetneq I(V(\mathfrak{I}_j)) = \sqrt{\mathfrak{I}_j}$

Συνεπώς $\exists\ f_1, f_2$ πολ. ώστε $f_j \in \sqrt{\mathfrak{I}_j}$ και $f_j \notin \sqrt{\mathfrak{I}}$

όμως $f_1 \cdot f_2 \in \sqrt{\mathfrak{I}}$ (μηδενίζονται στο $V(\mathfrak{I})$) $\Rightarrow \sqrt{\mathfrak{I}}$ δεν είναι πρώτο

f_1 μηδενίζεται στο $V(\mathfrak{I}_1)$

f_2 — $V(\mathfrak{I}_2)$

Πρόταση V αλγεβρικό σύνολο είναι ανάγωγο αν το $I(V)$ είναι πρώτο.

Αποδ $I(V)$ δεν είναι πρώτο για reducible σύνολα. Άρα

αν $I(V)$ prime $\Rightarrow V$ irreducible.

Έστω V irreducible και έστω $I(V)$ όχι prime $\exists\ f_1, f_2$

$f_1, f_2 \notin I(V)$, $f_1 \cdot f_2 \in I(V)$.

Έστω $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ το ιδεώδες που παράγεται από το $I(V)$ και f_1 / $\frac{I(V)}{I(V)}$ $\frac{f_1}{f_2}$

Αφού $f_1, f_2 \notin I(V)$

$V(\mathfrak{I}_1) \subsetneq V$ και $V(\mathfrak{I}_2) \subsetneq V$

όμως $f_1 \cdot f_2 \in I(V) \Rightarrow \forall (a_1,\dots,a_n)$ του V f_1 ή f_2 είναι 0

$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ μηδενίζει το $I(V)$ stand.
και f_1 ή f_2

$$V = V(J_1) \cup V(J_2)$$

άτοπο λόγω της αναγωγής υπόθεσης

Το (0) ιδεώδες είναι πρώτο στο $k[x_1,\dots,x_n] \Rightarrow \mathbb{A}^n_k$ είναι affine
(Άρα $V(J_1)^c$ δεν θα μπορούσε να είναι αλγεβρικό!)
$\mathbb{A}^1$ affine line $\mathbb{A}^2$ affine plane.

<u>Παρ.</u> $I=(F)$ principal ideal στον $k[x_1,\dots,x_n]$ είναι πρώτο αν F ανάγωγο. Τότε το $V(F)$ θα λέγεται <u>affine hypersurface</u>.
$n=2$, $n=3$ affine curve, affine surface.

V algebraic set.

$k[V] := k[x_1,\dots,x_n]/I(V)$ λέγεται ο δακτύλιος συντεταγμένων.

<u>Πόρισμα.</u> V irreducible αν $k[V]$ είναι ακ. περιοχή.

<u>Παράδειγμα</u> $C = V(x^2+y^2-1)$, $k[C] = k[x,y]/(x^2+y^2-1)$

$u = x+iy$, $v = x-iy$

$k[C] = k[u,v]/(uv-1) \cong k[u, 1/u]$

$$\varphi : k[x,y]/(x^2+y^2-1) \xrightarrow{\cong} k[u, 1/u]$$
$$x \longmapsto \tfrac{1}{2}\left(u+\tfrac{1}{u}\right)$$
$$y \longmapsto \tfrac{1}{2i}\left(u-\tfrac{1}{u}\right)$$

$x^2+y^2 = \frac{1}{4}\left(u+\frac{1}{u}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(u-\frac{1}{u}\right)^2$

$u^2+2+\frac{1}{u^2}$

$-u^2+2$

<u>αντίστροφο</u>

$$\varphi^{-1} : k[u, 1/u] \longrightarrow k[x,y]/(x^2+y^2-1)$$
$$u \longmapsto x+iy$$

char $k=2$ $k[C] = k[x,y]/(x^2+y^2-1) \cong k[x]$

c

Μορφισμοι αλγεβρικων συνόλων

$V, W_{\subset k(x_1,\dots,x_n)}$

$\mathbb{A}^m_k \supset V \longrightarrow W \subset \mathbb{A}^n_k$ συνολοθεωρητική απεικόνιση

ορισμένη σε όρους πολυωνύμων.

$k[V] = k[x_1,\dots,x_m]/I(V) \qquad k[W] = k[y_1,\dots,y_n]/I(W)$

$\varphi : V \to W$ είναι μορφισμος αν η φ δίνεται

$$y_j = f_j(x_1,\dots,x_m) \in k[x_1,\dots,x_m]$$

Δηλαδη $P = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ έχει συντεταγμένες ως

$$\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_m),\dots,f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_m))$$

ομως υπάρχουν σχέσεις στα $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Αρα η γραφη ως πολυώνυμα δεν είναι μοναδικη.

Για παράδειγμα αν υπάρχει σχεση $(\alpha_1)^2 = \alpha_2$

τοτε για $f(x,y) = xy$, και $g(x,y) = x^3$

$$f(\alpha_1\alpha_2) = \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1^3 = g(\alpha_1,\alpha_2)$$

Θα δώσουμε έναν αλλαγμένο ορισμο σε λίγο. (Τα πολυώνυμα δεν περιγραφονται πληρως)

<u>Παράδειγμα</u>

$C = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_k \qquad k[\mathbb{A}^1] = k[t]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k[\mathbb{A}^2] = k[x,y]$

$x = t^2 \quad y = t^3$ δίνει συνάρτηση $\mathbb{A}^1 \longrightarrow C$

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^2 \supset C,$$
$$\alpha \longrightarrow (\alpha^2, \alpha^3)$$

Αλλα ορίζει και μορφισμο (όχι επί) $\tilde{\varphi} : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$

$$\alpha \mapsto (\alpha^2, \alpha^3).$$

Ο μορφισμος $\varphi : \mathbb{A}^1 \to C$ ορίζει ένα ομομορφισμό δακτυλίων $\varphi^{\#}$ $k[C] \to k[\mathbb{A}^1]$

$$\varphi^{\#} : k[C] = k[x,y]/y^2-x^3 \longrightarrow k[\mathbb{A}^1] = k[t]$$

εκφράζει τα x, y ως συναρτησεις του t.

$$\bar{f}(x,y) = f(x,y) \bmod (y^2 - x^3) \longmapsto f(t^2, t^3)$$

Επιπλέον έχουμε τον παρακάτω ορ.

$$\tilde{\varphi}^\#: k[\mathbb{A}^2] = k(x,y) \longrightarrow k[\mathbb{A}^1] = k[t]$$
$$f(x,y) \longrightarrow f(t^2,t^3)$$

$\tilde{\varphi}^\#(f(x,y)) = f(t^2,t^3)$ και $\ker\varphi^\# = y^2-x^3$.
είναι τα πολυώνυμα που μηδενίζονται στο y^2-x^3

$$i^\#: k[x,y] \longrightarrow k[x,y]/_{y^2-x^3} \xrightarrow{\varphi^\#} \quad \text{έχουμε}$$
$$\tilde{\varphi}^\# = \varphi^\# \circ i^\#$$

Παράδειγμα

$E = V(y^2-x^3+1) \subset \mathbb{A}^2 \qquad D = V(x_2^3 - x_1^3 + 1,\ x_3 - x_1^2) \subset \mathbb{A}^3$

$x_1 = x$

$x_2 = y$

$x_3 = x^2$

ορίζει μορφισμό $E \to D$

$I := (x_2^2 - x_1^3 + 1,\ x_3 - x_1^2)$

$J := (y^2 - x^3 + 1)$

$$\varphi^\#: k[D] = k[x_1,x_2,x_3]/I \longrightarrow k[E] = k[x,y]/J$$
$$g(x_1,x_2,x_3) \longmapsto g(x,y,x^2)$$

φ set theoretic bijection, $\varphi^\#$ ring ισομορφισμός

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^3$$
$$(\alpha,b) \longmapsto (\alpha,b,\alpha^2)$$
$$\tilde{\varphi}^\#: k[\mathbb{A}^3] = k[x_1,x_2,x_3] \longrightarrow k[\mathbb{A}^2] = k[x,y]$$
$$g(x_1,-,x_3) \longmapsto g(x,y,x^2)$$

7α

Λήμμα

R ακ. περιοχη πεπ. παραγομενη υπερ k είναι σώμα, τοτε καθε στοιχει ο είναι αλγεβρικο

Λήμμα

α) ~~α∈~~ A ακ. περιοχη ωστε $a \in A$ είναι αλγεβρικο υπερ k τοτε A είναι σωμα.

b) A σωμα περιέχεται σε affine k-algebra τοτε A είναι αλγεβρικο υπερ k

$a \in A$ $\quad k[\alpha]$ αρκει σώμα. $\quad k[X] \to A$, $f \mapsto f(\alpha)$

I kernel.

$A = k[X]/I$, $\alpha \notin I \neq 0$ (σωμα) $\Rightarrow I = f(x)$ f αναγωγο

I maximal A σωμα.

$A/\varphi^{-1}(m) \xrightarrow{\sim} B/m$ → είναι αλγεβρικη επεκταση του k ⇒ σώμα.

---

k αλγεβρες

$\varphi^{-1}(m)$ είναι μεγιστο

όχι

$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

$S/\varphi^{-1}(p) \xrightarrow[1-1]{\varphi} R/p$ είναι εντός ακ. περιοχης

(7)

Ένα στοιχείο του δακτυλίου συντεταγμένων $k[V]$ του αλγεβρικού συνόλου V μπορεί να θεωρηθεί ως κανονική συνάρτηση στο V.

$\varphi : V \xrightarrow{\varphi} W$ και f κανονική συναρτ. στο W

Τότε ο φ λέγεται μορφισμός $f \in k[W] \rightsquigarrow f\circ\varphi \in k[V]$

$\varphi^{\#} : k[W] \longrightarrow k[V]$ pull back.

$\varphi^{\#}(y_j) = y_j = f_j(x_1,\dots,x_n)$ $\quad$ $k[W] = k[y_1,\dots,y_n]$

$g(y_1,\dots,y_n)$

$\tilde{\varphi} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ πάντα μορφ. το

$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \longmapsto (f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\dots,f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_n))$

pull back

$\tilde{\varphi} : k[\mathbb{A}^n] = k[y_1,\dots,y_n] \longrightarrow k[\mathbb{A}^n] = k[x_1,\dots,x_n]$

$g(y_1,\dots,y_n) \longmapsto g(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))$

Μορφισμοί: περιορισμοί συναρτήσεων του περιβάλλοντος $\tilde{\varphi} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$.
Το περιβάλλον φαίνεται στον ορισμό.

Ορισμός

Αν $\varphi : V \to W$ συνολοθεωρητικός ισομορφισμός ΚΑΙ $\varphi^{\#}$ δακτύλιος ισομορφισμός δακτυλίων	ισομορφισμός

Δεν αναφέρεται στο περιβάλλον

Ισομορφα: ίδια για την αλγεβρική γεωμετρία
Περιγραφή ισομορφισμών μόνο από το αλγεβρικό σύνολο.

Points $V \longleftrightarrow$ maximal ideals του V

σημείο $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ του $V \subset \mathbb{A}^n$ αντιστοιχεί ένα (μέγιστο) ιδεώδες $(x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n)$

$\bar{x}_j$ η residue class του x_j στο $k[V] \cong k[x_1,\dots,x_n]/I(V)$

Τότε $(\bar{x}_1-\alpha_1,\dots,\bar{x}_n-\alpha_n)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $k[V]$

Αντιστρόφως τα μέγιστα στο $k[V]$ $\quad$ $\varphi^{-1}(m) : \varphi : k[x_1,\dots,x_n] \to k[x_1,\dots,x_n]/I$

είναι μέγιστα του $k[x_1,\dots,x_n]$

μέγιστο εδώ

$M \supset \varphi^{-1}(m) \supset I$ $\quad$ $S/\varphi^{-1}(m) \xrightarrow{\text{επί}} R/m \cong k$

Άσε το

$\mathbb{Z} \longleftrightarrow \mathbb{Q}$

$(0) \longleftrightarrow (0)$ maximal

not maximal

A ακ. περιοχή ώστε $a \in A$ είναι ρίζα h είναι σώμα.

A σώμα αφιέκεται υπερ. k-affine dom. A alg

$A \to B/m$ ker

$A/\varphi^{-1}(m) \longleftrightarrow B/m$ υποάλγεβρα

αλγεβρική επεκτάση του k

$\varphi^{-1}(m) = \{ f \in$ δακτύλιο πολυωνύμων $k[x_1, \dots, x_n]$ $\varphi(f)$ σώμα$\}$

$k[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow[\text{επί}]{\varphi} k[V]/m$ σώμα αλλά ορισμένη

$\varphi^{-1}(m)$ $\cong ?$ k

αν $\varphi(f) = \varphi(g) \bmod m$ τότε $\varphi(f-g) \in m \Rightarrow f-g \in \varphi^{-1}$.

άρα και 1-1.

Όμως αφού $\varphi^{-1}(m)$ μέγιστο $\varphi^{-1}(m) = (x_1 - b_1, \dots, x_n - b_n)$

Θα δείξουμε ότι $(b_1, \dots, b_n) \in V$

αρκεί $(x_1 - b_1, \dots, x_n - b_n) \supset I(V)$ άρα κάθε $f \in I$ μηδενίζεται στα $b_1, \dots b_n \Rightarrow (b_1, \dots, b_n) \in V$!

$\bar{O} \in m$ $\varphi^{-1}(\bar{O}) = I(V)$ έχουμε

$\varphi^{-1}(m) \supset \varphi^{-1}(\bar{O}) = I(V)$.

R αντιμεταθετικός δακτύλιος $Spm(R)$ = σύνολο των μέγιστων ιδεωδών του

Πρόταση Για ένα αλγεβρικό σύνολο V υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία του V και το $Spm(k[V])$

$k[V] = k[x_1, \dots, x_n]/I(V)$

το $(a_1, \dots, a_n) \in V \longleftrightarrow (x - a_1, \dots, x_n - a_n)$

Δίνεται μορφισμός $\varphi : V \to W$ ανάμεσα σε αλγεβρικά σύνολα.

Πως επάγεται ένας ομομ. δακτυλ.?

$\varphi((a_1, \dots, a_n)) = (f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_n(a_1, \dots, a_n))$

$f_j(a_1, \dots, a_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$

$\varphi^{\#}\ k[W] = k[y_1, \dots, y_n]/I(W) \longrightarrow k[V] = k[x_1, \dots, x_n]/I(V)$

$g(y_1, \dots, y_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)) \bmod I(V)$

$(\varphi^{\#})^{-1}(m_\alpha)$ είναι μέγιστο ιδεώδες του $k[W]$.

Θα δείξουμε

$k \simeq k[V]/m_\alpha$ $\qquad k[W]/(\varphi^{\#-1}(m_\alpha)) \longrightarrow k[V]/m_\alpha = k$

$k \overset{\shortparallel}{.}$

Άρα $\varphi^{\#-1}(m_\alpha)$ είναι το μέγιστο ιδεώδες του $k[W]$ που παράγεται από $(y_1-b_1,\dots,y_n-b_n)$ $b_j = f_j(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$

αφού $\varphi^{\#}(y_1-b_1,\dots,y_n-b_n)$

$f_j(x_1,\dots,x_m) - \underbrace{f_j(\alpha_1,\dots,\alpha_m)}_{b_j} \in (x_1-\alpha_1,\dots,x_m-\alpha_m)$ είναι συνάρτηση που μηδενίζεται στο μέγιστο ιδεώδες.

$\overset{\shortparallel}{y_j} \quad -$

αυτή η διαδικασία είναι η $\varphi^{\#}$.

$m = \sqrt{m} = I(V(m))$

μέγιστο = πρώτο.

$(y_1-b_1,\dots,y_n-b_n) \subseteq \varphi^{\#}(m_\alpha)$ μέγιστο άρα ταυτίζεται

Πρόταση

Για ένα μορφισμό $\varphi: V \longrightarrow W$ υπάρχει ένας k-ομομορφ.

$\varphi^{\#}: k[W] \longrightarrow k[V]$ (αυτός έχει ορισθεί στον 1ο ορισμό)

ώστε $\varphi^{\#-1}(m_\alpha)$ του μεγίστου m_α που ορίζεται από το $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ του V μέγιστο ιδεώδες του σημείου $\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ στο W

Αντιστρόφως: $\varphi: V \longrightarrow W$ οποιαδήποτε συνάρτηση δοσμένων

και $\varphi^{\#}: k[W] \longrightarrow k[V]$ k-ομομορφισμός και αν για τυχαίο $(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in V$

$\varphi^{\#-1}_{m_\alpha}$ είναι το μέγιστο ιδεώδες που αντιστοιχεί στο $\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$

τότε ο $\varphi: V \longrightarrow W$ είναι μορφισμός αλγ. συνόλων

Αποδ. β' μέρους.

οπουδήποτε.

$\varphi: V \longrightarrow W$, $\varphi^{\#}: k[W] \longrightarrow k[V]$.

$k[W] = k[y_1,\dots,y_n]/I(W)$ $\qquad k[V] = k[x_1,\dots,x_m]/I(V)$

Ο k-ομ. $\varphi^{\#}$ καθορίζεται

$\varphi^{\#}(\bar{y}_j)$ $\qquad \bar{y}_j = y_j \mod I(W)$

Θέτουμε θα είναι ίσο με κλάση πολυωνύμων

$\bar{f}_j(x_1,\dots,x_m) = \varphi^{\#}(\bar{y}_j) \mod I(V)$ $\qquad f_j \in k[x_1,\dots,x_m]$

Θα δείξουμε ότι η φ δίνεται από την

$V \longrightarrow W$ iff

$(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \longmapsto (f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_m),\dots,f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_m))$

m_α μέγιστο ιδεώδες του $k[V] \longrightarrow (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$

$(\bar{x}_1-\alpha_1,\dots,\bar{x}_m-\alpha_m) \qquad \bar{x}_j = x_j \bmod I(V)$

$$\varphi^\#(\bar{y}_j - f_j(\alpha_1,\dots,\alpha_m)) = f_j(x_1,\dots,x_m) - f_j(\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in m_\alpha$$ (προφανώς μηδενίζεται στο m_α.)

$$\varphi^{\#-1}(m_\alpha) = (\bar{y}_1 - f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_m),\dots,\bar{y}_n - f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_m))$$

Όμως εξ ορισμού το μέγιστο ιδεώδες $\varphi^{\#-1}(m_\alpha)$ αντιστοιχεί στο σημείο $\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ του W, δηλαδή

$$\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_m) = (f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_m),\dots,f_n(\alpha_1,\dots,\alpha_m)).$$

Ξαναορίζουμε.

Ορισμός $(V, k[V])$ V αλγεβρικό σύνολο, $k[V]$ δακτύλιος συν. λέγεται affine alg. variety.

$\varphi: V \longrightarrow W$ ~~αλγ. συν~~ set theo. map.

$\varphi^\#: k[W] \longrightarrow k[V]$ δίνεται $\varphi^{\#-1}(m_\alpha) = m_b$

$b=\varphi(\alpha)$ τότε $(\varphi,\varphi^\#)$ λέγεται μορφισμός

$$(\varphi,\varphi^\#): (V,k[V]) \longrightarrow (W,k[W])$$

φ bijective, $\varphi^\#$ ισομορφισμός.

Γιατί όλος αυτός ο κόπος. $A^n \supset V$ απαιτεί το $J \subset k[x_1,\dots,x_n]$

k: Άλγεβρα R, $\operatorname{Spm} R$ $\quad (\operatorname{Spm} R, R)$ affine variety. (όχι εξάρτηση / όχι embedding)

$R = k[x_1,\dots,x_n]/J$ άρα έχουμε εξ. $\quad \operatorname{Spm} R = V(J)$

$\sqrt{J} = J$ αλλά ισχύει και αν δεν είναι reduced

Presentations of R = embedings σε affine spaces

(8)

Για ένα ομομορφισμό $\varphi: S \to R$ ανάμεσα σε k-άλγεβρες
το $\varphi^{-1}(m)$ ιδεώδες μεγίστου είναι μέγιστο

$$\bar{\varphi}: S/_{\varphi^{-1}(m)} \to R/_{m} = k$$

αφού $k \subset S/_{\varphi^{-1}(m)}$ η $\bar{\varphi}$ είναι επί. Άρα το $S/_{\varphi^{-1}(m)}$ είναι σώμα.

$\bar{\varphi}$ ένα ~~1~~ 1 $\quad \bar{\varphi}(f) = \bar{\varphi}(g) \Rightarrow \bar{\varphi}(f-g) = 0 \Rightarrow f-g \in \varphi^{-1}(m)$.

Ο $\varphi: S \to R$ επάγει $\varphi^{\alpha}: \mathrm{Spm}\, R \to \mathrm{Spm}\, S$
$\qquad m \longmapsto \varphi^{-1}(m)$.

<u>Ορισμός</u> R πεπ. παραγόμενη άλγεβρα υπερ αλγεβ. κλειστό σώμα
$(\mathrm{Spm}\, R, R)$ affine alg. variety.
$(\mathrm{Spm}\, R, R) \quad (\mathrm{Spm}\, S, S) \quad (\varphi^{\alpha}, \varphi)$ συναρτ.
αποτελείται από $\varphi: S \to R$ και $\varphi^{\alpha}: \mathrm{Spm}\, R \to \mathrm{Spm}\, S$.
Τα R λέγονται regular functions on Spm.

Παράδειγμα

$R_n = k[x]/_{x^{n+1}}$ $\quad n = 0, 1.$ $\quad R_n$ έχει μοναδικό μέγιστο ιδεώδες

$\mathrm{Spm}\, R_n = \{*\}$.

R_n πολυώνυμο (επέκταση Taylor up to n).

Συνάρτηση σε μονοσύνολο: σταθερά. $(\mathrm{Spm}\, R_n, R_n)$ είναι συναρτήσεις σε περιοχή του 0.

$$\varphi_{n_1, n_2}: R_{n_2} = k[x]/(x^{n_2+1}) \longrightarrow R_{n_1} = k[x]/_{x^{n_1+1}} \qquad n_1 < n_2$$

$$\varphi^{\alpha}_{n_1, n_2}, \varphi_{n_1, n_2} \qquad (\mathrm{Spm}\, R_{n_1} : R_{n_1}) \longrightarrow (\mathrm{Spm}\, R_{n_2}, R_2)$$

Ringed space:

Οι συναρτήσεις έχουν περισσότερη πληροφορία από τον χώρο.

Μελέτη αντιμεταθετικών δακτυλίων: ότι χρειαζόμαστε για την αλγεβρική Γεωμετρία.

Όχι: $(\mathrm{Spm}R, R) \longleftrightarrow \{\mathbb{R}^n, C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\}$

Θα "κολλήσουμε" κομμάτια $\mathrm{Spm}R$

Ανοιχτά σύνολα

$(\mathrm{Spm}R, R)$ ορίζουμε για κάθε $f \in R$

$$D(f) = \{ m \in \mathrm{Spm}R \mid f \notin m \}$$

Η τοπολογία που έχει τα $D(f)$ ως βάση ανοιχτών λέγεται η Zariski τοπολογία στο $\mathrm{Spm}R$. Δηλαδή U ανοιχτό ανν $\boxed{U = \bigcup_{\alpha \in A} D(f_\alpha)}$

$m \supseteq I$

$$D(f)^c = V(f) = \{ m \in \mathrm{Spm}R \text{ ώστε } f \in m \}$$

Point $\subseteq V(I)$

$V(m) = P$

Για $I \triangleleft R$ $\quad D(I) = \{ m \in \mathrm{Spm}R \mid I \not\subseteq m \}$ ← ανοιχτό.

$V(I) = \{ m \in \mathrm{Spm}R \mid \underline{I \subset m} \}$ κλειστό.

Πρόβλημα $\quad I$ ιδεώδες του R

$$D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f) \qquad V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$$

$V(f) = \{ m : f \in m \}$

αν $m \supset I$ τότε $f \in m$ ∀.

Κάθε ανοιχτό $U \in \mathrm{Spm}R$ γράφεται $D(J)$ για κάποιο ιδεώδες J του R και κάθε κλειστό ως $V(J)$

Παράδειγμα $f \in R$ όχι μηδενοδιαιρέτης, θεωρούμε το ιδεώδες $(1 - ft) \in R[t]$

$$S = R[1/f] = R[t]/(1-ft)$$

Αν $R = k[x_1, \ldots, x_n]/J$ (R πεπ. παραγόμενη k-άλγεβρα) τότε υπάρχει κανονικός ομομορφισμός k-αλγεβρών

$$\varphi : k[x_1, \ldots, x_n, t] \longrightarrow S = k[x_1, \ldots, x_n]/\langle J, 1 - ft \rangle$$

10

Ενα μέγιστο ιδεώδες m του S δίνεται από $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, b) \in k^{n+1}$

$$\varphi^{-1}(m) = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n, t - b)$$

$m = \varphi(\varphi^{-1}(m))$

m' το μέγιστο ιδεώδες του R που δίνεται από $(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$

(*) $1 \equiv fb \mod m' \Rightarrow f \notin m'$

άρα $R/m' = k$, $f \notin m'$ ότι υπάρχει μοναδικό $b \in k$ ώστε να ισχύει η (*)

Δηλαδή η εικόνα του $(x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$ υπό το φ είναι μέγιστο ιδεώδες του S

$$\boxed{\operatorname{Spm} S \xleftrightarrow[\text{επί}]{1-1} D(f) = \{ m' \in \operatorname{Spm} R \mid f \notin m' \} \quad 1-1}$$

Δηλαδή το $(D(f), S)$ είναι affine variety.

$GL_n(k)$ affine variety ανοιχτό $k[x_{ij}, \det x_{ij}^{-1}]$

Παράδειγμα

$U_0 = (\mathbb{A}^1, k[x])$ $\qquad U_2 = (\mathbb{A}^3, k[y])$

$U_{01} = (D(x), k[x, 1/x])$

$U_{10} = (D(y), k[y, 1/y])$

$\varphi : k[y, 1/y] \longrightarrow k[x, 1/x]$ k-ισομ.

$f(y, 1/y) \longrightarrow f(x, 1/x)$

$(\varphi^\alpha, \varphi) : U_{01} \longrightarrow U_{1,0}$

Κολλάμε κατά μήκος του ισομορφισμού

$\mathbb{P}^1_k$ projective line

$D(x) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, $D(y) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

$b \in D(x)$, $\varphi^\alpha(b) = 1/b \in D(y)$

$\mathbb{P}^1_k = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$

Αν $k=\mathbb{C}$ $\{b_n\}$ ακολουθία $b_n \in D(x) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$

$c_n = \frac{1}{b_n}$ $\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0$.

Coordinate ring of $\mathbb{P}^1_k$ σε λίγο, Δεν γίνεται $\to$ sheaf

Curves $\mathbb{A}^2_k \supseteq f(x,y)$ κύκλος, Fermat.

Εστω F υπόσωμα k (αλγεβρικά κλειστό)
$f(x) \in F[x]$
$f(x) = a_0 \prod_{j=1}^{m} (x-\alpha_j)^{n_j}$ $a_0 \neq 0$

πολ/τα ρίζεν

multiplicity of α_j root είναι n_j

Πως θα διαβάσουμε την πολ/τα σε επίπεδο δακτυλίων;

$\alpha \in k$

$R_\alpha = \left\{ \frac{g(x)}{f(x)}, \ f(x), g(x) \in k[x], \ f(\alpha) \neq 0 \right\}$ (ρητές) συναρτήσεις που ορίζονται στο α.

$\subset k(x)$

(localization του R στο πρώτο ιδεώδες $(x-\alpha)$).

$\beta \in k$, $\beta \neq \alpha$

$\frac{1}{x-\beta} \in R_\alpha$

Για ρίζα του α_j του $f(x)$ το ιδεώδες $(f(x))$ του R_α που παράγεται από το $f(x)$ δίνεται από

$(f(x)) = ((x-\alpha_j)^{n_j})$ $\left(f(x) = (x-\alpha_j)^n g(x) \right.$ $g(x)$ αντιστρέψιμο $\left. \in R_{b}\right)$

$R_{\alpha_j}/(f(x)) = R_{\alpha_j}/(x-\alpha_j)^{n_j}$

$\dim_k R_{\alpha_j}/(f(x)) = n_j$ $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \ldots (1-x)^{n_j-b}$ βάση

$R_{\alpha_j}/m \simeq R_\alpha/m \cong k$

Το ίδιο ισχύει και για δυναμοσειρές

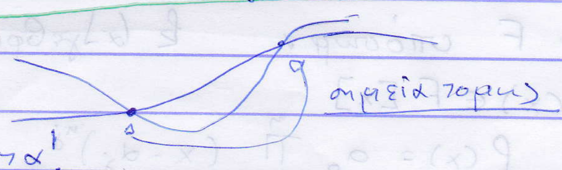
$$k[[x-a_j]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a_j)^i \right\}$$

$(f(x))$ που παράγεται από το $f(x)$ $\langle f(x) \rangle = (\langle x-a_j \rangle)$

$\dim_k k[[x-a_j]]/(f(x)) = n_j$ Εδώ δεν χρειάζεται να αντιστρέψουμε: τα $\frac{1}{x-a}$ είναι αντιστρέψιμα!

<u>Συστήματα εξισώσεων</u>

$f(x,y)=0$
$g(x,y)=0$ χωρίς κοινούς παράγοντες



Δεν χρειαζόμαστε εγκαρσιότητα!

$P=(a,b)$ σημείο τομής των C_f, C_g. $R = k[x,y]$

$R_P = \left\{ \frac{G(x,y)}{F(x,y)} \;\middle|\; F(x,y), G(x,y) \in R,\ F(a,b) \neq 0 \right\}$. υποδακτύλιος του σώματος $k(x,y)$.

$k[x,y]=R \subset R_P$, R_P τοπικός δακτύλιος ~~$\mathrm{Spm}\, R_P = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$~~

Ορίζουμε $I_P(C_f, C_g) = \dim_k R_P/(f,g)$

local intersection multiplicity των C_f, C_g στο $P=(a,b)$
Πολ/τα της κοινής ρίζας.

Τι είναι η intersection theory?

<u>Παραδείγματα</u> $f = ax + by = 0$
$g = \gamma x + \delta y = 0$ $a\delta - b\gamma \neq 0$

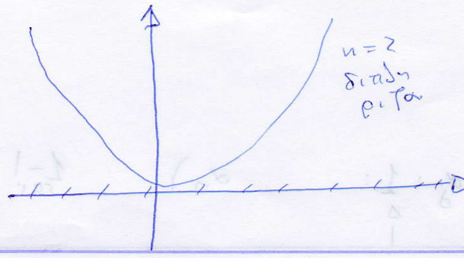
C_f, C_g τέμνονται στο 0 (με πολ/τα 1)
Στο R_0 $(f,g) = (x,y)$
$I_0(C_f, C_g) = 1$.

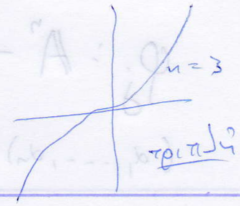
Παράδειγμα

$n \geq 2$ ακέραιος

$f = y = 0$

$g_n = y - x^n = 0$





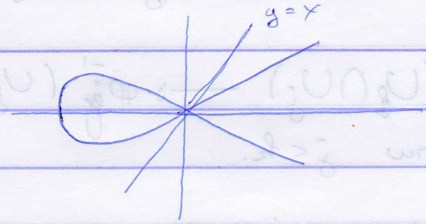
$n=2$

R_0 έχουμε $(f, g_n) = (y, x^n)$.

$1, x, \dots, x^{n-1}$ βάση του $R_0/(f,g)$ $\qquad I_0(C_f, C_{g_n}) = n$.

Παράδειγμα

$f = y - x$, $\qquad g = y^2 - x^2(x+1) = 0$



$f \to f_\varepsilon = y - x - \varepsilon$, $\varepsilon \in k$ $\quad C_f$ τέμνει την C_g σε τρία διαφορετικά σημεία. $\varepsilon \to 0$ τα τρία σημεία τείνουν στο $(0,0)$ $\qquad x^2 = x^2(x+1) = x^2(x+1-1) = \underline{x^3}$

Local multiplicity: 3

$(f,g) = (y-x, y^2 - x^2(x+1)) = (y-x, x^3)$

$1, x, x^2$ βάση του k-vector space $R_0/(f,g)$ $\qquad I_0(C_f, C_g) = 3$.

Projective Varieties

$\mathbb{P}^n_k$ $\quad k$-αλγεβρικά κλειστό. Στην συνέχεια θα ορίσουμε προβολ. πολ/τες

$W = k^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$

$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \sim (b_0, \dots, b_n) \iff (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha b_0, \dots \alpha b_n)$.

$\alpha \in k \setminus \{0\}$

Είναι σχέση ισοδυναμίας.

$\mathbb{P}^n_k = W/\sim$

$(\alpha_0 : \alpha_1 \dots : \alpha_n) \longrightarrow$ σημείο

$U_j = \{(\alpha_0 : \dots \alpha_n) \in \mathbb{P}^n_k \mid \alpha_j \neq 0\}$

$(\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n) = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_j} : \dots : \underset{j}{1} : \dots \frac{\alpha_n}{\alpha_j}\right)$

$$\varphi_j : \mathbb{A}^n \longrightarrow U_j$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto (\alpha_1 : \dots : \alpha_j : 1 : \dots : \alpha_n) \qquad \underset{\text{επί}}{1-1}$$

Το φ_j μεταφέρει την δομή του $\mathbb{A}^n_k$ στο U_j.

$U_j \cap U_k \neq 0 \qquad \varphi_{jk} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_k$ (Θεωρούμε την σύνθεση

$$\varphi_k^{-1}(U_k \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j^{-1}(U_j \cap U_k)$$

Εστω $j < k$.

$$\varphi_k^{-1}(U_j \cap U_k) = \{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{A}^n \quad \alpha_{j+1} \neq 0$$

$$\varphi_j^{-1}(U_j \cap U_k) = \{ (b_1, \dots, b_n). \quad b_k \neq 0.$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \xrightarrow[\varphi_j]{} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

j θεση θα βάλω μια μονάδα, τότε η k θέση θα είναι διαφορετική από το 0. η οποία είναι η k. θεση

φ_{jk}:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longrightarrow (\alpha_1 : \dots : \alpha_k : 1 : \alpha_{k+1} : \dots : \alpha_n) = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{j+1}} : \dots : \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}} : 1 : \frac{\alpha_{j+2}}{\alpha_{j+1}} : \dots \frac{\alpha_k}{\alpha_{j+1}} : \frac{1}{\alpha_{j+1}} : \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_{j+1}} : \dots : \frac{\alpha_n}{\alpha_{j+1}} \right)$$

$$\xrightarrow{\varphi_j^{-1}} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{j+1}}, \dots, \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}}, \frac{\alpha_{j+2}}{\alpha_{j+1}}, \dots, \frac{\alpha_k}{\alpha_{j+1}}, \frac{1}{\alpha_{j+1}}, \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_{j+1}}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_{j+1}} \right)$$

$\mathbb{A}^n \hookrightarrow U_j$

$k[x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}] \qquad j = 0, \dots, n.$

$\varphi_{jk} : \quad D(x_{j+1}^{(k)}) \subset \mathbb{A}^n \qquad D(x_k^{(j)})$ του $\mathbb{A}^n$

$$\varphi_{jk}^{\#} : k[x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, \frac{1}{x_k^{(j)}}] \longrightarrow k[x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \frac{1}{x_{j+1}^{(k)}}]$$

$$\left(\frac{1}{x_k^{(j)}}\right)^e f(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}) \longmapsto (x_{j+1}^{(k)})^e f\left(\frac{x_1^{(k)}}{x_{j+1}^{(k)}}, \dots \frac{x_k^{(k)}}{x_{j+1}^{(k)}}, \frac{1}{\cdot}\right)$$

$\mathbb{A}^n \longrightarrow U_j$

12α

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \xmapsto{\varphi_j} (\alpha_1 : \dots : \alpha_j : 1 : \alpha_{j+1} : \dots \alpha_n)$$

$$\varphi_k^{-1}(U_j \cap U_k) = \left\{ (\alpha_1 : \dots : \alpha_n) \in \mathbb{A}^n \mid \alpha_{j+1} \neq 0 \right\}$$

$j \leq k$

$$U_j \cap U_k \quad (a_0, \dots, \underset{\neq 0}{\alpha_j}, \dots, \underset{\neq 0}{\alpha_k}, \dots, \alpha_n)$$

φ_k^{-1}

$$\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_k}, \frac{\alpha_1}{\alpha_k}, \dots, \frac{\alpha_j}{\alpha_k}, \dots \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}, \quad \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \right)$$

$$\left(A_1, A_2, \dots, \underset{\neq 0}{A_{j+1}} \qquad A_n \right)$$

φ_j^{-1}

$$(B_1, B_2, \dots, B_j, \dots$$

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_j}, \frac{\alpha_1}{\alpha_j}, \dots, \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}, \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}, \dots \underset{\substack{\| \\ B_k \neq 0}}{\frac{\alpha_k}{\alpha_j}}, \dots)$$

$$\varphi_{jk} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_k$$

$$(A_1, \dots, A_n) \xrightarrow{\varphi_k} (A_1 : \dots : A_k : 1 \; A_{k+1}, \dots : \alpha_n) \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{A_1}{A_{j+1}}, \dots, \frac{A_j}{A_{j+1}}, \; 1, \; \frac{A_{j+2}}{A_{j+1}}, \dots, \frac{A_k}{A_{j+1}}, \frac{1}{A_{j+1}}, \frac{\alpha_{k+1}}{A_{j+1}}, \dots \frac{A_n}{A_{j+1}} \right)$$

$\downarrow \varphi_j^{-1}$

$$\left(\frac{A_1}{A_{j+1}}, \dots \frac{A_j}{A_{j+1}}, \frac{A_{j+2}}{A_{j+1}}, \dots, \frac{A_k}{A_{j+1}}, \underset{k}{\frac{1}{A_{j+1}}}, \dots \frac{A_n}{A_{j+1}} \right)$$

o coordinate ring

$\mathbb{A}^n \cong U_j$ είναι ο

$k[x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}]$ $\quad j = 0, 1, \ldots, n.$

φ_{jk} συνάρτηση από ανοιχτό

$D(x_{j+1}^{(k)})$ του $\mathbb{A}^n$ σε ανοιχτό $D(x_k^{(j)})$ του $\mathbb{A}^n$

φ_{jk} δίνεται:

$$\varphi_{jk}^{*} : k[x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}, \frac{1}{x_k^{(j)}}] \longrightarrow k[x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \frac{1}{x_{j+1}^{(k)}}]$$

$$f(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}) / (x_k^{(j)})^{\ell} \longrightarrow (x_{j+1}^{(k)})^{\ell} f\left(\frac{x_1^{(k)}}{x_{j+1}^{(k)}}, \ldots, \frac{x_k^{(k)}}{x_{j+1}^{(k)}}, \frac{1}{x_{j+1}^{(k)}}, \ldots, \frac{x_{k+1}^{(k)}}{x_{j+1}^{(k)}}, \frac{x_n^{(k)}}{x_{j+1}^{(k)}}\right)$$

$k[\underline{x_0}, \ldots x_n]$ $\qquad k[U_j] = k[x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}]$

$$= k\left[\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right]$$

$$x_i/x_j \longrightarrow x_i/x_k$$

$\mathbb{P}^n_k$ algebraic variety: καθώς τα affine μεταξύ ισομορφισμών.

13

$k[x_0, \dots, x_n]$ του $\mathbb{P}^n_k$

$k[U_j] = k[x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}]$ του U_j είναι $k\left[\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \frac{x_n}{x_j}\right]$

και

(1.2). $x_i/x_j \longrightarrow x_i/x_j$

Προβολικά σύνολα και προβολικές πολλ/τες

$(\alpha\alpha_0,\dots,\alpha\alpha_n) = (\alpha_0:\alpha_1:\dots:\alpha_n)$ $\quad \forall \alpha\in k \ \alpha\neq 0$

$f(\alpha_0:\alpha_1:\dots:\alpha_n)$ καλά ορισμένο?

Ομογενή πολυώνυμα.

$$f(x_0,\dots,x_n) = \sum_{k_0+\dots+k_n=m} \alpha_{k_0\dots k_n} x_0^{k_0}\cdots x_n^{k_n}$$ ομογενές πολ. βαθμού m

- $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$.

$\lambda\neq 0$ $\quad f(\lambda x)=0 \iff f(x)=0$

Δηλαδή αν και η ακριβής τιμή δεν είναι καλά ορισμένη η ιδιότητα μηδενισμού είναι.

$f_1,\dots,f_m$ ομογενή πολυώνυμα.

$V(f_1,\dots,f_\ell) = \{(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in \mathbb{P}^n_k : f_j(\alpha_0,\dots,\alpha_n)=0 \ \forall j=1,\dots,\ell\}$

προβολικό σύνολο.

$I=(f_1,\dots,f_n)$ ιδεώδες που παράγεται από τα $f_1,\dots,f_n$

Αν $f\in I$ το διασπάμε

$f = f_d + f_{d+1}+\dots+f_m$ άθροισμα ομογενών πολυωνύμων.

Όλα τα ομογενή πολυώνυμα $f_d,\dots,f_m \in I$. ορισμός όλοι οι ομογενείς παράγοντες να ανήκουν

Ένα τέτοιο ιδεώδες λέγεται ομογενές. ορισμός της επόμενης σελίδας

$f = g_1 f_1 + \dots + g_k f_k$ $\quad g_i = \sum_\lambda g_{i,\lambda}$

$f = \sum_i \sum_\lambda \overbrace{g_{i,\lambda}}^{\text{ομογενές}} f_i$ $\quad$ ομογενή ίδιου βαθμού

$\sum_\lambda g_{i,\lambda} f_i$ ώστε ο βαθμός να είναι σταθερός.

Πρόβλημα I ομογενές αν παράγεται από ομογενή ιδεώδη.

Ιδεώδες ώστε $f\in I \Rightarrow f_0+\dots+f_d$ $\quad f_i\in I$.

I πεπ. παραγόμενο f_i γεννήτορας

$f_i = \sum f_{i,d}$, $\quad f_{i,d}$ ομογενή ο- αυτά το παράγουν.

Πρόβλημα I. I ομογενές και το $\sqrt{I}$ ομογενές.

$f\in\sqrt{I} \Rightarrow f^m\in I$ ομογενές $\quad f^m = \sum f_{i,d}$, $\quad f_d\in I$

$f = (\sum f_{i,d})$ $\quad f^m = \sum_m \binom{m}{v_1,\dots,v_k} \underbrace{f_{d_1}^{v_1}\cdots f_{d_k}^{v_k}}_{\text{ομογενής}}$ παράγοντες της δύναμης $\in I$

$f^m \in I$ τέλος

I ομογενές ιδεώδες

$$V(I) = \{ (\alpha_0 : \cdots : \alpha_n) \in \mathbb{P}^n_k \mid f(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = 0 \quad f \in I \}^{*}$$

I γεννάται από ομογενή πολ. πεπ. το πλήθος και είναι η ίδια.

$f_1 = f_d + \cdots f_k$ όλα θα πρέπει να είναι 0 αφού όλα ανήκουν στο I.

$V(I) = V(\sqrt{I})$.

Αν το V είναι ~~ομογενές~~ προβολικό τότε θέτουμε

$$I(V) = \{ f \in k[x_0, \dots, x_n] \mid f(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = 0, \ (\alpha_0 : \cdots : \alpha_n) \in V \}$$

Το $I(V)$ είναι ομογενές.

V προβολικό σημαίνει $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in V \underset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in V$.

$$f = f_d + \cdots + f_k \qquad f(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in V$$

$$0 = f(\lambda\alpha) = \lambda^d f_d(\alpha) + \cdots + \lambda^k f_k(\alpha) = 0 \quad \forall \lambda$$

$\Rightarrow$ Άπειρο σώμα τα $f_d(\alpha) = 0$ πολυώνυμο στο $\underline{\underline{I}}$.

άσχετο ιδεώδες

Διαφορά $\quad J = (x_0, \dots, x_n) \triangleleft k[x_0, \dots, x_n]$

$V(J) = \emptyset$. Αφού το $(0 : \cdots : 0) \notin \mathbb{P}^n_k$.

$(\alpha_0 : \cdots : \alpha_n)$ σημείο $\longleftrightarrow$ $(\alpha_j x_i - \alpha_i x_j \quad 0 \le i < j \le n)$

ομογενές. μέγιστο ιδ.

Hilbert nul. ισχύει χρειεί $V(J) \neq \emptyset$.

Irreducibility ορίζεται παρόμοια. V irreducible $\Leftrightarrow$ $I(V)$ prime

$k[x_0, \dots, x_n] / I(V)$ ομογενές coordinate ring.

Τοπολογία Zariski: projective sets : closed sets

Graded ring $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ (14α)

$d, e \geq 0 \quad S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$

Elements in S_d homogeneous elem. of degree d

$\mathfrak{a} \subseteq S$ ομογενές ιδεώδες

$\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathfrak{a} \cap S_d)$

$(x+y^2)\, k[x,y] \qquad (x+y^2) \cap S_1 = 0$ διανυσματικός χώρος.

$(x+y^2) \cap S_2 = 0$

Ομογενές αν και μόνο αν παράγεται από ομογενή ιδεώδη

$f = g_1 f_1 + \dots + g_s f_s \qquad g_1 = \frac{\text{άθροισμα}}{(x^2+xy+x^3)}$

$(x^2+xy+x^3) f_1$

Άθροισμα, γινόμενο, τομή, ρίζικο ομογενών ιδεωδών είναι ομογενές.

$\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 1} \mathfrak{a} \cap S_d$ παράγεται $\bigcup_{d \geq 1} (\alpha \cap S)$ ομογενή

$a \in \mathfrak{a} \qquad a = \sum_{h \in H} r_h h = \sum_{i \geq 1} \sum_{h \in H_i} r_h h \in \bigoplus_{i \geq 1} (\mathfrak{a} \cap S_i)$ ομογενή

$r_h = \sum_{j \geq 1} r_{hj} \quad (\in S_j) \qquad r_{hj} h \in S_{i+j}$ βαθμός j

$h \in \alpha$

$\bigoplus_{i \geq 1} (\alpha \cap S_i) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \bigoplus_{j \geq 1}^{\alpha} (\alpha \cap S_i)$

διάστασης k.

Ένα προβολικό variety προκύπτει κολλώντας $n+1$ affine alg v.

Έστω $f_1,\dots,f_e$ γεννήτορες του προβολικού ιδεώδους $I = I(V) \subset k[x_0,\dots,x_n]$

Οι γεννήτορες είναι ομογενείς, $m_j = \deg f_j$

$$f_j^{(i)} = \frac{1}{(x_i)^m} f_j(x_0,\dots,x_n)$$

Στις μεταβλητές $x_1^{(i)} = \frac{x_0}{x_i}, \dots, x_i^{(i)} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, x_{i+1}^{(i)} = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, x_n = \frac{x_n}{x_i}$

γεννούν ένα ιδεώδες

$\langle f_1^{(i)},\dots,f_e^{(i)}\rangle$ στο $k[x_1^{(i)},\dots,x_n^{(i)}]$

$V(f_1^{(i)},\dots,f_e^{(i)})$ είναι αλγεβρικό σύνολο στο $U_i = A^n$

$V_i = V\cap U_i = V(f_1^{(i)},\dots,f_e^{(i)})$

V είναι το variety που προκύπτει κολλώντας V_i

<u>Παραδείγματα</u> Επίπεδες καμπύλες

A^2 $\quad \ell = \alpha x + by + c \quad m: \alpha x + by = c_2 \quad c_1 \neq c_2$ δεν τέμνονται.

$(x_0:x_1:x_2) \quad x = x_1/x_0, \quad y = x_2/x_0$

$L: \alpha x_1 + bx_2 - c_1x_0 = 0 \qquad M: \alpha x_1 + bx_2 - c_2x_0 = 0$

L, M τέμνονται στο $(0:b:-\alpha)$ στο $\mathbb{P}^2_k$ $\quad (\infty) \quad x_0=0$ όχι στο $\mathbb{A}^2$.

Points at ∞ $\quad (0:\alpha_1:\alpha_2)$. $\quad \mathbb{P}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k \quad (\alpha_1:\alpha_2)\mapsto(0:\alpha_1:\alpha_2)$

$\varphi: \mathbb{P}^2_k \to \mathbb{P}^2_k$

$$\varphi: (a_0:a_1:a_2) \longmapsto \left(\sum_{j=0}^2 \alpha_{0j}a_j : \sum_{j=0}^2 \alpha_{1j}a_j : \sum_{j=0}^2 \alpha_{2j} a_j\right)$$

Είναι projective transformation $\alpha_{ij}\in k$ $\quad 0\le i,j\le 2$, $\det(\alpha_{ij})\neq 0$

<u>Projective Geometry:</u> Ιδιότητες αναλλοίωτες υπό τους προβολ. μετασχ.

$\varphi^\#: R\to R \quad I$ ομογενές ιδεώδες του $R \quad \varphi^{\#-1}(I)$ επίσης ομογενές ιδεώδες του R.

$(a_0:a_1:a_j) \longleftrightarrow \langle a_i x_j - a_j x_i : 0\le i,j\le 2\rangle$

$g(x,y,z)$

$\varphi^\#(x) = \sum^{2} \alpha \, x$

$V \longrightarrow V$

$\downarrow$

$g(x,y,z)$

$\alpha_i x_j - \alpha_j x_i$

Το $\varphi^{\#-1}(m)$ παράγεται απο τα

$\alpha_i \varphi^{\#-1}(x_j) - \alpha_j \varphi^{\#-1}(x_i) \quad 0 \leq i,j \leq 2.$

$\varphi^{\#-1}(x_j)$ ομογενης γραμμικη εξίσωση στα x_0, x_1, x_2

$m \longmapsto \varphi^{\#-1}(m)$

$\varphi^{\#-1}(x_i) = \sum_{j=0}^{2} \beta_{ij} x_j \quad i=0,1,2$ Ο β_{ij} είναι ο αντίστροφος του (α_{ij})

Projective transformation: Συνάρτηση μεταξύ σημείων αλλα και αυτομορφισμος

$\varphi: (x_0,x_1,x_2) \longmapsto \left(\sum_{j=0}^{2} \gamma_{0j} x_j, \sum_{j=0}^{2} \gamma_{1j} x_j, \sum_{j=0}^{2} \gamma_{2j} x_j \right)$

$F(x_0,x_1,x_2) \in k[x_0,x_1,x_2]$ βαθμου m

$G(x_0,x_1,x_2) = F\left(\sum_{j=0}^{2} \gamma_{0j} x_j, \sum_{j=0}^{2} \gamma_{1j} x_j, \sum_{j=0}^{2} \gamma_{2j} x_j \right)$ επισης ομογενες

$V(F) \longmapsto V(G).$

$V(F)$ απο $f(x_0,x_1,x_2)$ plane projective curve.

$m=1$ line $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$

$\gamma_{00} = \alpha_0, \gamma_{01} = \alpha_1, \gamma_{02} = \alpha_2 \qquad F(x_0,x_1,x_2) = x_0$

$G(x_0,x_1,x_2) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$

$V(F) \longrightarrow V(G)$

Αποτυχια char k ≠ 2 Κάθε ανάγωγη τετραγωνική καμπύλη είναι

$Q = V(F) \qquad F = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2.$

Αποδ

$G = \sum_{i,j}^{2} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad \alpha_{ij} \in k \qquad \alpha_{ij}$ συμμετρικος

Αναγωγ. $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$

${}^tM(\alpha_{ij})M = I_3$

$G\left(\sum_{j=0}^{2} m_{0j} x_j, \sum_{j=0}^{2} m_{1j} x_j, \sum_{j=0}^{2} m_{2j} x_j\right) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2.$

$C_1 = V(F)$
$C_2 = V(G)$

$\# C_1 \cap C_2$ counting multiplicitys. (χωρίς κοινό παράγοντα)

$C_1 C_2 = \sum_{i=1}^{s} I_{p_i}(C_1, C_2)$

Bezout Theorem $C_1 \cdot C_2 = m \cdot n$.

Σημεία $\longleftrightarrow$ μέγιστα ιδεώδη

Θεωρία Αριθμών;

$F_\alpha(x_1, \dots, x_n) = 0$ $\quad \alpha = 1, \dots, m$ $\quad F_\alpha(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] = R$

$I \triangleleft \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. $\quad R/I$

$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ $\quad \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I \longrightarrow \mathbb{Z}$
$f(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(a_1, \dots, a_n)$

$\varphi : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I \longrightarrow \mathbb{Z}$ ομομορφισμός $\quad a_j = \varphi(x_j \bmod I) \in I$

αν. λύση. $\varphi(f(x_1, \dots, x_n) \bmod I) = f(a_1, \dots, a_n)$

Σχήμα υπερ το $\mathbb{Z}$

Ακ. λύσεις: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I, \mathbb{Z})$ $\quad f$: Δακτύλιο στο $\mathbb{Z}$

$(b_1, \dots, b_n) \in R^n$: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I, R)$ $\quad$ R com. δακτ $\supset \mathbb{Z}$

k σώμα $\quad k[V]/m = k \quad m \in \mathrm{Spm}\, k[V]$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_m : k[V] \longrightarrow k = k[V]/m \\ g \longmapsto g \bmod m \end{array}\right\} \text{mo} \longrightarrow \mathrm{Hom}(k[V], k)$$

Αντιστρόφως $\varphi : k[V] \longrightarrow k$ $\quad m_\varphi = \ker\varphi$ μέγιστο ιδεώδες

Όμως ο $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I, R)$ δεν αντιστρέφεται σε μέγιστο

$\varphi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\quad \varphi(x) = m \in \mathbb{Z}$

$\varphi^{-1}(0) = (x - m)$ $\quad$ Το $x-m$ δεν είναι μέγιστο αλλά πρώτο.

$(p, x-m)$ είναι μέγιστο

$\varphi_\pi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$
$f(x) \longmapsto f(\pi)$

$\ker\varphi_\pi = \{0\} \leftarrow$ όχι μέγιστο

Singularities of Alg. Curves

$F(x,y) = 0$

Έστω (α, β) σημείο

Ανάπτυγμα Taylor

$$F(x,y) = A_0 + (x-\alpha)A_{11} + (y-\beta)A_{12} + (x-\alpha, y-\beta)\,\mathrm{Hess}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix} + \cdots$$

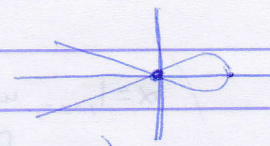
$A_0 = 0$

$A_{11} = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(\alpha,\beta)} \qquad A_{12} = \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(\alpha,\beta)} \neq 0$ για έλλειψη ιδιομορφιών

$\mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$(x,y) \longrightarrow F(x,y).$

($F^{-1}(0)$ έχει τοπικά την δομή επιφανείας Riemann αρκεί $\nabla f \neq 0$).

$y^2 = x^2(x-1)$

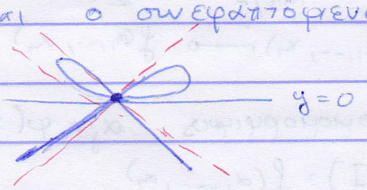


Δεν έχει δομή πολ/τας (ούτε τοπολογικής). στο $(0,0)$.

$y^2 = -x^2 + x^3$ (αγνοώ το x^3 !)

$\mathrm{Hom}(\frac{m}{m^2}, k)$ είναι ο εφαπτόμενος χώρος

$x^4 = x^2 y - y^3$



$x^2 y - y^3 - x^4$ σ-αμέλητο

$y(x^2 - y^2) = y(x-y)(x+y)$

Blow-up

Nonsingular. $f_1, \ldots, f_r$ $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ φ

non. rank $\|(\partial f_i/\partial x_j)p\| = n - r$ διάσταση (συνθήκη εφαπτομένης τομής)

$\dim_k m/m^2 = \dim A$. $\mathcal{O}_{p/X}$ regular local ring

$\alpha_p = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$ μέγιστο

$\partial : A \longrightarrow k^n$

$\partial(f) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x}(p) \rangle \qquad \partial(x_i - \alpha_i)$ βάση του k^n

$\partial(\alpha_p^2) = 0. \qquad \partial' : \alpha_p/\alpha_p^2 \xrightarrow{\cong} k^n$

$f_1, \ldots, f_n$ γεννήτορες του $I(x)$, $J = \|\partial f_i/\partial x_j\|$ διάσταση του $\partial(b)$ ως υπόχωρος του k^n

$\left(\frac{b + \alpha_p^2}{\alpha_p^2}\right) \subseteq \alpha_p/\alpha_p^2$

S1

η συνδετος ⇒ οχι σώμα
Σωμα ⇒ πρότ.

13,50

17

A τοπικος δακτύλιος έχει μονο ένα μεγιστο ιδεωδες.

$k[x_1, \dots, x_n]/I$ $\quad m = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$

$S = (R \setminus m)$ πολ/ικο σύνολο $\alpha \in S, \beta \in S \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in S$

Εντοπισμος: κατασκευή του δακτυλίου RS^{-1}

Αν P ένα ιδεωδες ώστε $P \not\supset m$ τοτε το P εξαφανίζεται στο RS^{-1}.

$k_\alpha = \left\{ \frac{f}{g} : g(\alpha) \neq 0 \right\}$ τοπικος δακτύλιος

Διάσταση δακτυλίου

Ύψος ενος πρωτου ιδεώδους: supremum n

$p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_n = p \leftarrow$ fixed

Διάσταση Krull το μικρότερα supremum όλων των υψών πρωτων ιδεωδων

$k[x_1, \dots, x_n]$ Ύψος του $(x_1, x_2, \dots, x_n)$: n

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \supset (x_1, \dots, x_{n-1}) \supset \dots \supset (x_1, \dots, x_n)$

Διάσταση του $k[x_1, \dots, x_n] = n$. Διάσταση V (αναγωγο) η διασταση του δακτυλίου συντεταγμενων.

Παράδειγμα αναγωγου μεδιαν. factors

Non singular $f_1, \dots, f_t \in A = k[x_1, \dots, x_n]$

Y είναι non-singular στο P

$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right\|$ $\quad n - \underset{\text{διασταση του } Y}{r}$ $\quad$ n ελεύθερες μεταβλητες

r $\quad$ $r = n - t$ στην περίπτωση εξάρτησης τομης.

ΟΡΙΣΜΟΣ A Noetherian local ring m το μέγιστο ιδεώδες του $k = A/m$. O A είναι regular local ring

$m/m^2 = \dim A$

Θεώρημα

$Y \subseteq \mathbb{A}^n$ affine variety $P \in Y$ σημείο.

Το Y είναι μη ιδιόμορφο στο P αν και μόνο αν $\mathcal{O}_{P,Y}$ είναι regular local ring.

Αποδ. $P=(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{A}^n$. $P \in Y$ σημείο.

$a_P = (x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$ το μέγιστο ιδεώδες του A.

Ορίζουμε

$$\partial : A \longrightarrow k^n$$
$$f \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n} P\right)$$

1. $\partial(x_i - a)$ βάση του k^n.

$\partial(a_P^2) = 0$

$\partial' : a_P / a_P^2 \xrightarrow{\cong} k^n$

Έστω b ιδεώδες του Y στο A. $f_1,\dots,f_r$ οι γεννήτορες του.

$J = \operatorname{rank} \| \partial f_i / \partial x_j (P) \|$ διάσταση του $\partial(b)$ ως υπόχωρος του k^n. ίσο με την

εξαρτάται από το P

$(b + a_P^2)/a_P^2$ στο a_P / a_P^2 (a_P σημείο $a_P \supset b$

$\mathcal{O}_P$ = τοπικός δακτύλιος A/b local στο μέγιστο ιδεώ.

$$m/m^2 \cong a_P / (b + a_P^2)$$

$m = f$. που μηδενίζονται στο b και στο P

$m^2 =$

$a_P \ni f \xrightarrow{\text{πυρήνας}} f \in m$ $\quad$ $f \bmod b$ που μηδενίζεται στο m.

$f(P)=0 \quad \to m/m^2$

$f \in m^2$.

$a_P \cap b = b$

$$(b \cap a_P)/a_P^2 \cong a_P/(b + a_P^2).$$

52

$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + \operatorname{rank} J = n$

$\dim \alpha_p/\alpha_p^2 = n$ $\qquad \dfrac{\alpha_p/\alpha_p^2}{b+\alpha_p^2/\alpha_p^2} \cong \dfrac{\alpha_p}{b+\alpha_p^2} \rightsquigarrow$ diva

$\dim \dfrac{\alpha_p}{b+\alpha_p^2} + \operatorname{rank} J = n.$ ($\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$)

$\dim Y = r$ $\quad \mathcal{O}_p$ local ring διαστασης r $\quad$ regular αν $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r$

$\dim \mathcal{O}_p = \dim Y$ $\qquad$ coordinate ring

$A(Y)_{\mathfrak{m}_p} \to \mathcal{O}_p$ $\qquad \mathcal{O}_p = $ height $\mathfrak{m}_p$ $\qquad A(Y)/\mathfrak{m}_p \cong k$

B ακ. περιοχη της π. παραγ. k-αλγεβρα.

$\boxed{\text{height } p + \dim B/p = \dim B}$ ← coordinate ring. **Θεώρημα Αντιμεταθετικης Άλγεβρας**

$\mathcal{O}_p$ Krull διασταση σημειου ... r.

Δεν έχει άλλο

$\mathcal{O}_p = A(X)_{\mathfrak{m}_p}$ ← localized $\qquad \underbrace{\dim \mathcal{O}_p = \text{height } \mathfrak{m}_p}_{\text{τοπικου δακτυλιου.}}$ $\qquad$ καθε πρώτο περιέχεται στο μεγιστο

συνδιασταση $\qquad$ διασταση

$$\dim \mathcal{O}_p + 1 = \dim B(Y)$$

Blow up

$\mathbb{A}^n$

Ρητες συναρτήσεις

$\varphi : X \to X$ $\qquad \varphi : U \to X$

$(U, \varphi_u), (V, \varphi_v)$ είναι ισοδύναμα αν φ_U, φ_V ταυτίζονται στις

τομ ετ

Schemes

(19)

R αντιμεταθετικός δακτύλιος $\{$ Spec R το σύνολο $\}$ των πρώτων ιδεωδών του.

p prime ideal στοιχείο του Spec R. $[p]$ point

Τοπολογία

$V(I) = \{ p \in \operatorname{Spec} R \ / \ I \subset p \}$

R συναρτήσεις, p σημεία. $f \bmod p$ τιμή της συνάρτησης στο R/I δεν είναι σώμα.

Πρόταση $I, J, I_\lambda^{\lambda\in\Lambda}$ ιδεώδη

(i) $V((0)) = \operatorname{Spec} R$, $V(R) = \emptyset$

(ii) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$

(iii) $\bigcap_{\lambda \in I} V(I_\lambda) = V(\sum I_\lambda)$ — ιδεώδες που παράγεται

Απόδειξη

Όλα τα ιδεώδη περιέχουν το 0 ✓ $V(0) = \{ p \in \operatorname{Spec} R \mid 0 \subset p \}$

Πρώτο ιδεώδες. $V(R) = \{ p \in \operatorname{Spec} R \mid R \subset p \} = \emptyset$.

(ii)

Αν $p \in V(I) \Rightarrow I \subset p \Rightarrow p \supset I \cap J \Rightarrow p \in V(I \cap J)$

$V(I) \subset V(I \cap J) \Rightarrow V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$

Αντιστρόφως, για $p \in V(I \cap J)$ $I \cap J \subset p$ αν $I \not\subset p$

τότε $\exists\, a \in I$, $a \notin p$. Αν $r \in J$ τυχαίο τότε $a \cdot r \in I \cap J \subset p$.

$\Rightarrow r \in p$ (p πρώτο)

(iii)

Αν $p \in \bigcap V(I_\lambda)$ $\forall \lambda \in \Lambda$ $p \supset I_\lambda \Rightarrow p \supset \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \Rightarrow p \in V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$

Αντιστροφως αν $p \in V(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)$ τοτε $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subset p$. $\forall \lambda \in \Lambda$

$I_\lambda \subset p \Rightarrow p \in V(I_\lambda)$ $\forall \lambda \Rightarrow p \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$

Τα $\{V(I),\ I$ ιδεώδη του $R\}$

ορίζουν τοπολογία στο $\operatorname{Spec}R$ ως κλειστά σύνολα.

$$D(I) = \{p \in \operatorname{Spec}R \mid I \not\subset p\} = V(I)^c.$$

$$\mathcal{O} = \{D(I) : I \text{ ιδεώδες του } R\}$$

<u>Άσκηση</u> Για $f \in R$ $D(f) = \{p \in \operatorname{Spec}R \mid f \notin p\}$

τότε για $I \in R$

$$D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f).$$

Αν $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ $\quad D(I) = \bigcup_{j=1}^{m} D(f_j).$

<u>Απόδ.</u> $f \in I$, αν $f \notin p$ έχουμε $I \not\subset p \Rightarrow D(f) \subset D(I)$

$$\bigcup_{f \in I} D(f) \subset D(I).$$

Αντιστρόφως αν $p \in D(I)$ τότε $I \not\subset p$. Συνεπώς $\exists f \in I$

ώστε $f \notin p \Rightarrow p \in D(f)$.

Άρα $D(I) \subset \bigcup_{f \in I} D(f)$.

<u>Δηλαδή</u> $\{D(f) \mid f \in R\}$ αποτελούν βάση ανοιχτών για το $\operatorname{Spec}R$.

Αν ο R είναι δακτύλιος της Noether τότε κάθε ανοιχτό καλύπτεται

από πεπερασμένα το πλήθος $D(f)$.

<u>Προβλήματα:</u>

(1) $\mathcal{O} = \{D(I) / I$ ανοιχτό$\}$ έχει τις ιδιότητες

(α) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $\operatorname{Spec}R \in \mathcal{O}$

(β) $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ αν $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$

(c) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ αν $U_\lambda \in \mathcal{O}$ $\lambda \in \Lambda$

(2) $f \in R$ έχουμε $D(f) = \emptyset$ αν f είναι nilpotent.

$D(f) = \emptyset$ είναι ισοδύναμο ότι f περιέχεται σε όλα τα ιδεώδη

αυτό είναι ισοδύναμο με το $f \in \sqrt{0} = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec}R} p$

Έστω $h \in \sqrt{0} \Leftrightarrow h^m = 0 \in p \Leftrightarrow h \in p.$

$\sqrt{0} \subset \bigcap_{p \in \operatorname{Spec}R} p$. Αντιστρόφως αν $x \in \bigcap_{p \in \operatorname{Spec}R} p$ και ας

$x \in \bigcap_{p \in Spec} p$

Εστω $x^m \notin (0)$ $\forall m$ τοτε υπάρχει ένα μεγιστο στοιχειο q (S)

$S = \{ a \,/\, a \lhd R$ ωστε $x^m \notin a \}$ Noether
$\forall m$.

Το q είναι πρωτο

$\alpha \cdot b \in q \Rightarrow a \notin q, b \notin q \Rightarrow (q,a), (q,b) \notin S$ αφου q μεγιστο

$\Rightarrow \exists\, n_1, n_2$ $\quad x^{n_1} \in (q,\alpha), \quad x^{n_2} \in (q,b)$.

$x^{n_1} = \alpha c_1 + q_1$

$x^{n_2} = b c_2 + q_2 \quad q_1, q_2 \in q$

$x^{n_1+n_2} = (ac_1+q_1)(bc_2+q_2) = \underbrace{ab}_{q} c_1c_2 + \underbrace{ac_1q_2 + bc_2q_1}_{q} + q_1q_2$

$x^{n_1+n_2} \in q$ ατοπο αφου $x \in q$.

Παράδειγμα Πρωτα ιδεωδη του $\mathbb{Z}$ (0) ή (p)

$Spec\,\mathbb{Z} = \{(0), (2), (3), \ldots$

$Spec\,\mathbb{Z} - Spm\,\mathbb{Z} = \{0\}$

$V(I) = V(n\mathbb{Z}) = V(p_1^{a_1} \cdots p_e^{a_e}) \qquad V(I) = \{p : I \subset p\}$.

$V(n) = \{(p_1), \ldots, (p_e)\} =$

$D(n) = Spec\,\mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \ldots, p_e\}$

$V(p) = \{(p)\} \quad \Rightarrow$ σημεία $Spm(\mathbb{Z})$ είναι κλειστά.

Closed set είναι πεπ. ένωση. (0).

$V(0) = Spec\,\mathbb{Z}$. Είναι το μικρότερο κλειστο που περιέχει το (0)

$A \subset B \Rightarrow V(A) \supset V(B)$

Αν $\overline{a} = X$ τότε το a λέγεται generic point

Παράδειγμα

Πρώτα ιδεώδη στο $k[x] \to (0), (x-\alpha)$ $\quad \bar{k} = k$

$$\operatorname{Spec} k[x] = \{(0)\} \cup \{(x-\alpha) \mid \alpha \in k\}$$

$I = f(x)$

$$f(x) = a_0 \prod_{j=1}^{\ell} (x-\alpha_j)^{n_j}$$

$$V(I) = \{(x-a_1), \dots, (x-a_\ell)\},$$

$$D(I) = \{(0)\} \cup \{(x-\alpha) \mid \alpha \in k \ \ \alpha \neq \alpha_j\}$$

$\operatorname{Spec} k[x] = \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spm} k[x] = k$ με 1 σημείο (0).

$\boxed{\mathbb{Q}_p}$ p-αδικοί αριθμοί, $\mathbb{Z}_p$ οι p-αδικοί ακέραιοι.

$\operatorname{Spec} \mathbb{Q}_p = \{0\}$

$\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p) = \{(0), (p)\}$

Ιδεώδη στο $\mathbb{Z}_p$ είναι της μορφής (p^n).

$\emptyset, \{(p)\} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$ τα μοναδικά κλειστά.

(0) είναι ανοιχτό αλλά και generic point.

Πρώτα ιδεώδη του $\mathbb{Z}[x]$

$\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$. $\quad \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ πρώτο $\quad \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$

$$\varphi : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{F}_p[x]$$
$$f \longmapsto f(x) \bmod p$$

Το $\bar{\mathfrak{p}}$ ιδεώδες $\varphi(\mathfrak{p})$. $\quad \varphi(\mathfrak{p}) = \bar{\mathfrak{p}}$ (όλα mod p)

διαιρ. περιοχή $\quad \mathbb{Z}[x]/\mathfrak{p} \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}_p[x]/\bar{\mathfrak{p}}$

$\bar{\mathfrak{p}}$ είναι πρώτο ιδεώδες $\quad \overline{g(x)}$ ανάγωγο στο $\mathbb{F}_p[x]$

$f(x) \bmod (p) = \overline{g(x)}$

$\mathfrak{p} = (p, f(x))$ $\quad$ Φυσικά αν $f(x) \bmod p = \tilde{f}(x) \bmod x^{68}$

$(f, p) = (\tilde{f}, p)$

$V((p)) = \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_p[x]$

$V(p) = \{ \mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[x] \,,\, (\mathfrak{P}) \subseteq (\mathfrak{P}) \}$ πρώτο, και αυτά περιγράφονται από τα ανάγωγα του $\mathbb{F}_p[x]$.

Από την άλλη αν $\mathfrak{P}$ prime $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ όλα τα μη μηδενικά στοιχεία το $\mathfrak{P}$ αποτελούνται από πολυώνυμα με ακ. συντελεστές.

d_0 ο μικρότερος βαθμός πολ. στο $\mathfrak{p}$. $d \geq d_0$

$\mathfrak{p}_d = \{ h(x) \in \mathfrak{p} \mid \deg h(x) = d \}$

Αν $h(x) \in \mathfrak{p}_d$ έχουμε $n\, h(x) \in \mathfrak{p}_d$ $(n \neq 0 \,,\, n \in \mathbb{Z})$

$h(x) \in \mathfrak{p}_d$ $\quad -h(x) \in \mathfrak{p}_d$.

$f(x) \in \mathfrak{p}_{d_0}$ ώστε ο συντελεστής του x^{d_0} ο μικρότερος δυνατός.

$f(x) = a x^{d_0} + a_1 x^{d_0 - 1} + \dots + a_{d_0}$.

Τα στοιχεία του $\mathfrak{p}_{d_0}$ είναι ακ. πολ/σια του $f(x)$.

$g(x) = b x^{d_0} + b_1 x^{d_0-1} + \dots + b_{d_0} \in \mathfrak{p}_{d_0}$ $b > 0$ όχι πολ. του a

τότε για τον ΜΚΔ $(a, b) = c$ $\exists\, m, n$

$ma + nb = c \qquad 1 \leq c < a$

~~οπότε~~ έχουμε $m f(x) + n g(x) \in \mathfrak{p}_{d_0}$ ο συντελεστής του x^{d_0} είναι c, άτοπο

Τα στοιχεία του $\mathfrak{p}_{d_0}$ είναι ακ. πολ/σια του $f(x)$.

(Αν όχι τότε θα εβρίσκα μικρότερα)

ΜΚΔ $(a, a_1, \dots, a_{d_0})$ συντελεστών του $f(x)$ · είναι 1.

Άτοπο γιατί αν $e \geq 2$ ο ΜΚΔ

$f(x) = e_1 (a' x^{d_0} + a_1' x^{d_0 - 1} + \dots + a'_{d_0})$ $\quad a', a_j' \in \mathbb{Z}$

$e \notin \mathfrak{p}$ και $a' x^{d_0} + \dots + a'_{d_0} \notin \mathfrak{p}$

$\mathfrak{p} = f(x)$

$(f(x)) = \mathfrak{p}$

$(f(x))$ πρωτο του $\mathbb{Z}[x]$ είναι πρώτο του $\mathbb{Q}[x]$
και καθε πρωτο μετα απο πολ. με ακ. είν.

$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[x]$

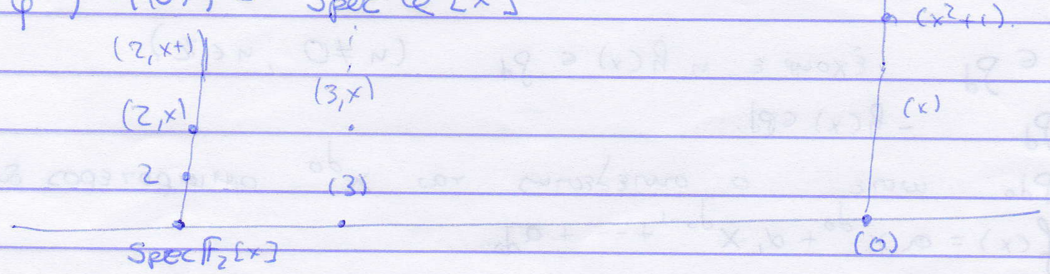
$m \longmapsto m$

$\varphi^{\alpha}: \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x] \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$

$\mathfrak{p} \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$

$(\varphi^{\alpha})^{-1}((p)) = \operatorname{Spec}\mathbb{F}_p[x]$

$(\varphi^{\alpha})^{-1}((0)) = \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x]$



Ένας ομομορφισμός $\varphi: R \to S$ επάγει.

$\varphi^{\alpha}: \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$

$p \longmapsto \varphi^{-1}(p)$.

η φ^{α} είναι συνεχής για την Zariski.

Αποδ. $\varphi^{-1}(p)$ πρωτο $\forall p$. I ιδεωδες του R. $J = \langle \varphi(I) \rangle$

$(\varphi^{\alpha})^{-1}(V(I)) = V(J)$

$q \in (\varphi^{\alpha})^{-1}(V(I)) \quad \varphi^{\alpha}(q) \in V(I) \iff \varphi^{-1}(q) \supset I \iff q \supset \varphi(I) \Rightarrow$

$\Rightarrow q \supset J$

Δηλαδη το αντιστροφο κλειστου είναι κλειστο

Affine schemes

α) Zariski top.

$X = \operatorname{Spec} R$ ⤳ δαυτόλιο regular functions

$\forall f \in R \quad D(f) = \{ p \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin p \}$

X_f ή $(\operatorname{Spec} R)_f$ για το ανοιχτό f.

Πρόταση Για μια οικογένεια $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ στοιχείων του R.

(*) $\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha \in A} (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha}$

ισχύει ανν το $\langle f_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ είναι ισο με το R

Αποδ. Αν ισχύει η (*) τοτε για τυχαίο $p \triangleleft R$ $_{\varepsilon\alpha}$.
$p \in (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha}$ για καποιο f_α. Αρα $f_\alpha \notin p$. συνεπως δεν υπαρχει πρωτο ιδεωδες που να περιέχει το $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ ⟶ $(f_\alpha)_{\alpha \in A} = R$

Αντιστροφως Αν $(f_\alpha)_{\alpha \in A} = R$ τοτε για $p \in R$ $\exists f_\alpha$ ωστε $f_\alpha \notin p$ αρα $p \in (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha}$.

$\operatorname{Spec} R \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha}$.

Για παράδειγμα κάθε ανοιχτο του $X = \operatorname{Spec} R$ είναι ένωση X_f, $f \in R$. Αν $(f_\alpha)_{\alpha \in A} = R$ μπορουμε να διαλέξουμε $f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_\ell}$ ωστε

$$\sum_{j=1}^{\ell} g_{\alpha_j} f_{\alpha_j} = 1 \qquad (f_\alpha)_{\alpha \in A} = (f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_\ell}).$$

Πόρισμα $X = \operatorname{Spec} R$ είναι quasi compact.

$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος $\{U_{\lambda_j}\}$

ωστε $X = \bigcup_{j=1}^{m} U_{\lambda_j}$.

(Χώροι όχι Hausdorf δεν τους λέμε compact).

Λήμμα

$X = \operatorname{Spec} R$ για $f, g \in R$ έχουμε

(i) $X_f \cap X_g = X_{fg}$

(ii) $X_f \supset X_g \iff g \in \sqrt{(f)}$

Απόδ. Αν $p \in X_f \cap X_g$ τότε $f \notin p$, $g \notin p$ p prime $f \cdot g \notin p$

$\Rightarrow X_f \cap X_g \subset X_{fg}$.

Αντιστρόφως για $p \notin X_{fg} \Rightarrow fg \notin p \Rightarrow f \notin p$ και $g \notin p$ $X_{fg} \subset X_f \cap X_g$

(ii) $\sqrt{(f)} = \bigcap_{f \in p \in \operatorname{Spec} R} p$. (Αυτό ισχύει)

Έστω $h \in \sqrt{(f)}$ τότε $h^m \in (f)$. Για p prime $f \in p \Rightarrow (f) \subset p$

$h^m \in f \Rightarrow h \in p$.

Στην συνέχεια διαλέγω

$h \in \bigcap_{f \in p \in \operatorname{Spec} R} p$ έστω $h^m \notin (f)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. τότε

το σύνολο

$S = \{ a \mid a \trianglelefteq R \ f \in a, h^m \notin a, \forall m = 1, 2, \dots \}$ μη κενό και

έχει μέγιστο στοιχείο. Αν q πρώτο άτοπο αν όχι

$\exists\, a, b$ $a \cdot b \in q$ και $a \notin q$, $b \notin q \Rightarrow$

$q \subsetneq (q, a)$, $q \subsetneq (q, b)$ $\Rightarrow (q, a) \notin S$, $(q, b) \notin S \Rightarrow$

$\exists\, m_1$ ώστε $h^{m_1} \in (q, a)$ $h^{m_2} \in (q, b)$ $h^{m_1 + m_2} \in q$ άτοπο

Άρα $g \notin \sqrt{(f)}$ ανν $\exists\, p$ μ.ε. $f \in p$ και $g \notin p$

ισοδύναμα ~~άρα~~ $p \notin X_f$, $p \in X_g$.

Localization

S πολ/κο σύνολο RS^{-1}
$S \neq 0$ $\quad a, b \in S \Rightarrow ab \in S$

Αν f όχι nilpotent
$\{f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$
$S = R \setminus p$ πολ/κο.
R_S, $RS^{-1} = \{\frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S\}$ $\quad \varphi_S : R \to R_S$

$\mathrm{Ker}\,\varphi_S = \{r \in R \mid r \cdot s = 0$ για κάποιο $s \in S\}$ $\quad r \mapsto \frac{rs}{s}$

$\mathrm{Spm}\, R_S \leftrightarrow$ μέγιστα στοιχεία στο $S = \{a \mid a \triangleleft R, a \cap S = \emptyset\}$ ως προς το

Universal mapping property of Localization
Για S πολ/κα κλειστό σύνολο όταν υπάρχει $\tilde{R}$ και
$\varphi : R \to \tilde{R}$ ώστε
(i) $s \in S$, $\varphi(s)$ αντιστρέψιμο στο $\tilde{R}$
(ii) $\varphi : R \to T$ αν $\varphi(s)$ αντιστρέψιμο στο T για $\forall s \in S$ τότε
$\exists!$ μορφισμός δακτυλίων
$v : \tilde{R} \to T$ ώστε $\varphi = v \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & T \\ \tilde{R} \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}(R, T) = \mathrm{Hom}(\tilde{R}, T)$.

Αν f nilpotent $\quad f \in P \ \forall P$ prime $\quad (\mathrm{Spec}\, R)_f = \emptyset$.
$f \in \sqrt{(0)}$.
Αν f όχι nilpotent $\quad X = \mathrm{Spec}\, R \supset X_f = (\mathrm{Spec}\, R)_f \neq \emptyset$.

X_f ανοιχτό $\quad R_f$ στοιχείο εδώ $r/f^n \quad r \in R$

$p \in X_f \Rightarrow f \notin p \Rightarrow f \neq 0 \mod p$

r/f^n δεν έχει πόλο στο X_f $\quad r/f^n$ regular function στο X_f.

Inductive limit

$X_f \supset X_g \Rightarrow g \in \sqrt{(f)} \Rightarrow g^n = af$ για n, $a \in R$

$\rho_{X_f, X_g} : R_f \longrightarrow R_g$

$\rho_{X_f, X_g} : R_f \longrightarrow R_g$

$\frac{r}{f^m} \longmapsto \frac{a^m r}{g^{nm}}$ $\quad \left(\frac{1}{f^m} = \frac{a^m}{g^{nm}} \right)$

Ο ομομορφισμός αυτός είναι μονοσήμαντα ορισμένος από τα R_f, R_g

$g^{n'} = a' f$, τότε η συνάρτηση είναι η ίδια γιατί:

$\frac{r}{f^m} \longmapsto \frac{a'^m r}{g^{n'm}}$

Restriction: regular functions $X_f \longrightarrow X_g$

Λήμμα $\quad X_f \supset X_g \supset X_h$

$\rho_{X_h, X_g} \circ \rho_{X_g, X_f} = \rho_{X_h, X_f}$

Θεωρούμε την συλλογή X_f ανοιχτά που περιέχουν το $p \in \operatorname{Spec} R$

$\mathcal{U}_p = \{ X_f \mid p \in X_f \}$

Διάταξη στο $\mathcal{U}_p$ X_f και X_g γράφουμε $X_f < X_g$ αν $X_f \supset X_g$

Δυο τυχαία στοιχεία X_{h_1}, X_{h_2} έχουν κοινό περιορισμό

$X_{h_1} \cap X_{h_2} = X_{h_1 h_2}$.

$X_{h_1} < X_{h_2 h_1}$ $\quad X_{h_2} < X_{h_1 h_2}$ ενώ τα X_{h_1}, X_{h_2} μπορεί να μην σχετίζονται.

Σε ένα σύνολο διατεταγμένο υπάρχει κάτι μεγαλύτερο αυτό λέγεται directed

$X_f \in \mathcal{U}_p \longmapsto R_f \qquad X_f < X_g \quad (X_f \supset X_g)$ και

$\rho_{X_g, X_f} : R_f \to R_g$

Ορίζεται το inductive

$\varinjlim_{X_f \in \mathcal{U}_p} R_f$ του $\{ R_f, \rho_{X_g, X_f} \}$

$r/f^m \in R_f$ σχετίζουμε το $(r/f^m, X_f)$

$A = \{ (r/f^m, X_f) \mid X_f \in U_p \}$

$(r/f^m, X_f) = (r/g^n, X_g)$

αν $\exists X_h \in U_p$ ώστε $\rho_{X_h, X_f}(r/f^m) = \rho_{X_h, X_g}(s/g^n)$ $\sim$

$\varinjlim_{X_f \in U_p} R_f = R/\sim$

Δομή αντιμεταθετικού δακτυλίου

$(r/f^m, X_f)$ (a, X_f), (b, X_g). $h = fg$. $X_f < X_h$, $X_g < X_h$

$[(a, X_f)] = [(\rho_{X_h, X_f}(a), X_h)]$ $[(b, X_g)] = [\rho_{X_h, X_g}(b)\, X_h]$ και τα προσθέτουμε, έτσι.

Inductive limit

$\forall\, i \in I$ directed set $(M_i, +)$ $i \le j$ $\exists\, \varphi_{ji} : M_i \to M_j$

$\varphi_{ii} = id_{M_i}$ $\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$ $i \le j \le k$

(M_i, φ_{ji}) $i, j \in I$ direct system.

$\varphi_i : M_i \to M$ ομάδα που ικανο. $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ji}$ το (M, φ_i) λέγεται όριο.

$M = \varinjlim_{i \in I} M_i$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\varphi_{ji}"'] & M \\ M_j \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

Συνθήκη

$(A, +)$ $f_i \quad M_i \to A$ ικανοποιεί $f_i = f_j \circ \varphi_{ji}$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\varphi_{ji}"] \arrow[dr, "f_i"'] & & M_j \arrow[dl, "f_j"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Τότε $\exists!\; h : M \to A$

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\varphi_{ji}"] \arrow[dr, "f_i"'] & & M_j \arrow[dl, "h"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Projective lim.

i, I direct $\varphi_{ij}: N_j \to N_i$ $\quad i \le j$

$\varphi_i : N \to N_i \quad i \in I$.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & N_i \\ & N_j \arrow[u, "\varphi_{i,j}"'] \end{tikzcd}$$

$N = \varprojlim_{i \in I} N_i$

Αν $\exists$ αλλο X με αυτη την ιδιοτητα τοτε $\exists!$ $h: X \to N$

$V(I) = \{ p \in \operatorname{Spec} R \mid I \subset p \}$

$D(I) = \{ p \in \operatorname{Spec} R \mid I \not\subset p \} =$

$D(f) = \{ p \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin p \}$ ανοιχτό δεμ. $\quad D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f)$

$D(I) = \bigcup_{j=1}^{n} D(f_j)$ πεπ. παρ.

$\varphi : R \longrightarrow S$

$\left.\begin{aligned} \varphi^{*} : \operatorname{Spec} S &\longrightarrow \operatorname{Spec} R \\ p &\longmapsto \varphi^{-1}(p) \end{aligned}\right\}$ συνεχής στην Zariski

$\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha \in A} (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha} \qquad X_f = D(f) = \{ p \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin p \}$

$\Updownarrow$

$\langle f_\alpha \rangle_{\alpha \in A} = R$

$X = \operatorname{Spec} R$ quasicompact.

(i) $X_f \cap X_g = X_{fg}$

(ii) $X_f \supset X_g \iff g \in \sqrt{(f)}$ δηλ. $g^n \in \langle f \rangle$ για κάποιο n

$\sqrt{0} = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p \qquad \boxed{\sqrt{f} = \bigcap_{f \in p \in \operatorname{Spec} R} p}$

$\left[\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} \iff \exists\, s' \neq 0 \in S \quad s'(r_1 s_2 - s_1 r_2) = 0 \right]$

Localization, Inductive limit.

$X_f \supset X_g \Rightarrow g^n = a f.$

$\operatorname{rest}_{X_f, X_g} : R_f \longrightarrow R_g$

$\frac{r}{f^m} \longmapsto \frac{a^m r}{g^{nm}}$

Περιορίζει regular function στο X_f στο X_g.

$X_f \supset X_g \supset X_h \qquad \operatorname{rest}_{X_f, X_h} = \operatorname{res}_{X_f, X_g} \circ \operatorname{rest}_{X_g, X_h}.$

Δακτύλιο φύτρων $\varinjlim_{X_f \in U_p} R_f \qquad U_p = \{ X_f \mid p \in X_f \}$ όλα τα ανοιχτά που περιέχουν το p

$[a, X_f] \in \varinjlim_{X_f \in U_p} R_f$ λέγεται το φύτρο της f στο p.

Άλλη περιγραφή.

$p \in \operatorname{Spec} R \qquad S = R \setminus p \qquad R_p = R S^{-1}$ localization.

$R_p = g/f \qquad f, g \in R,\ f \notin p$

Παραδείγματα

$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

$f \in \mathbb{Z}$ $\quad (p) \in X_f$ αν $\quad f \notin (p) \to p \nmid f \quad (f \not\equiv 0 \bmod p)$

$\mathcal{U}_{(p)} = \{ X_f \mid f$ και p πρώτα μεταξύ τους$\}$

$f = \pm p_1^{\alpha} \cdots p_e^{\alpha_e} \quad \alpha_j \geq 1$

$\sqrt{f} = p_1 \cdots p_e$

$\dfrac{r}{f^m} = \dfrac{r'}{p_1^{c_1} \cdots p_e^{c_e}} \quad c_j \geq 0$ ανάγωγο $\quad p_j \nmid r'$

$p_{j_1}, \ldots, p_{j_s}$ οι πρώτοι που εμφανίζονται στον παρονομαστή $c_j \geq 0$

$t = p_{j_1}^{c_1} \cdots p_{j_s}^{c_s}$ $\quad$ τότε $\dfrac{r}{f^m} = \dfrac{r'}{t}$ και στο

Διαφορετικά "πεδία ορισμού"

$\varinjlim_{X_f \in \mathcal{U}_{(p)}} \mathbb{Z}_f$ έχουμε $\left[\left(\dfrac{r'}{t}, X_t\right)\right] = \left[\left(\dfrac{r}{f^m}, X_f\right)\right]$

(Ακριβέστερα είναι αυτά που έχουν μεγαλες δυναμ)

Κάθε στοιχείο του $\varinjlim_{X_f \in \mathcal{U}_{(p)}} \mathbb{Z}_f$ είναι κλάσμα $\dfrac{r}{t}$, $p \nmid t$

Αντίστροφα για (t, p) το $\left[\left(\dfrac{s}{t}, X_t\right)\right] \in \varinjlim_{X_f \in \mathcal{U}_p} \mathbb{Z}_f$.

$\varinjlim_{X_f \in \mathcal{U}_{(p)}} \mathbb{Z}_f = \left\{ \dfrac{s}{t} \;\middle|\; \dfrac{s}{t} \text{ ανάγωγο}, (t,p) = 1 \right\} = \mathbb{Z}_{(p)}$.

$\varinjlim_{X_f \in \mathcal{U}_{(0)}} \mathbb{Z}_f = \mathbb{Q} \qquad \mathbb{Z}_{(0)} = \mathbb{Q}$ ισχύουν και στον γεν.

Ίδιο αποτέλεσμα στο $R = k[x]$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Πρόταση} \\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \qquad \varinjlim_{X_f \in \mathcal{U}_p} R_f \simeq R_p.\end{array}}$$

Στοιχείο του R_p γράφεται ως f/g, $\quad f, g \in R$, $f \notin p$.

άρα $\mathfrak{p} \in X_f$. Στο R_p αν $f' \notin p$

$\dfrac{g}{f} = \dfrac{g'}{f'}$ $\quad$ τότε $\exists$ $s \in R \setminus p$ ώστε $s(f'g - fg') = 0$

$\dfrac{g}{f} = \dfrac{g'}{f'} = \dfrac{fg'}{ff'} = \dfrac{f'g}{ff'}$

Αφού $p \in X_{f'}$, και $p \in X_{ff'}$ ως στοιχεία του $\varinjlim_{X_f \in \mathcal{U}_p} R_f$

$\left[\left(\dfrac{g}{f}, X_f\right)\right] = \left[\left(\dfrac{fg'}{ff'}, X_{ff'}\right)\right] = \left[\left(\dfrac{g'}{f'}, X_{f'}\right)\right]$

$X_f \in U_p$

$g/f \longmapsto [(g/f, X_f)]$ καλά ορισμένη. ανεξάρτητη της [illegible] ισότητας.

Είναι ομομορφισμός (πράξεις)

Στην αντίστροφη ορίζουμε

$$\psi : \varinjlim_{X_f \in U_p} R_f \longrightarrow R_p$$

$$[(g/f^m, X_f)] \longrightarrow g/f^m \quad \text{καλά ορισμένη!}$$

$$[(g/f^m, X_f)] = [(r/h^n, X_h)]$$

$$[(g/f^m, X_f)] = \left[\frac{f^{m(n-1)} h^{mn} g}{(fh)^{mn}}, X_{fh}\right]$$

$$[(r/h^n, X_h)] = \left[\frac{f^{mn} h^{(m-1)n} r}{(fh)^{mn}}, X_{fh}\right] \quad \text{στο } R_{fh}$$

$$\frac{f^{m(n-1)} h^{mn} g}{(fh)^{m \cdot n}} = \frac{f^{mn} h^{(m-1)n} r}{(fh)^{mn}} \quad \text{στο } R_p$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$g/f^m \qquad\qquad r/h^n.$$

ψ ομομορφισμός

$\psi \circ \varphi$, $\varphi \circ \psi$ ταυτοτικές.

Structure sheaf

Λήμμα Αν $X_f = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_{f_\alpha}$ και για $a \in R_f$ $\rho_{X_{f_\alpha}, X_f}(a) = 0$ $\alpha \in A$ τότε $a = 0$

περιορισμός

Αποδ. $g/f^m = 0/f^n$ $f^n g = 0$.

$a = g/f^m$, τότε $a = 0$ στο R_f $\exists n$ ώστε $f^n g = 0$ στο R (ορισμός ίσων πηλίκων)

Θέτουμε $\mathfrak{a} = \{h \in R \mid hg = 0\}$ $\mathfrak{a}$ ιδεώδες του R

συνεπώς $a = g/f^m = 0$ στο R_f ανν $f^n \in \mathfrak{a} \Rightarrow f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subset p \in \operatorname{Spec} R} p$$

$\Rightarrow f \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow$ για $p \in \operatorname{Spec} R$, $\mathfrak{a} \subset p \Rightarrow f \in p$ $(f \equiv 0 \bmod p)$

Έστω $a \neq 0$ στο R_f. Τότε υπάρχει πρώτο ιδεώδες $a \subset p$ με $f \notin p$ και

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longrightarrow & 0 \\ R_f & \longrightarrow & R_{f_\alpha} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & R_p & \end{array}$$

αντιμεταθετικό

$\rho_{X_{f_\alpha}, X_f}(a) = 0$ η εικόνα του a στο R_p είναι 0

Συνεπώς η εικόνα του $g = f^n a$ στο R_p είναι 0.

$\exists\, b \in R \setminus p$ ώστε $bg = 0 \Rightarrow b \in a$ όμως $p \supset a$ $b \in p$ άτοπο $b \in R \setminus p$

Συνεπώς $a = 0$ στο R_f.

Λήμμα Δίνεται $X_f = \bigcup_{\alpha \in A} X_{f_\alpha}$ και ότι για $g_\alpha \in R_{f_\alpha}$, $\alpha \in A$

και $\alpha, \beta \in A$ τυχαία

g_α g_β ταυτίζονται στον περιορισμό.

$\rho_{X_{f_\alpha f_\beta}, \underline{X_{f_\alpha}}}(g_\alpha) = \rho_{X_{f_\alpha f_\beta}, X_{f_\beta}}(g_\beta)$ (Ισότητα στις επικαλύψεις

Τότε υπάρχει $g \in R_f$ ώστε

$g_\alpha = \rho_{X_{f_\alpha}, X_f}(g)$ $\forall \alpha \in A$ (επέκταση)

$\varphi_f : R \to R_f$

$r \mapsto r/f$.

$\varphi_f(r) = \bar{r}$ Αν $X_f \supset X_g$ τότε $g \in \sqrt{(f)}$.

Ο R_g και $(R_f)_{\bar{g}}$ είναι ισόμορφοι ως δακτύλιοι

$g \in \sqrt{f}$ $\exists\, n, \alpha \in R$ ώστε $g^n = \alpha f$

$\phi : R_g \longrightarrow (R_f)_{\bar{g}}$ ← βλέπω το $\bar{g}$ ως στοιχείο του R_f.

$\frac{r}{g^e} \longmapsto \frac{\bar{r}}{\bar{g}^e}$ $r \in R$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

Αντιστρόφως $\psi : (R_f)_{\bar{g}} \to R_g$

$\left(\frac{r/f^k}{\bar{g}^e}\right) \to \frac{r a^k}{g^{nk+e}}$, $\frac{r}{f^k} \in R_f$, $r \in R$

R

Μέσω του κανονικού ισομορφισμού

$\bar{\varphi}_{\bar{g}} : R_f \to (R_f)_{\bar{g}}$ η

$\frac{a}{f^n} \to \frac{a}{f^n}\frac{\bar{g}}{\bar{g}}$.

$R_f = \frac{r}{f^\kappa} \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\bar{g}}} \frac{r}{f^\kappa}\frac{\bar{g}}{\bar{g}} \to \frac{r\,\alpha^\kappa}{g^{n\kappa+\ell}} \in R_g$

$\varphi \circ \bar{\varphi}_{\bar{g}} : R_f \to R_g$ ταυτίζεται με την ρ_{X_g, X_f}.

$\psi \circ \varphi = id_{R_g}$, $\varphi \circ \psi = id_{(R_f)_{\bar{g}}}$ (υπολογισμοί)

ψ, φ ισομορφισμοί.

$\bar{R} = R_f$, $\bar{X} = \operatorname{Spec} \bar{R}$, $\bar{f}_\alpha \in \bar{R}$ ορισμένο από το f_α

$X_f = \bar{X}$ $\quad X_{f_\alpha} = \bar{X}_{\bar{f}_\alpha}$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας $f = 1$.

Τότε $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_{f_\alpha} \Rightarrow X = \bigcup_{j=1}^{\ell} X_{f_j}$ (quasi compact)

$g_j = \frac{\alpha_j}{f_j^m} \in R_{f_j}$ $\quad j = 1, \dots, \ell$ με την ίδια δύναμη m στον παρ.

$\rho(X_{f_i f_j}, X_{f_i}) g_i = \frac{f_j^m \alpha_i}{(f_i f_j)^m} = \rho_{X_{f_i f_j}, X_{f_j}}(g_j) = \frac{f_i^m \alpha_j}{(f_i f_j)^m}$

Άρα μπορούμε να διαλέξουμε n_{ij} ώστε

$S \Rightarrow (f_i f_j)^{n_{ij}} (f_j^m \alpha_i - f_i^m \alpha_j) = 0 \quad 1 \le i < j < \ell$.

Τότε θέτουμε $N > m + n_{ij}$ $\forall\ 1 \le i < j \le \ell$. Αφού για τυχαίο $1 \le k \le \ell$ μπορούμε να γράψουμε $g_k = \alpha'_k / f_k^N$ έχουμε

$\alpha'_i f_j^N - \alpha'_j f_i^N = 0 \quad 1 \le i < j \le \ell$.

Αφού $X_{f_j} = X_{f_j^N}$ έχουμε

$X = \bigcup_{j=1}^{\ell} X_{f_j^N} \Rightarrow \exists\ b_j \in R$

$\left[\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha \in A} (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha} \quad \langle f_\alpha \rangle = R \right]$

$\sum_{j=1}^{\ell} b_j f_j^N = 1$, θέτουμε $g = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \alpha'_j \in R$

$f_i^N g = \sum_{j=1}^{\ell} b_j f_i^N \alpha'_j = \sum_{j=1}^{\ell} b_j f_j^N \alpha'_i = \alpha'_i$

αλλαγή δεικτών

Δηλ. $\rho_{X_{f_i}, X}(g) = \frac{\alpha'_i}{f_i^N} = g_i$

Από την άλλη για τυχαίο $\alpha \in A$

Θέτουμε

$h_\alpha = g_\alpha - \rho_{X_{f_\alpha}, X}(g)$

Τότε $\forall i$

$$\rho_{X_{f_i f_\alpha}}(h_\alpha) = \rho_{X_{f_i f_\alpha}, X_{f_\alpha}}(g_\alpha) - \rho_{X_{f_i f_\alpha}, X}(g) =$$

$$= \rho_{X_{f_i f_\alpha}, X_{f_i}}(g_i) - \rho_{X_{f_i f_\alpha}, X}(g) =$$

$$= \rho_{X_{f_i f_\alpha}, X}(g) - \rho_{X_{f_i f_\alpha}, X}(g) = 0 \to h_\alpha = 0$$

$$g_\alpha = \rho_{X_{f_\alpha}, X}(g) \quad \forall \alpha \in A$$

<u>Ορισμός</u> X τοπ. χώρος U ανοιχτό του X

$\forall U$ $F(U)$ προσθετική ομάδα, module, δακτύλιος

F είναι presheaf αν

$V \subset U$ ανοιχτ. $\rho_{V,U} : F(U) \to F(V)$

(i) $\rho_{U,U} = id_{F(U)}$

(ii) $W \subset V \subset U$ $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$ restriction

sheaf αν επιπ.

F1. U ανοιχτό $U = \bigcup_{j \in J} U_j$

αν $\alpha \in F(U)$ $\rho_{U_j, U}(\alpha) = 0$, $j \in J \Rightarrow \alpha = 0$

F2 Αν $F(U_j)$ $j \in J$ ικανοποιεί

$\rho_{U_i \cap U_j, U_j}(\alpha_j) = \rho_{U_i \cap U_j, U_i}(\alpha_i)$ $\forall i, j$ $\exists\, \alpha \in F(U)$ $\alpha_j = \rho_{U_j, U}(\alpha)$

$$F(U) \to \prod_{j \in J} F(U_j) \rightrightarrows \prod_{i,j \in J} F(U_i \cap U_j)$$

$\left[\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha \in A} \operatorname{Spec} R_{g_\alpha} \right.$

$\left. \langle g_\alpha \rangle = R \right]$

Παράδειγμα Sheaf

U ανοιχτό σε τοπ. χώρο X,

$\mathcal{C}_X(U) = \{ U \to \mathbb{R}$ συνεχής $\}$

$\forall x \in U$ $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x)$

$\mathcal{C}_X(U)$ αντιμεταθετικός δακτύλιος, με μονάδα $1_X(u)=1$.

$V \subseteq U$ ανοιχτό $\rho_{V,U} = f|_V$ $\mathcal{C}_X$ sheaf αντιμεταθετικών δακτυλίων.

2) $X = \mathbb{R}^n$ $\mathcal{D}_X(U)$ C^∞ - συναρτήσεις (ομοίως σε manifold).

3) $U \subset \mathbb{C}^n$ $\mathcal{O}_X(U)$ ολόμορφες U.

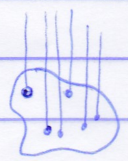
$\mathcal{O}_X$ sheaf commutative rings στο $X = \operatorname{Spec} R$

$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$.

$X_f = \bigcup_{\alpha \in A} X_{f_\alpha}$ τότε έχουμε την F_1, F_2 συνθήκες.

$\mathcal{O}_X(U)$ για τυχαίο ανοιχτό

$\mathcal{O}_X(U) = \{ \{s_p\} \in \prod_{p\in U} R_p \mid$ αν $(X_{f_\beta})_{\beta\in B}$ ανοιχτό κάλυμμα του U και $s_\beta \in R_{f_\beta}$ διαλεχτούν κατάλληλα τότε για $p \in X_{f_\beta}$ το germ s_β στο p είναι το $\{s_p\}$ $\}$



Δεν μπορούν όμως οι επιλογές αυτές να είναι άσχετες! Θέλουμε τοπικά τα s_p να προέρχονται από πηλίκα του R

Δηλ. $\forall p \in U$, X_f περιοχή $\subset U$ ώστε $\forall q \in X_f$ $f \notin q$, $s_q = \frac{a}{f}$

$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$ $\quad \{ \{s_p\} \in \prod_{p \in X_f} R_p \}$

<u>Θεώρημα</u> $X = \operatorname{Spec} R$ $\mathcal{O}_X$ - sheaf commutative rings

$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X) = R$

$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(D(f)) = R_f$

— —

Δηλαδή έχουμε ένα open covering $\{X_{f_\beta}\}_{\beta\in B}$ του U

$s_\beta \in R_{f_\beta}$ $\quad (s_\beta)_p$ germ at p $= \{s_p\}$.

Άρα $s_\alpha \in X_{f_\alpha}$, $s_\beta \in X_{f_\beta}$ ταυτίζονται στο $X_{f_\alpha} \cap X_{f_\beta} = X_{f_\alpha f_\beta}$

$\rho_{X_{f_\alpha f_\beta}, X_{f_\alpha}}(s_\alpha) = \rho_{X_{f_\alpha f_\beta}, X_{f_\beta}}(s_\beta)$

$[s_\alpha, p] = [s_\beta, p] \Rightarrow \exists\, X_{h_p} \subset X_{f_\alpha f_\beta}$ ώστε $\rho_{X_{h_p}, X_{f_\alpha f_\beta}}(s_\alpha) = \rho_{X_{h_p}, X_{f_\alpha f_\beta}}(s_\beta)$

Τοτε $\forall p \in X_{f_\alpha f_\beta}$ διαλέγουμε το X_{h_p} ωστε

$$X_{f_\alpha f_\beta} = \bigcup_{p \in X_{f_\alpha f_\beta}} X_{h_p} \quad (*)$$

$$\rho_{X_{h_p}, X_{f_\alpha f_\beta}}(\rho(X_{f_\alpha f_\beta}, X_{f_\alpha}(s_\alpha)) = \rho_{X_{h_p}, X_{f_\alpha f_\beta}}(\rho_{X_{f_\alpha f_\beta}, X_{f_\beta}}(s_\beta)).$$

$a = \rho_{X_{f_\alpha f_\beta}, X_{f_\alpha}}(s_\alpha) = \rho_{X_{f_\alpha f_\beta}, X_{f_\beta}}(s_\beta)$ έχουμε

οτι το α είναι 0 σε καθε περιοριςμο X_{h_p} του $(*)$

Αρα είναι 0 στο $X_{f_\alpha f_\beta}$.

Δηλαδη το $\{s_p\}$ είναι το στοιχειο του $s \in \mathcal{O}_X(U)$

το οποιο προέρχεται απο το $s_\beta \in \mathcal{O}_X(X_{f_\beta}) = R_{f_\beta}$

Πράξεις στο $\mathcal{O}_X(U)$ στα stalks

$\{s_p\} + \{t_p\} = \{s_p + t_p\}$ — germ του $\rho_{X_{f_g}, X_f}(s) + \rho_{X_{f_g}, X_g}(t)$

$\{s_p\} \cdot \{t_p\}$

$\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$

$\rho_{V,U} : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$

$\{s_p\}_{p \in U} \longmapsto \{s_q\}_{q \in V}$

Θεωρημα $X = \operatorname{Spec} R$, $\mathcal{O}_X$ sheaf αντιμεταθετικων αλγεβρων υπερ X ως προς την Zariski τοπ.

$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X) = R$

$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(D(f)) = R_f$.

$X = \operatorname{Spec} R$

$(X, \mathcal{O}_X) \longleftarrow$ affine scheme

X underlying χώρος

$$\varinjlim_{p \in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = R_p.$$

Παραδείγματα

($\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}$)

Ανοιχτό $U = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z} \setminus \{(p_1), \dots, (p_e)\} = (\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z})_{p_1 \cdots p_e}$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}) = \left\{ \frac{\gamma}{(p_1 \cdots p_e)^m} \;\middle|\; \gamma \in \mathbb{Z} \quad m \in \mathbb{N} \right\}$$

$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, (p)} = \mathbb{Z}_{(p)}$

$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}, (0)} = \mathbb{Q}$

(2) $K[x]$ $\quad (\mathrm{Spec}\,K[x], \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,K[x]})$ affine line

$$\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = \{ g/f^m \mid g \in K[x],\; m > 0 \}$$

Ανάγωγο $g(x) \in K[x] \longrightarrow$ σημείο $z = (g(x))$

$$\mathcal{O}_{X,z} = K[X]_{(g(x))} = \left\{ \frac{r(x)}{h(x)},\; r(x), h(x) \in K[z] \quad (h(x), g(x)) = 1 \right\}$$

Έστω $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ section του U.

$s(x) = s \bmod m_x$, $\mathcal{O}_{X,x}/m_x$ $\quad m_x$ μέγιστο ιδεώδες (πρώτο)

~~Έστω~~ Μορφή συνάρτησης αλλά οι τιμές της είναι σε "διαφορετικά" σώματα (αλ - περιοχές)

Extreme case R δακτύλιος, f nilpotent (πχ $R = k[x]/x^n$). Τότε $f(p) = 0$ $\forall p \in \mathrm{Spec}\,R$ αλλά το $f \neq 0$.

Άσκηση R_p σε πρώτο ιδεώδες $\overset{R}{\text{αλ. περιοχ.}}$ $R_p \subset Q(R)$.
U ανοιχτό του $(\mathrm{Spec}\,R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,R})$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{p \in U} R_p$$

Αποδ. $U = D(f)$. Τότε $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = R_f \subset R_p$ για $p \in U$.
($p \in U$: $f(p) \neq 0$, $f \notin p$ $\quad$ αντιστρέψιμο f $\quad$ αντιστρέφω περισσότερα

$$R_f \subset \bigcap_{p \in U} R_p$$

25

Αντιστροφως έστω $h \in \bigcap_{p \in U} R_p$.

Τοτε για καθε $p \in U$ διαλεγω $\alpha_p \in R$ και $g_p \in R \setminus p$ και ανοιχτο $D(g_p) \subset D(f)$ του p ώστε $h = \alpha_p / g_p$.

$D(f) = \bigcup_{p \in U} D(g_p)$

$D(f) = \operatorname{Spec} R[1/f]$ quasicompactness

$= \bigcup_{i=1}^{n} D(g_{p_i})$

Δηλαδη το $D(f)$ καλ. με πεπ. το πληθος σύνολα.

$g_i = g_{p_i}$ $\alpha_i = \alpha_{p_i}$

$\underline{f^m = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i}$ $\left(\operatorname{Spec} R = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (\operatorname{Spec} R)_{f_\alpha} \iff (f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} = R_f\right.$

$R_f : \frac{r}{f^m} =$ $\langle g_i \rangle = R_f$

$h = \alpha_i / g_i$: $h = \frac{c_i \alpha_i}{c_i g_i} \Rightarrow h\, c_i g_i = c_i \alpha_i$

$\Rightarrow \sum c_i g_i \cdot h = \sum c_i \alpha_i \Rightarrow h = \frac{\sum c_i \alpha_i}{\sum c_i g_i} = \frac{r}{f^m}$.

$\bigcap_{p \in U} R_p \subset R_f \Rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{p \in U} R_p$.

Τυχαιο ανοιχτο $U = \bigcup_{j \in J} D(f_j)$

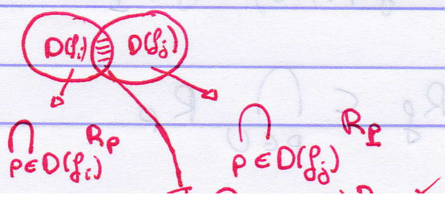
$\varphi_j = \rho_{D(f_j), U} : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(D(f_j), \mathcal{O}_X)$

$\prod_{j \in J} \xi_j \in \prod_{j \in J} \Gamma(D(f_j), \mathcal{O}_X)$ ορίζει στοιχειο στο $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

Αν $\forall i, j$ $\rho_{D(f_i) \cap D(f_j), D(f_i)}(\xi_i) = \rho_{D(f_i) \cap D(f_j), D(f_j)}(\xi_j)$

$\xi_i = \xi_j$ στο $R_{f_i f_j}$

$\xi_i = \xi_j \in \bigcap_{p \in D(f_i) \cup D(f_j)} R_p$.



Sheaf

Δίνεται ένα sheaf $\mathcal{F}$ υπερ τοπολογικού χώρου X και ανοιχτό U του X μπορούμε να ορίσουμε ένας sheaf υπερ του U ορίζοντας $\mathcal{F}|U$ restriction του $\mathcal{F}$ στο U.

$\mathcal{F}(V)$ σε καθε ανοιχτο του V (ανοιχτά με την επαγόμενη = ανοιχτά στον μεγάλο)

Συνάρτηση μεταξύ sheaves

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sheaves στο X αν για καθε U ανοιχτο του X

$f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ και για καθε ανοιχτο $V \subset U$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho^{\mathcal{F}}_{V,U} & & \downarrow \rho^{\mathcal{G}}_{V,U} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

έχουμε ομομορφισμο sheaves

$$f_x \in \mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}_x = \varinjlim \mathcal{G}(U)$$

καλα ορισμενο λογο ταυτισης των.

Παράδειγμα

M module υπερ R. $M_S = S^{-1}M$

$M_S = \{ m/t \mid m \in M, t \in S \}$

$\frac{m_1}{s_1} = \frac{m_2}{s_2}$, $m_1, m_2 \in M$, $s_1, s_2 \in S \Leftrightarrow \exists s' \in S$ $s'(m_1 s_2 - m_2 s_1) = 0$

f όχι nonlipotent $S = \{ f, f^2, f^3 \}$

M_f, M_p $S = R - p$.

$X_f \to M_f$.

$\varinjlim_{p \in X_f} M_f = M_p$

Ορίζουμε ένα sheaf $\tilde{M}$ από R-modules υπερ το $X = \operatorname{Spec} R$.

U ανοιχτό

$\Gamma(U, \tilde{M})$ είναι ένα $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-module

$V \subset U$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U, \tilde{M}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \tilde{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(V, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(V, \tilde{M}) & \longrightarrow & \Gamma(V, \tilde{M}) \end{array}$$

sheaf από $\mathcal{O}_X$ modules

$\varphi : M \to N$ R-module hom

$\varphi_f : M_f \to N_f$ απο R_f -modules

$X_g \subset X_f$

$$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{\varphi_f} & N_f \\ \downarrow \rho^M_{X_g, X_f} & & \downarrow \rho^N_{X_g,X_f} \\ M_g & \longrightarrow & N_g \end{array}$$

$\varphi_p : M_p \to N_p$

και με αυτο τον τρόπο μια συνάρτηση απο sheaves

$\tilde{\varphi} : \tilde{M} \to \tilde{N}$

U ανοιχτο

$\tilde{\varphi} : \Gamma(U, \tilde{M}) \to \Gamma(U, \tilde{N})$ είναι $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-module hom.

<u>Γενικά</u> $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ additive groups (rings)

$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ωστε

$$\begin{array}{ccc} \varphi_U : \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

ομο.

Αν $\forall U$ το φ_U είναι injective τοτε το φ_U λεγεται inj

$\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$

Αν ο φ είναι surjective γι' καθε x τοτε έχουμε surjective. (αλλα αυτο δεν σημαίνει ότι είναι surjective στα ανοιχτα $\to$ συνομολογια των sheaves)

$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \xrightarrow{exp} \mathbb{C}^* \to 0$

<u>Ασκηση</u>

$f : X \to Y$ συνεχης συνάρτηση ανάμεσα σε τοπ. χωρους

U

$\mathcal{G}(U) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ sheaf στο Y $f_* \mathcal{F}$

$\rho^{\mathcal{G}}_{V,U}$ $V \subset U$ $: \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$

$\rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V), f^{-1}(U)}$ $W \subset V \subset U$ ισχυει

$U = \bigcup_{j \in J} U_j$ $f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$.

Ένας ομομορφισμός

$\varphi: R_1 \to R_2$ επάγει συνεχή απεικ.

$\varphi^{\alpha}: \operatorname{Spec} R_2 \to \operatorname{Spec} R_1$

$p \longmapsto \varphi^{-1}(p)$ συνεχής.

$\tilde{M}$ sheaf στο Spec R_2 που δίνεται από το R_2-module M

$\varphi: R_1 \to R_2$ μας επιτρέπει να το δούμε ως R_1-module.

$\varphi^{\alpha}_{*}(\tilde{M})$ που επάγεται στο Spec R_1 είναι το ίδιο με το R_1-module $\tilde{M}$.

<u>Αποδ</u> $X = \operatorname{Spec} R_1$, $Y = \operatorname{Spec} R_2$ $f \in R_1$

$$(\varphi^{\alpha})^{-1}(X_f) = \{ p \in \operatorname{Spec} R_2 : \underset{\varphi^{\alpha}(p)}{\varphi^{-1}(p)} \in X_f \}$$
$$= \{ p \in \operatorname{Spec} R_2 \mid f \notin \varphi^{-1}(p) \}$$
$$= \{ p \in \operatorname{Spec} R_2 \mid \varphi(f) \notin p \} = Y_{\varphi(f)}.$$

$$\Gamma(X_f, \varphi^{\alpha}_{*}\tilde{M}) = \Gamma(Y_{\varphi(f)}, \tilde{M}) = M_{\varphi(f)}.$$

N είναι το M αλλά ως R_1-module μέσω φ

$\varphi: N_f \to M_{\varphi(f)}$

$\frac{\alpha}{f^m} \longmapsto \frac{\alpha}{\varphi(f)^m}$ είναι ισομορφισμός.

αντιστρέφω το f αλλά με τον φ-πολ/σμό

Ringed Space

Ορισμός $(X, \mathcal{O}_X)$ τοπ. χώρο X, $\mathcal{O}_X$-sheaf δακ. λέγεται ringed space.

X underlying space. μορφισμός $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ τα φτιάχνω στην ίδια βάση.

Ζευγάρι: f συνεχής $f: X \to Y$ και $\theta: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ sheaves από αντιμεταθετικούς δακτύλιους υπερ του Y

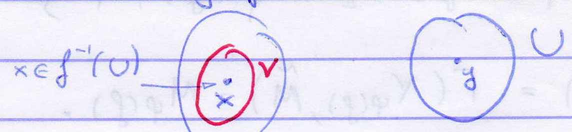
Αν κάθε stalk $\mathcal{O}_{X,x}$ του $\mathcal{O}_X$ στο x είναι local ring τότε ο $(X,\mathcal{O}_X)$ local ringed space.

Μορφισμός στο local ringed spaces

$$\theta_y: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}, \quad y=f(x) \text{ είναι local hom}$$

$m_y \in \mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{\text{εικόνα}}$ μέσα στο m_x του $\mathcal{O}_{X,x}$

Για ανοιχτή περιοχή U του $y=f(x) \in Y$



και έχουμε τον ομομορφισμό δακτυλίων

$$\theta_U : \Gamma(U,\mathcal{O}_Y) \to \Gamma(U, f_* \mathcal{O}_X) = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$$

Για κάθε ανοιχτό $V \subset f^{-1}(U)$ υπάρχουν ομομορφισμοί δακτ.

$$\Gamma(U,\mathcal{O}_Y) \to \Gamma(f^{-1}(U),\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\rho^X_{V,f^{-1}(U)}} \Gamma(V,\mathcal{O}_X)$$

οπότε μπορεί να οριστεί ο ομομορφισμός δακτυλίων

$$\varinjlim_{y\in U} \Gamma(U,\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_{Y,y} \to \varinjlim_{x\in V} \Gamma(V,\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_{X,x}$$

ο οποίος είναι ο $\theta_y: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$

Έστω X τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F}$ sheaf υπερ του X. Τότε για ένα ανοιχτό U του X ένα ανοιχτό V στο U είναι ανοιχτό του X (ΟΚ)

Ορίζοντας $\mathcal{G}(V)=\mathcal{F}(V)$ παίρνουμε sheaf $\mathcal{G}$ στο U.
$\mathcal{G}$ περιορισμός του $\mathcal{F}$ στο U και $\mathcal{F}|U$

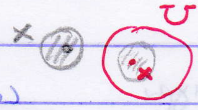
Για ringed space $(X,\mathcal{O}_X)$ και U ανοικτό έχουμε ringed space $(U,\mathcal{O}_{X|U})$. Για την $i:U\to X$ θεωρούμε το $i_*(\mathcal{O}_{X|U})$

ως locally ringed space

Τότε $i_*(\mathcal{O}_{X|U})|_U=\mathcal{O}_{X|U}$ ok, και για $x\notin\bar U$ μπορούμε να διαλέξουμε ανοικτό V του x ώστε $V\cap U=\emptyset$.

Αφού $i^{-1}(V)=\emptyset$ έχουμε $\Gamma(V,i_*(\mathcal{O}_{X|U}))=0$

ιδιαίτερα $i_*(\mathcal{O}_{X|U})|_{(X\setminus\bar U)}=0$



Για ένα ανοικτό W του X ο περιορισμός

$$\Gamma(W,\mathcal{O}_X)\xrightarrow{r_{W\cap U,W}}\Gamma(W\cap U,\mathcal{O}_X)$$

επάγει

$$i^\#_W:\Gamma(W,\mathcal{O}_X)\longrightarrow\Gamma(W,i_*(\mathcal{O}_{X|U})).$$

$= \Gamma(W\cap U,\mathcal{O}_X)$

Επίσης

$$\Gamma(W,i_*(\mathcal{O}_{X|U}))=\Gamma(W\cap U,\mathcal{O}_X).$$

Παρατηρούμε ότι $i^\#_W$ ορίζει ομομορφισμό sheaf

$$i^\#:\mathcal{O}_X\to i_*(\mathcal{O}_{X|U})$$

και για local ringed space $(X,\mathcal{O}_X)$ ο $i^\#$ είναι local homomorphism

Έτσι $(i,i^\#):(U,\mathcal{O}_{X|U})\to(X,\mathcal{O}_X)$ μορφισμός από ringed spaces

<u>Πρόταση</u> Ένας ομομορφισμός $\varphi:R\to S$ ορίζει μορφισμό από ringed spaces

$$(\varphi^\alpha,\varphi^\#):(\operatorname{Spec}S,\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}S})\to(\operatorname{Spec}R,\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R})$$

Το φ^α συνεχής συνάρτηση.

$$\varphi^\alpha:\operatorname{Spec}S\to\operatorname{Spec}R$$
$$p\longmapsto\varphi^{-1}(p).$$

και $\varphi^\#$ είναι ομομορφισμός sheaves

$$\varphi^\#:\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}R}\to\varphi^\alpha_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}S}$$

επαγόμενος από το $\varphi_f:R_f\to S_{\varphi(f)}$ για ανοικτά $D(f)$ του $\operatorname{Spec}R$, $f\in R$.

<u>Απόδ</u> Το φ^α είναι συνεχής. Το φ_f επάγει $\varphi^\#$ για sheaves προσθ. ορίζουμε

Επιπλέον, S μπορεί να ειδωθεί ως R-άλγεβρα μέσω φ.

$\varphi^\#$ sheaf ομομορφισμός από αντιμεταθετικούς δακτυλίους (αυτό μετά modules)

$$\varphi_f:R_{\varphi^{-1}(p)}\to S_p$$

$p\in\operatorname{Spec}S$, φ_f local homomorphism

Ορισμός

Έστω $(X, \mathcal{O}_X)$ local ringed space. Αν υπάρχει $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ του X ως locally ringed space ώστε $(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda})$ ισόμορφο με affine scheme, τότε $(X, \mathcal{O}_X)$ λέγεται scheme. X τοπολ. χώρος, $\mathcal{O}_X$ structure sheaf.

Ανοιχτά που κολλάνται.

Παράδειγμα

$U_0 = (\operatorname{Spec} k[x], \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k[x]})$

$U_1 = (\operatorname{Spec} k[y], \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k[y]})$

$U_{01} = (\operatorname{Spec} k[x, 1/x], \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k[x, 1/x]})$ $\quad \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k[x,1/x]} = \mathcal{O}_X|_{X_x}$.

Ομοίως ορίζουμε ανοιχτό $D(y) = X_y$

$U_{10} = \operatorname{Spec} k[y, 1/y], \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k[y, 1/y]}$

$$\varphi : k[y, 1/y] \longrightarrow k[x, 1/x]$$
$$f(y, 1/y) \longmapsto f(x, 1/x)$$

επάγει ισομορφισμό affine schemes
$$(\varphi^a, \varphi^*) : U_{01} \longrightarrow U_{10}$$
ο οποίος κολλάει τα U_0, U_1 και καταλήγουμε στο $\mathbb{P}^1_k = (Z, \mathcal{O}_Z)$

$$Z = X \cup_{\varphi^a} Y.$$

Projective space.

$R = k[x_0, \dots, x_n]$ δακτύλιος πολ. ορίζουμε

$\mathbb{P}^n_k = \{ P : p$ ομογενές πρώτο ιδεώδες του R, $p \neq (x_0, \dots, x_n) \}$

R_d = σύνολο ομογενών πολυωνύμων βαθμού d, I_d το σύνολο των πολυωνύμων στον R_d και I ιδεώδες του R

$$I_d = I \cap R_d$$

Αν

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_d$$

Τότε το I λέγεται ομογενές ιδεώδες του R. (Έχουμε δείξει σελ. 141 ότι παράγεται από ομογενή ιδεώδη.)

Πρώτα και ομογενή ιδεώδη.

I ομογενές

$V(I) = \{ p \in \mathbb{P}^n_k : I \subset p \}$ → κλειστά → τοπολογία στο $\mathbb{P}^n_k$.

$D_+(f) = \{ p \in \mathbb{P}^n_k \mid f \notin p \}$ και αυτά σχηματίζουν fundamental open sets του $\mathbb{P}^n_k$.

$\Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) = \{ \frac{g}{f^m} \mid g \in R$ ομογενές, $\deg g = m \deg f$, $m \geq 1 \}$

Κατασκευή structure sheaf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}$ του $\mathbb{P}^n_k$. → ringed space $(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k})$

Scheme structure

$U_j = D_+(x_j) \quad j = 0, \dots, n \quad \mathbb{P}^n_k = \bigcup_{j=0}^{n} U_j$

Πράγματι ένα prime ideal του p στο $\mathbb{P}^n_k$. Δεν είναι το $(x_0, \dots, x_n)$ το οποίο είναι maximal. Άρα $(x_0, \dots, x_n) \not\subseteq P$.

Άρα ένα τουλάχιστον x_j δεν ανήκει στο p.

$R_j = k\left[\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right] = k\left[\frac{x_0}{x_j}, \dots, \widehat{\frac{x_j}{x_j}}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right]$

$\cong k[x_1,\dots,x_n]$

Θα το δείξουμε

Στην πραγματικότητα $U_j \cong \operatorname{Spec} R_j$

Διασπάμε το $g \in k[x_0,\dots,x_n]$ ως

$g = g_{d_1} + \dots + g_{d_e}$ $\quad 0 \le d_1 < d_2 < \dots < d_e \quad \deg g_{d_i} = d_i$ ομογενές.

$$\varphi_j(g) = \frac{g_{d_1}}{x_j^{d_1}} + \frac{g_{d_2}}{x_j^{d_2}} + \dots + \frac{g_{d_e}}{x_j^{d_e}}, \quad \varphi_j(g) \in R_j.$$

$\underbrace{x_0^2}_{2} + \underbrace{x_1x_2^3}_{4} + \underbrace{x_0x_1^5}_{6} \rightsquigarrow \left(\frac{x_0}{x_j}\right)^2 + \frac{x_1}{x_j}\left(\frac{x_2}{x_j}\right)^3 + \frac{x_0}{x_j}\frac{x_1^5}{x_j^5}$

Ο ομομορφισμός δακτυλίων

$$\varphi_j : R \to R_j$$

$\varphi_j^{-1}(p) \in U_j$ για $p \in \operatorname{Spec} R_j$

Αφού για $p = (h_1,\dots,h_m)$ $\quad \deg h_i = e_i$

$\tilde{h}_i = x_i^{e_i} h_i\left(\frac{x_0}{x_j},\dots,\frac{x_n}{x_j}\right) \in R$ ομογενές πολυώνυμο βαθμού e_i

$$\varphi_j^{-1}(p) = (\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_m)$$

Επιπλέον αν $x_j \in \varphi_j^{-1}(p)$ τότε $1 = x_j/x_j \in p$ άρα αφού $p \in \operatorname{Spec} R_j$ έχουμε άτοπο

Δηλαδή $\varphi_j^{-1}(p) \in U_j$ άρα έχουμε

$$\varphi_j^{a} : \operatorname{Spec} R_j \to U_j$$

Η φ_j^{a} είναι συνεχής. Αντιστρόφως για $q \in U_j$ έχουμε $q = (H_1,\dots,H_e)$ όπου τα $H_1,\dots,H_e$ είναι ομογενή.

Θέτουμε

$$h_j = \frac{1}{x_j^{e_i}} H_i \in R_j \quad e_i = \deg H_i$$

τότε $p = (h_1,\dots,h_e)$ ιδεώδες του R_j. Αφού $x_j \notin q$, $1 \notin p$.

Αν $f\cdot g \in p^{R_j}$ για $f,g \in R_j$ τότε για $\deg f = a$, $\deg g = b$

θέτουμε $\quad \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \frac{x_2}{x_0} \xrightarrow{x_0^2} x_1^2 + x_2 x_0^2$

$F = x_j^{a} f$, $\quad G = x_j^{b} g \quad$ Τα F, G είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού a,b και $FG \in q$, πρώτο $\Rightarrow F \in q$ ή $G \in q$ $\Rightarrow f \in p$ ή $g \in p \Rightarrow p$ prime.

Απο τον ορισμο του p είναι σαφες ότι $\varphi_j^{-1}(p)=\varphi$.

Άρα ορίζεται η αντιστροφη της φ_j^α $(\varphi_j^\alpha)^{-1}: U_j \longrightarrow \operatorname{Spec} R_j$

Για ομογενες πολυώνυμο F στο R βαθμου m θέτουμε

$$f = \frac{1}{x_j^m} F \in R_j$$

και έχουμε

το elementary ανοιχτο

$$\varphi_j^\alpha(\operatorname{Spec} R_j)_f = D_+(F) \cap U_j$$ — τομη με το U_j

και

$$(\varphi_j^\alpha)^{-1}(D_+(F)\cap U_j) = (\operatorname{Spec} R_j)_f$$

$(\varphi_j^\alpha)^{-1}$, φ_j^α συνεχεις ο φ_j^α ομοιομορφισμος

$$\Gamma(U_j, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) = R_j \qquad \Gamma(U_j \cap D_+(F), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}) = (R_j)_f$$

Δηλαδη $(U_j, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}|_{U_j}) \underset{\text{spaces}}{\overset{\text{loc. ringed}}{\cong}} (\operatorname{Spec} R_j, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_j})$

<u>Γενικευση</u>

Graded ring $S = \bigoplus_{d=0}^\infty S_d$, $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$

$a \in S_d$ ομογενές βαθμου d. (ορισμος)

πχ.

$S = \bigoplus_{d=0}^\infty S_d$ $\qquad S = k[x_0, \dots, x_n]$ $\quad S_d$ ομογενή πολυώνυμα βαθμου d.

$I \triangleleft S$ $\quad I_d = I \cap S_d$

Αν $I = \bigoplus_{d=0}^\infty I_d$ τότε το I λέγεται ομογενές ιδεώδες

Ενα ιδεώδες είναι ομογενες αν κάθε στοιχειο του γραφεται ως άθροισμα ομογενων

$F = F_{d_1} + \dots + F_{d_k}$

ορίζουμε $S_+ = \bigoplus_{d\geq 1} S_d$ και το S_+ ομογενες ιδεωδες του S

$\operatorname{Proj} S = \{ p : p$ ομογενή prime ideals του S, $p \not\supseteq S_+ \}$

Ομογενες prime spectrum.

$$V(a) = \{ p \in \operatorname{Proj} S \mid p \supseteq a \}$$

Zariski Topology. $\{(V(a)\}$ κλειστά σύνολα.

$f \in S_d$ θέτουμε

$$D_+(f) = \{ p \in \operatorname{Proj} S,\ f \notin p \}$$

Τότε $D_+(f)$ ανοιχτό, βάση της τοπολογίας

<u>Πρόβλημα</u> Έστω S ένας graded ring και έστω a ένα ομογενές ιδεώδες S. $V(a)$ closed τοπολογία.

$$V(a)^c = \bigcup_{f \in a,\ f \text{ ομογενές}} D_+(f)$$

$p \in V(a)^c \Rightarrow p \notin V(a) \Rightarrow p \not\supseteq a$

$\exists f \in a$ ώστε $f \notin p$.

<u>Πρόβλημα</u> Αν Ένας graded ring S over R γεννάται από πεπ. πλήθος $a_0, \dots, a_n$ στο S_1 ως R-άλγεβρα τότε

$$\varphi : R[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow S$$

$$f(x_0, \dots, x_n) \longrightarrow f(a_0, \dots, a_n) \quad \text{grade preserving επι.}$$

$\operatorname{Ker} \varphi$. ομογενές ιδεώδες του $R[x_0, \dots, x_n]$

$\mathcal{O}_X$ structure sheaf $X = \operatorname{Proj} S$.

$$\Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_X) = \{ g/f^m \mid g \in S_{md},\ m \geq 1 \} = \text{elements of degree } 0\ S_f.$$

Κάθε ανοιχτό καλύπτεται από $D_+(f)$ άρα ορίζει local ringed space (για αυτό θέλει στοιχεία το $\mathcal{O}$)

Για $f \in S_d$ το $S_f^{(0)}$ του S_f αποτελούμενο από είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος

$$(D_+(f), \mathcal{O}_X|_{D_+(f)}) \cong (\operatorname{Spec} S_f^{(0)}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S_f^{(0)}})$$

Αν το S είναι R-άλγεβρα ο αντιμεταθετικός δακτύλιος $S_f^{(0)}$ είναι R-άλγεβρα

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

$$r \longmapsto r \cdot 1$$

επ. $\varphi^a : \operatorname{Proj} S \longrightarrow \operatorname{Proj} R$ $\quad S_f^{(0)}$ είναι R-άλγεβρα

$$(\varphi^a ; \theta) : (\operatorname{Proj} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}) \longrightarrow (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$$

Σχήματα και μορφισμοί

α) Στοιχειώδεις ιδιότητες ~~στα~~ σχημάτων

(α) M τοπολογικός χώρος $M = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
αν αναγκαστικά $U_1 = M$ και $U_2 = \emptyset$ ή $U_1 = \emptyset$ και $U_2 = M$ τότε M είναι συνεκτικό.

Αν $M = F_1 \cup F_2$ για μη κενά F_1, F_2, $F_1 \neq M$, $F_2 \neq M$ reducible αν όχι reducible irreducible.

$(X, \mathcal{O}_X)$ connected, irreducible ανάλογα με το τι κάνει ο τόπος

$(X, \mathcal{O}_X)$ reduced: $\forall$ U ανοικτό $\Gamma(U, X)$ δεν έχει nilpotents (ισοδύναμα όλα τα stalks δεν έχουν nilpotents).

$(X, \mathcal{O}_X)$ integral αν $U \subset X$, $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ακ. περιοχή

Παράδειγμα (1) A αντιμετ. δακτύλιος $A \cong A_1 \times A_2$ τότε το $\operatorname{Spec} A$ δεν είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε $A = A_1 \times A_2$. $1_{A_1}, 1_{A_2}$ ταυτοτικά.
$e_1 = (1_{A_1}, 0)$, $e_2 = (0, 1_{A_2})$.
$1 = e_1 + e_2$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ $e_1 e_2 = 0$.
p prime $e_1 e_2 = 0 \in p \Rightarrow e_1 \in p$ ή $e_2 \in p$.
Έστω $e_2 \in p$. τότε $0 \times A_2 \subseteq p$.
$p_i : A_1 \times A_2 \to A_i$ προβολές (ring hom)
$p_1 = p_1(p)$. $a_1, b_1 \in A_1$ υποθέτουμε $a_1 b_1 \in p_1$ τότε $\exists c_2 \in A_2$ $(a_1 b_1, c_2) \in p$.
$a = (a_1, c_2)$, $b = (b_1, 1_{A_2}) \Rightarrow a \cdot b \in p \Rightarrow a \in p$ ή $b \in p \Rightarrow a_1 \in p_1$ ή $b_1 \in p_1$
$\Rightarrow p_1$ prime. Επιπλέον $p_1^{-1}(p_1) = p$. $\Big\{ p_1^{-1}(p_1) \supset p$ προφανές.
Αν $a_1 \in p_1$ τότε $(a_1, a_2) \in p$ για κάποιο $a_2 \in A_2$

$0 \times A_2 \subset p$ για τυχαίο $b_2 \in A_2$ έχουμε
$(a_1, b_2) = (a_1, a_2) + (0, b_2 - a_2) \in p$ $\Rightarrow p_1^{-1}(p) \subset p$. Είδαμε τώρα $e_1 \notin p$.
Αν $e_1 \in p$ τότε ομοίως $p_2 = p_2(p)$ prime του A_2 $p = p_2^{-1}(p)$, $e_2 \notin p$

$\operatorname{Spec} A = D(e_1) \cup D(e_2)$, $D(e_1) \cap D(e_2) = \emptyset$ όχι συνεκτικό.
$D(e_1) = \operatorname{Spec} A_1$ $D(e_2) \cong \operatorname{Spec} A_2$

(2) k σώμα $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(xy)$ reducible affine

$X = V(x) \cup V(y)$ $V(x) \neq X$, $V(y) \neq X$

$V(x) \cong \operatorname{Spec} k[y]$

$V(y) \cong \operatorname{Spec} k[x]$

$V(x) \cap V(y) = pt \to (x,y)$

(3) $\operatorname{Spec} k[x]/x^2$ $\rightsquigarrow$ σημείο, ανάγωγο! αλλά όχι reduced

<u>Λήμμα</u> $X = \operatorname{Spec} A$

(i) X μη συνεκτικό ανν $A \cong A_1 \times A_2$

(ii) X irreducible iff

$N(A) = \sqrt{(0)} = \{ f \in A : f \text{ nilpotent } \dot{n} \ 0 \}$ είναι πρώτο ιδεώδες

(iii) X reduced $N(A) = 0$

(iv) X integral $\Leftrightarrow$ A ακ. περιοχή.

<u>Αποδ.</u>

(i) Υποθέτουμε ότι $X = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1 \cup U_2, \mathcal{O}_X) = \underbrace{\Gamma(U_1, \mathcal{O}_X)}_{A_1} \times \underbrace{\Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)}_{A_2}$ ορισμός sheaf.

(ii) Κάθε πρώτο ιδεώδες περιέχει το $N(A)$. ($0 \in p$. $f^n = 0 \Rightarrow f \in p$)

Έστω $X = V(\alpha) \cup V(b)$ $\alpha, b \trianglelefteq A$

$X = V(\alpha \cap b) \xrightarrow{\text{ιδιότητα}} \sqrt{\alpha} \cap \sqrt{b} = N(A)$

$\sqrt{\alpha} = N(R)$ ανν $V(\alpha) = \operatorname{Spec} R$

Αν το f όχι nilpotent $\exists$ p που δεν το περιέχει. $f \in \sqrt{\alpha} \Rightarrow$ έχουμε $p \notin V(\alpha)$.

Γίνεται $f \in N(R)$, $f \notin \sqrt{\alpha}$

$V(\alpha) = \operatorname{Spec} R \Rightarrow \alpha \subset p$

άρα $f \in \sqrt{\alpha}$, $f \notin N(R)$ τότε $V(\alpha) \subsetneq \operatorname{Spec} R$.

Το $\sqrt{\alpha}$ δεν περιέχει αντιστρέψιμα του R άρα το $\sqrt{\alpha}$ περιέχει μόνο nilpotents του R $N(R) = \sqrt{0}$

$N(R) = \sqrt{0} \subseteq \sqrt{\alpha} \subset N(R) \Rightarrow N(R) = \sqrt{0}$

$\alpha \subset \underbrace{\bigcap p}_{N(R)}$

$\sqrt{0} = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} R} p \subset p$

As υποθέσουμε ότι $V(\alpha) = \mathrm{Spec}\,R$.

~~κάθε πρώτο περιέχεται στο $\sqrt{\alpha} \subset N(R) \subset p$~~

$N(R)$

~~Έστω $f \in \alpha$ και f όχι nilpotent.~~

$\Leftarrow$ $V(\alpha) = \mathrm{Spec}R$ τότε θα δείξουμε $\sqrt{\alpha} = N(R)$

$\sqrt{\alpha} = \bigcap_{\alpha \subset p \in \mathrm{Spec}R} p$ άρα $N(R) \subset \sqrt{\alpha}$.

$\bigcap_{\alpha \in \mathrm{Spec}R}'' p$

Αν $f \notin N(R)$ τότε $\exists$ p που δεν το περιέχει τέλος.

$f \in \sqrt{\alpha}$ και τότε $f^n \in \alpha \Rightarrow f^n \in p \Rightarrow f \in p$. οπότε $V(\alpha) = \{ p : \alpha \subset p \}$

Αντιστρόφως ~~το $\sqrt{\alpha}$ περιέχει μόνο nilpotents~~ $(N(R) = \sqrt{(\alpha)}$

έστω $N(R) = \sqrt{\alpha} = \bigcap_{\alpha \in p \in \mathrm{Spec}R} p$ Θα δείξω ότι $V(\alpha) = \mathrm{Spec}R$

και έστω ότι για κάποιο $p^{\in \mathrm{Spec}R}$ το $\alpha \notin p \Rightarrow \exists\, f \in R$ με $f \notin p$.

$N(R) = \sqrt{0} = \bigcap_{p \in \mathrm{Spec}R} p$ Τότε το f δεν είναι nillpotent.

~~$\bigcap_{\alpha \subset p} p \cap Q$ ώστε $\alpha \notin Q$ το $f \in Q$ και f, θα που δωω~~

ok

$\boxed{\sqrt{\alpha} \cap \sqrt{6} = N(A)}$ Αν $N(N)$ prime τότε $\underline{\sqrt{\alpha} = N(A)}$ ή $\sqrt{6} = N(A)$

$\Rightarrow X = V(\alpha)$ ή. $X = V(6) \Rightarrow X$ irreducible.

Εστω ~~$x \in \sqrt{\alpha}$~~ $\exists\, y \cdot \sqrt{6}$ με $y \in N(N)$ prime $\forall x \in \sqrt{\alpha}$ $xy \in$ τομη $\Rightarrow x \in \sqrt{\cdot}$

Από την άλλη αν $N(A)$ όχι prime τότε $\exists\, \alpha \notin N(A)$, $6 \notin N(A)$

και $\alpha 6 \in N(A)$.

$I = (\alpha, N(A)$ $\quad V(I) \neq X$ και τώρα ~~$\alpha A 6$~~

$I' = (6, N(A)$. $\quad V(I') \neq X$

$I \cap I' = N(A)$ έχουμε $X = V(I_1) \cup V(I_2)$

$\alpha k + N(\alpha)\lambda$

$6\lambda + \cdots$

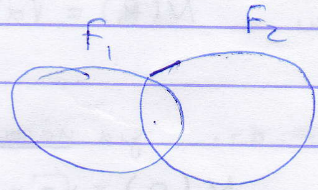
(iii)

Αφου το $A=\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ δεν έχει nilpotents για reduced schemes
$N(A)=0$.

Αντιστροφως αν $N(A)=0 \Rightarrow A$ οχι nilpotents
και A_f όχι nilpotents επισης
$\Rightarrow \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ οχι nilpotents.

<u>Προταση</u> X είναι integral $\Leftrightarrow X$ reduced + irreducible

Integral $\Rightarrow$ reduced.
Θα δειξουμε ότι είναι και irreducible.
Εστω X reducible $\exists\, F_1, F_2$
$X = F_1 \cup F_2$ $\quad F_j \neq X \quad j=1,2.$



$U_1 = X \setminus F_2 = F_1 \setminus F_1\cap F_2$
$U_2 = X \setminus F_1 = F_2 \setminus F_1\cap F_2$

$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ $\quad U_1, U_2$ ανοιχτα
$\Gamma(U,\mathcal{O}_X) = \Gamma(U_1,\mathcal{O}_X)\times\Gamma(U_2,\mathcal{O}_X) \Rightarrow \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ όχι ακ. περιοχη.

<u>Αντιστροφως</u> εστω reduced + irreducible.
U ανοιχτο του X έστω $f\cdot g=0$ $\quad f,g \in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$
$F_1 = \{x\in U : f(x)=0\}$ $\quad F_2 = \{x \in U \mid g(x)=0\}$
Closed sets του U
(Σε affine open $V=\operatorname{Spec} R$ $\quad V\subset U$ }
$\hat{f}, \hat{g}$ εικονες απο τον περιορισμο συχνοποιουν
$F_1\cap V = V(\hat{f})$ $\quad F_2 \cap V = V(\hat{g})$)
Αφου $f\cdot g=0$ έχουμε
$U = F_1\cup F_2$ εστω $U\neq F_1$ και $U \neq F_2$ $\Rightarrow$
$\Gamma(U\setminus F_1\cap F_2, \mathcal{O}_X)$ δεν είναι ακ. περιοχη (και ?)
Συνεπως $U=F_1$ η $U=F_2$
Εστω $U=F_1$ $\quad V\subset U$ θετουμε $V=V(\hat{f}) \Rightarrow \hat{f}\neq 0$, $\hat{f}$ nilpotent
του $R=\Gamma(V,\mathcal{O}_X) \overset{X \text{ red.}}{\Longrightarrow} \hat{f}\ 0$ $\quad f=0$ $\forall V_i$ για affine cover του U
$\Rightarrow f=0$

οπου R_i Noetherian X λέγεται τοπικά Noether
locally Noether + quasicompact ⇒ Noether.

Προταση X locally Noether αν για τυχαίο $U = \mathrm{Spec}\, R$ open aff R είναι Noetherian. $X = \mathrm{Spec}\, A$ είναι Noetherian αν A Noetherian ring.

Η μια κατευθυνση είναι προφανης.

Παρατηρήσεις R Noether, $f \in R$, R_f είναι Noether.
$\{D(f) \mid f \in R\}$ βαση ανοιχτων
Αν έχουμε affine cover ώστε R_i Noether. Τοτε
$U = \mathrm{Spec}\, R$ μπορει να καλυφθει απο $\mathrm{Spec}(R_i)_f$
Θα πρεπει να δειξουμε οτι ο R είναι Noether.
$X = \mathrm{Spec}\, R = \bigcup_{j \in J} \mathrm{Spec}\, A_j$ A_j Noether. θα δειξουμε οτι
R Noether.

$\mathrm{Spec}\, A_j$ open του $\mathrm{Spec}\, R$ μπορει να καλυφθει με affine open
$\{D(f), f \in R\}$
Για $D(f) \subset \mathrm{Spec}\, A_j$ εστω f_j η εικονα του f μεσω του περιορισμου

$$R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Spec}\, A_j, \mathcal{O}_X) = A_j$$

$R_f \cong (A_j)_{f_j}$

Αφου $D(f) = \mathrm{Spec}\, R_f = (\mathrm{Spec}\, A_j)_{f_j}$?

A_j Noetherian, R_f Noetherian X quasicompact X covered απο πεπερασμένα $D(f_k)$, $f_k \in R$.
Αρα διαλέγουμε πεπερασμένα $f_1, \dots, f_n \in R$
$(f_1, \dots, f_n) = R$ R_{f_k} Noetherian

$$\varphi_k : R \longrightarrow R_{f_k} \quad \text{θα δειξουμε}$$

$$a = \bigcap_{k=1}^{n} \varphi_k^{-1}(\varphi_k(a) R_{f_k}) \quad \text{οπου } a \text{ τυχαίο ιδεωδες}$$

Οποτε μια ακολουθια
$a_1 \subset a_2 \subset \cdots \subset a_\ell \subset a_{\ell+1}$ τερματίζεται στους R_{f_k} και τελος.

<u>Μορφισμοί</u>

$f: X \to Y$ μορφισμός $\quad U_i = \operatorname{Spec} A_i$ affine covering του Y

- Αν $f^{-1}(U_i)$ ~~έχει~~ έχει affine covering $V_{ij} = \operatorname{Spec} A_{ij}$, $j \in J_i$ ώστε A_{ij} είναι πεπ. παραγόμενες A_i- άλγεβρες ο f λέγεται locally of finite type.

  $f^{-1}(U_i)$ ~~και~~ $\# J_i < \infty$ λέγεται finite type.

$f: X \to Y$ λέγεται finite (ισχυρότερη συνθήκη)
$\exists$ $U_i = \operatorname{Spec} A_i$ open affine ώστε του Y ώστε $f^{-1}(U_i)$ είναι affine set $\operatorname{Spec} B_i$, B_i πεπ. παραγόμενο A_i-module (όχι άλγεβρα!)
(A_i πεπ. παραγόμενο ως module ισχυρότερο ως άλγεβρα)

$f: X \to \operatorname{Spec} R$ finite type λέγεται finite type over R

Παράδειγμα: ~~$f: X \to \operatorname{Spec} R$~~

(1) $f(x,y) = y^2 - (x^m + a_1 x^{m-1} + \dots a_m)$ $\quad a_j \in k$ $\quad j = 1, \dots, m$.

$k[x] \longrightarrow k[x,y]/f(x,y)$ επάγει

$\varphi: X = \operatorname{Spec} k[x,y]/f(x,y) \longrightarrow \operatorname{Spec} k[x]$

Πεπ. $k[x]$-module δομή στο $k[x,y]/f(x,y) = k[x] \oplus k[x]\bar{y}$.

finite morphism. X, X είναι of finite type over k.

(2) $g(x,y) = xy^2 - (x^m + a_1 x^{m-1} + \dots a_m)$ $\quad a_j \in k$

$k[x] \longrightarrow k[x,y]/g(x,y) = R$

Ο R είναι πεπ. παραγόμενη $k[x]$ άλγεβρα αλλά όχι module

$\bar{y}, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^k, \dots$ είναι ανεξάρτητα υπερ το $k[x]$.

$\varphi: \operatorname{Spec} k[x,y]/g(x,y) \longrightarrow X = \operatorname{Spec} k[x]$ finite type όχι finite.

(3) R_p, $p = (x - a)$ του $k[x]$ γράφεται ως $R_p = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)}, g(a) = 0 \right\}$
και δεν είναι πεπ. παραγόμενο ως k-άλγεβρα. $\operatorname{Spec} R_p$ δεν είναι finite type.

Subschemes

U ανοιχτό $(X, \mathcal{O}_X)$ έχουμε σχήμα

$(U, \mathcal{O}_X|U)$ open subscheme του X

$\varphi : (g, g^{\#}) : Z \to X$ αν η $g : Z \to X$ είναι ομοιομορφισμος του Z σε ανοιχτό U του X δηλ. $g(Z) = U$ και g^{-1} συνεχής

και $g^{\#}|U : \mathcal{O}_X|U \to g_* \mathcal{O}_Z|U$ ισομορφισμος τότε η φ λέγεται ανοιχτή immersion, και το Z ταυτίζεται με το $(U, \mathcal{O}_X|U)$.

Αν Y και $i = (\tilde{i}, i^{\#}) : Y \to X$ αν το Y closed subspace του X και $\tilde{i}$ embeding, $i^{\#} : \mathcal{O}_X \to \tilde{i}_* \mathcal{O}_Y$ surjective ομομορφισμος sheaves (Y, i) closed subscheme.

Αν $f : W \to X$ παραγοντοποιείται μέσω $\vartheta : W \xrightarrow{\sim} Y$, $f = i \circ \vartheta$ τότε η f λέγεται closed immersion.

Παράδειγμα $a \triangleleft R$ καθορίζει $V(\alpha)$ του $X = \operatorname{Spec} R$

$V(\alpha) \cong \operatorname{Spec} R/a$ $\quad R \to R/\alpha$ surjective επάγει

$f : Y = \operatorname{Spec} R/\alpha \to X$

f ομοιομορφισμος $|\operatorname{Spec} R/\alpha| \cong |V(\alpha)|$

p τυχαίο του $\operatorname{Spec} R$ $\quad \mathcal{O}_{X,p} \to (f_* \mathcal{O}_Y)_p$ είναι $R_p \to (R/\alpha)_p$

$\mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y$ surjective.

$f : Y \to X$ closed immersion

$V(\alpha) = V(b)$ ως κλειστά αν $\sqrt{\alpha} = \sqrt{b}$ ως σχήματα

$\operatorname{Spec} R/\alpha \cong \operatorname{Spec} R/b$ εκτός αν $\alpha = b$

Πχ

$k[x] \to k[x]/x^n$

$\operatorname{Spec} k[x]/x^n \to \operatorname{Spec} k[x]$

$|\operatorname{Spec} k[x]/x^n| = pt.$

Closed Subschemes απο affine schemes 30

$X = \operatorname{Spec} A$ affine scheme

α ιδεωδες του $A \longrightarrow V(\alpha)$ κλειστο σύνολο.

Δομη σχήματος στο $V(\alpha)$?

$A \xrightarrow{\pi} A/\alpha$ Ποια είναι τα ιδεώδη του

$\operatorname{Spec} A/\alpha \longrightarrow \operatorname{Spec} A \quad V(\alpha)$ $A/\alpha : p \supseteq \alpha = V(\alpha)$

$p \longrightarrow \pi^{-1}(p) = \{x \in A$ Παιρνουμε τα ιδεώδη πρ.

Αν θεωρησουμε ιδεώδες

p του A το οποίο δεν έχει τομή $\alpha \not\subseteq p$ τοτε

$\exists f \in \alpha, f \notin p$

$x \in p \longmapsto x \bmod \alpha$

$\cancel{\frac{p+\alpha}{\alpha} \cong \frac{p}{\alpha \cap p}}$

$\pi^{-1}(p) = \{x \in A \quad \pi(x) = p/\alpha\} = p \supseteq A$

Και το $V(\alpha) = \operatorname{Spec} A/\alpha$

Open subscheme. $U \subseteq X$ υπαρχει μοναδικο ανοιχτο υποσχημα με τοπ. χωρο U.

open immersion: $j : Y \longrightarrow X$

1) $|Y| \cong U$ ανοιχτο

$\mathcal{O}_X \longrightarrow j_* \mathcal{O}_Y$ είναι ισομορφισμος $\mathcal{O}_X|_U \cong j_* \mathcal{O}_Y$

Closed subscheme

$\operatorname{Spec} A/\alpha \cong V(\alpha)$. closed subschemes of affine schemes

Ταυτίζονται ως σχήματα μονο αν τα ιδεώδη τους είναι ίδια. Ενω οι τοπολογικοι χώροι όχι!

Δινεται

$(X, \mathcal{O}_X)$ ringed space. Θα λέμε ότι $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$ είναι ένα sheaf ιδεωδων $\forall U$ ανοιχτο $\subseteq X$

$\Gamma(U, \mathcal{J}) \trianglelefteq \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$.

$\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ είναι το sheaf πηλικο: Είναι το sheaf που σχετίζεται με το presheaf $U \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{J}(U)$.

$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ surjective

X sheme:

Closed scheme

$Z \subset X$ $\quad i: Z \longrightarrow X$ inclusion

$\mathcal{O}_Z$ sheaf στο Z ωστε $(Z, \mathcal{O}_Z)$ sheme

$i_* \mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_{X/\mathcal{J}}$ για ένα sheaf ιδεωδών

2) closed imersion.

$Z \cong X$ $\quad i^b: \mathcal{O}_X \longrightarrow i_* \mathcal{O}_Z$ surjective

$\mathcal{F}$ ειναι presheaf στο X Τοτε υπαρχει

$(\tilde{\mathcal{F}}, i_F)$ όπου $\tilde{\mathcal{F}}$ sheaf στο X $\quad i_F: \mathcal{F} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ μορφισμος presheaves

ωστε

$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ μορφισμος she-

$i \searrow \tilde{\mathcal{F}} \nearrow \exists!$

1) $i_{F,x}: \mathcal{F}_x \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_x$ bijective

2) $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ $\exists$ $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$.

sheaf associated το $\mathcal{F}$.

Αποδ $U \subseteq X$, $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ οικογενειας στοιχειων των stalks του $\mathcal{F}$

που να ειναι τοπικα sections του $\mathcal{F}$

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) = \{ (s_x) \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x ;\ \forall x \in U \ \exists \text{ ανοιχτο του } W \subset U \text{ του } x \ \ t \in \mathcal{F}(W) \ \ \forall w \in W: s_w = t_w \}$$

$U \subseteq V$ restriction.

$\tilde{\mathcal{F}}(V) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}(U)$ $\quad \prod_{x \in V} \mathcal{F}_x \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ Ειναι sheaf

$U \subseteq X$ ανοιχτο

$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi i z}} \mathbb{C}^* \longrightarrow 0$

$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$ ανοιχτο μικρο ειναι surjective.

$\mathcal{F}(U)$ $\quad \Gamma$

Θα δείξουμε ότι
$F \circ G = id_{Aff.Sch}$

$(f, \vartheta) \quad (Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (\mathrm{Spec}\, R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R})$

$\vartheta : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R} \longrightarrow f_* \mathcal{O}_Z$ επάγει

$\varphi : R = \Gamma(\mathrm{Spec} R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Spec} R, f_* \mathcal{O}_Z) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$

Για τυχαίο $z \in Z$

$v_z : \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$

<u>Πρόταση</u> $(f, \vartheta)\ (Z, \mathcal{O}_Z)$ στο affine $(\mathrm{Spec} R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} R})$
έχουμε $f(z) = \varphi_z^{-1}(m_z)$, $z \in Z$, m_z είναι το μέγιστο του $\mathcal{O}_{Z,z}$
που ικανοποιεί $\varphi_z = v_z \circ \varphi$

$\mathrm{Hom}_{Sch}(Z, \mathrm{Spec} R) \cong \mathrm{Hom}_{Ring}(R, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z))$

Κατηγορίες και σχήματα

Κατηγορία : Αντικείμενα , μορφισμοί

$\mathcal{C}$ Κατηγορία

(i) $Ob(\mathcal{C})$ καθορίζεται.

(ii) $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, $Hom(A,B)$

(iii) A,B,C $f \in Hom(A,B)$, $g \in Hom(B,C)$ ορίζεται $g \circ f \in Hom(A,C)$

και $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(iv) $\exists$ $Id \in Hom(A,A)$ $f \circ Id_A = f$ $Id_B = f$ $f \in Hom(A,B)$

Sets, $Ob(Sets) = Sets$ $Hom(A,B)$ συναρτήσεις

Ring R-mod , Sch, Aff. Sch

$Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ $A, B \in Mod$, Group, set.

$Hom_{Mod}(A,B) = Hom_{Group}(A,B)$

$\& \ Hom_{set}(A,B)$

$f : C \to D$, $f \in Hom(A,B)$, ισομορφισμός

$\exists$ $g : D \to C$ $g \circ f = Id_C$ $f \circ g = id_D$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

comm.

Functors

$F : Ob(\mathcal{C}) \to Ob(\mathcal{D})$

$F : Hom(A,B) \to Hom(F(A), F(B))$

covariant functor : $F(id_A) = id_{F(A)}$

$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$F\,G(f) \circ G(g)$) contravariant

Πρόβλημα. $Ob(\mathcal{C}^o) = Ob(\mathcal{C})$

$Hom_{\mathcal{C}^o}(X,Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$

$f \in Hom_{\mathcal{C}^o}(X,X)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}^o}(Y,Z)$ $g \circ f$ ως $f \circ g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)$

$id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ $id_{\mathcal{C}}(x) = X$

$id_{\mathcal{C}}(f) = f$

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

$G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ $(G \circ F)(x) = G(F(X))$

$(G \circ F)(f) = G\,F(g)$

$G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{F}$

covariant ∘ covariant = covariant
covariant ∘ contr = contr
contr ∘ contr = cov

Μορφισμοί ανάμεσα σε συναρτητές (natural transformations)

$\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

$\forall C \in Ob(\mathcal{C}) \quad \eta(C) : \mathcal{F}(C) \to \mathcal{G}(C)$

και $C \to C'$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(C) & \xrightarrow{F(f)} & \mathcal{F}(C') \\ \downarrow{\scriptstyle \eta(C)} & & \downarrow{\scriptstyle \eta(C')} \\ \mathcal{G}(C) & \xrightarrow[G(f)]{} & \mathcal{G}(C') \end{array}$$

$\eta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ μορφισμός από functors

$\eta(C)$ ισομορφισμός $\quad \eta : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$

$G \circ F \simeq id_{\mathcal{C}} \qquad F \circ G = id_{\mathcal{D}}$

τότε $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ λέγονται ισοδύναμες, F contra equivalent.

Θεώρημα Υπάρχει contravariant functor Ring $\xrightarrow[\text{ισοδυναμία}]{}$ Aff.Sch

$F(R) = (\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$

$F(\varphi) = \varphi^{a} : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$

$R \in Ob(\text{Ring}), \ \varphi \in R \to S$

Ορισμός $\quad G : \text{Aff.Sch} \to \text{Ring}$.

$(X, \mathcal{O}_X) \in Ob(\text{Aff.Sch})$

$G(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \qquad (f, \partial) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$

$G(f, \partial) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(Y, f_* \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

$G F(R) = \Gamma(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}) = R$

$\varphi : R \to S$

$G \circ F(\varphi) = \Gamma(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}} R) = R \to \Gamma(\operatorname{Spec} S, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}} S) = S$

ταυ. $\varphi^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R} \to \varphi^{a}_{*} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}$

$G \circ F = id_{\text{Ring}}$

Fuctors

Παράδειγμα.

X τοπολογικος χώρος. Ορίζουμε την κατηγορία

$Top(X)$ $\quad Ob(Top(X))$ = ανοιχτα του X

U, V $\quad Hom(U,V) = \begin{cases} i_{V,U} : U \hookrightarrow V & \text{αν } U \subset V \\ \emptyset & \text{διαφορετικα} \end{cases}$

Ένα presheaf προσθ. ομάδ. X contravariant functor

$G : Top(X) \to Mod$

$U \to G(U)$ $\quad , U \subset V \quad \rho_{V,U} = G(i_{V,U}) : G(V) \to G(U)$

Scheme valued points

$S \to X$ $\quad$, αν $S = Spec R$ μιλάμε και για R-valued.

$Spec k$, $\bar{k} = k$ geometric points.

Παραδειγμα

$A = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] / \langle f_1, \dots, f_e \rangle$ $\quad$ Διοφαντική εξίσωση.

$X = Spec A$, $\quad \varphi : Spec k \to Spec A$ $\quad$ είναι το ίδιο

$\varphi : A \to k$ $\quad$, ωστε $\varphi = \varphi^a$.

Αν $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ είναι οι reside classes του A των $x_1, \dots, x_n$

$a_j = \varphi(\bar{x}_j)$. Έχουμε

$$f_1(a_1, \dots, a_n) = 0, \dots, f_e(a_1, \dots, a_n) = 0 \quad (*)$$

Αντιστροφως αν έχουμε λύσεις της τοτε ορίζεται

μοναδικος ομομορφισμος $\varphi : A \to k$, και ένα k-valued point.

k-valued points $\leftrightarrow$ λύσεις της εξίσωσης

L είναι coeff field των $f_1, \dots, f_e$. και L περιέχεται στο k

$Spec A$ $\quad A = L[x_1, \dots, x_n] / (f_1, \dots, f_e)$

Μια embedding $L \to k$ δεν είναι μοναδική.

Η έννοια του L και της αναπαραστασης έρχεται στον

ορισμο

Παράδειγμα

$f(x,y)$ πολυώνυμο 2 μεταβλητών ορισμένο στο k

$A = k[x,y]/f(x,y)$

$R_n = k[t]/(t^{n+1})$

$\varphi_n : \operatorname{Spec} R_n \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ R_n- valued point.

και δίνεται

$\varphi_n : A \longrightarrow R_n$. $\bar{x}, \bar{y}$ οι residue classes των x, y στο A

$g_n(t), h_n(t)$ ορίζων.

$\varphi_n(\bar{x}) = g_n(t) \mod t^{n+1}$

$\varphi_n(\bar{y}) = h_n(t) \mod t^{n+1}$

Τα $\varphi_n(\bar{x},\bar{y})$ καθορίζονται από το $g_n(t), h_n(t)$ αλλά για να έχουμε ομομορφ.

(*) $f(g_n(t), h_n(t)) \equiv 0 \mod (t^{n+1})$ ανν.

Υποθέτουμε ότι $g_n(t), h_n(t)$ είναι πολυώνυμα με συντελεστές στο k βαθμού $\leq n$.

R_n-valued point $\longleftrightarrow (g_n(t), h_n(t))$ ώστε να ικανοποιούν (*)

$\psi_{n,n+1} : R_{n+1} \longrightarrow R_n$ κανον. $k[x]/x^{n+1} \longrightarrow k[x]/x^n$

επάγει ομομορφισμό σχημάτων

$\varphi_{n,n+1} : \operatorname{Spec} R_n \longrightarrow \operatorname{Spec} R_{n+1}$

για ένα R_{n+1} valued point $\varphi_{n+1} : \operatorname{Spec} R_{n+1} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$

έχουμε επαγόμενο R_n- valued point

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} R_{n+1} \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \\ \operatorname{Spec} R_n \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Αν για δεδομένο φ_n υπάρχει ένα φ_{n+1} και για φ_{n+1} υπάρχει φ_{n+2} $\operatorname{Spec} R_{n+2} \longrightarrow \operatorname{Spec} A$

Τότε φ_m αντιστοιχεί σε ζευγάρι πολυωνύμων

$g_m(t), h_m(t)$ βαθμού $\leq m$

$$f(g_m(t), h_m(t)) \equiv 0 \mod t^{m+1}$$

$\varphi_m = \varphi_{m,m+1} \circ \varphi_{m+1}$ δίνει ότι $g_{m+1}(t)$ ($h_{m+1}(t)$) διαφέρει από το $g_m(t)$ σε όρους βαθμού $\geq m$).

limit $g_n(t), \ldots$ formal power series solution

$$f(g(t), h(t)) = 0$$

Δηλαδή R_n-valued points approximations of power sol.

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) = y^3 + xy^2 - (x+x^2)y + x^2 + 2x^3 \quad g_2(t) = t,\ h_2(t) = t \\ f(g_2(t), h_2(t)) \equiv 0 \mod t^3 \end{array}\right] \text{αχ.}$$

<u>Θεωρούμε</u> $(X, \mathcal{O}_X)$, $x \in |X|$ m_x το μέγιστο ιδεώδες

$\mathcal{O}_{X,x}/m_x$ είναι το residue field $k(x)$.

$(\operatorname{Spec} k(x), k(x)) \to (X, \mathcal{O}_X)$ καθορίζεται από ring hom

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to k(x)$$

Αν K σώμα, x ώστε $k(x) = K$ λέγεται K-rational point

$k[x,y]/(x^2+y^2+1)$ $\begin{array}{l} x=1 \\ y=\pm i \end{array}$

<u>Η κατηγορία $\mathcal{C}/Z$</u>

Για ένα αντικείμενο Z στην $\mathcal{C}$ η κατηγορία $\mathcal{C}/Z$ ορίζεται ως εξής $\mathcal{C}/Z$ είναι (X, p) $X \in Ob(\mathcal{C})$, $p: X \to Z$

$$\operatorname{Hom}((X,p),(Y,q)) = \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & Z & \end{tikzcd} \right.$$

p: structure morphism

$\mathcal{C} = Sch$ για Z γράφουμε (Sch/Z)

Final object. αν $Hom_{\mathcal{C}}(X,e)$ έχει ακριβώς ένα στοιχείο

Αν για καθε X υπαρχει $e\in Ob(X)$ $Hom_{\mathcal{C}}(e,X)$ ένα στοιχείο $\mathcal{C}$, λέγεται initial object.

(Ring): commutative rings $\mathbb{Z}$ initial object.

Sch $(Spec\,\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{Spec\,\mathbb{Z}})$ final object.

Αποδ

Εφ οριμου R έχει 1_R φ ομομορφισμος στελνει $1 \to 1$

R αντιμ. δακτυλιος $\exists!$ $\mathbb{Z} \to R$ ωστε $f(n) = nf(1) = n1_R$

Μοναδικο αντικείμενο στο $Hom_{Ring}(\mathbb{Z}, R)$

Εφ οριμου $(X, \mathcal{O}_X) \to (Spec\,\mathbb{Z}, \mathcal{O}_{Spec\,\mathbb{Z}})$ καθορίζεται από

$f: \mathbb{Z} \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ και αυτος είναι μοναδικος.

Sch, $Sch/Spec\,\mathbb{Z}$ είναι η ίδια κατηγορία.

$(Sch/_{Spec\,R})$ κατηγορια $(Sch/_R)$ Αν R field μιλαμε για σχήματα ορισμένα υπερ k. Αν δινεται σχημα υπερ του R τοτε η structure morphism είναι καθορισμενη.

Zariski tangent space

$x\in (X, \mathcal{O}_X)$ m_x/m_x^2 λέγεται ο Zariski cotangent space

m_x το μεγιστο ιδεωδες, T_x^*.

ο T_x^* είναι vector space over $k(x) = \mathcal{O}_x/_{m_x}$

$T_x X = Hom_{k(x)}(m_x/_{m_x^2}, k(x))$

Ασκηση υπαρχει 1-1 αντιστοιχια ανάμεσα

στους μορφισμους $\Phi = (\varphi, \varphi^{\#}) : (Spec\, k[t]/_{t^2}, \mathcal{O}_{Spec\, k[t]/_{t^2}}) \to (X, \mathcal{O}_X)$

Αναφερεται απο σε schemes over Sch/k

και σε ζευγαρια (x, ∂) of k-rational points και ∂ στο Zariski tangent space

Under. Space of Spec $k[t]/t^2 = \{pt\}$ Εστω x εικονα του $\varphi(pt)$. Εχουμε αντιμεταθετικο διάγραμμα απο com. rings

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[dl, "p_x^\#"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{O}_{X,x} \arrow[rr, "\varphi_x^\#"'] & & k[t]/t^2 \end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}_{X,x}/m_x = k$ $\quad x$ k-rational point.

Το μεγιστο ιδεωδες του $k[t]/(t^2)$ είναι το (t) και

$\varphi_x^\#(m_x) \subset (t)$ local

Αρα $\varphi_x^\#(m_x^2)$ γινεται 0 στο $k[t]/t^2$ ~~αφου~~ $a \bmod m_x^2 \in m_x/m_x^2$

ορίζουμε $\partial(\alpha) \in k$ ως $\varphi_x^\#(\alpha) = \partial(\alpha) t$.

$\varphi_x^\#$ είναι k-ομομορ. ο ∂ ειναι k-γραμμικη $k \to k$ $\Rightarrow$

$\partial \in T_x X$. Δηλαδη $\Phi = (\varphi, \varphi^\#)$ καθορίζει πλήρως το (x, ∂).

δινεται Αντιστρόφως, υποθέτουμε οτι x είναι k ρητο στο X και

$\partial \in T_x X$ δινεται. Έχουμε τον structure μορφισμο (k-schemes)

$(p, p^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (\mathrm{Spec}\, k, k)$ ο οποιος

δίνει $p_x^\# : k \to \mathcal{O}_{X,x}$

Τοτε αν $q_x : \mathcal{O}_{X,x} \to k = \mathcal{O}_{X,x}/m_x$ ο

$q_x \circ p^\# : k \to k$ είναι η ταυτοτητα.

Έστω $\bar{\alpha}$ η εικόνα στο $\mathcal{O}_{X,x}/m_x^2$ του $a \in \mathcal{O}_{X,x}$

$\mathcal{O}_{X,x} \ni \alpha_0 = p_x^\#(q_x(a))$ $\quad \alpha_1 = \alpha - a_0$ σταθερος όρος

$\alpha_0 \notin m_x$ (καν.) , $\alpha_1 \in m_x$ $\qquad q_x(a) = q_x(a_0)$.

Δινεται $T_x : \mathrm{Hom}(m/m, k)$

Ορίζουμε $\psi_x : \mathcal{O}_{X,x}/m_x^2 \to k[t]/t^2$

$\psi_x(\bar{\alpha}) = q_x(a_0) + \partial(\bar{\alpha}_1) t \mod t^2$ $\qquad \bar{\alpha} \in \mathcal{O}_{X,x}/m_x^2$

$\bar{\alpha}_1$ residue class στο m_x/m_x^2 του α_1. καλώς ορ. mod m_x^2

Αφου $\psi_x(\bar{\alpha}) = \psi_x(\bar{b})$ για $\bar{\alpha}, \bar{b} \in \mathcal{O}_{X,x}$ ψ_x καλα ορισμενο.

Θα δείξουμε ότι η ψ_x είναι k-ομομορφισμος

$\alpha, b \in \mathcal{O}_{x,X}$

$(\alpha+b)_0 = \alpha_0 + b_0$, $(\alpha+b)_1 = \alpha_1 + b_1$

$\partial \in \mathrm{Hom}_k(m_x/m_x^2, k)$ έχουμε

$\varphi_x(\bar\alpha + \bar b) = \varphi_x(\bar\alpha) + \varphi_x(\bar b)$

$(\alpha b)_0 = \alpha_0 b_0$

$(\alpha b)_1 = \alpha_0 b_1 + b_0 \alpha_1 + \alpha_1 b_1$

$\alpha_1, b_1 \in m_x$ όταν στοιχεία του m_x/m_x^2

$\overline{(\alpha b_1)} = \overline{\alpha_0 b_1} + \overline{b_0 \alpha_1}$

Άρα

$\varphi_x(\bar\alpha)\varphi_x(\bar b) = (\varphi_x(\alpha_0) + \partial(\bar\alpha_1)t)(\varphi_x(b_0) + \partial(\bar b_1)t) \bmod t^2$

$= \varphi_x(\alpha_0)\varphi_x(b_0) + \{\varphi_x(b_0)\partial(\bar\alpha_1) + \varphi_x(\alpha_0)\partial(\bar b_1)\}t \bmod t^2$

$= \varphi_x((\alpha b)_0) + \partial(\overline{b_0\alpha_1} + \overline{\alpha_0 b_1})t \bmod t^2$

$= \varphi_x((\alpha b)_0) + \partial(\overline{(\alpha b)_1})t \bmod t^2$

$= \varphi_x(\overline{\alpha b})$.

Επιπλέον αν h $\alpha \cdot \bar a = \rho_x^{\#}(\alpha)a$

$\Rightarrow \varphi_x$ k-ομο.

φ_x συνδ. με τον $\mathcal{O}_{x,X} \to \mathcal{O}_{x,X}/m_x^2$

$\varphi_x^{\#} : \mathcal{O}_{x,X} \to k[t]/(t^2)$

Τότε ορίζεται ο

$(\varphi, \varphi^{\#}) : (\mathrm{Spec}\, k[t]/t^2, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, k[t]/t^2}) \to (X, \mathcal{O}_X)$

Ο φ είναι x στον underlying χώρο

$\varphi^{\#} : \mathcal{O}_X \to \varphi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, k[t]/t^2})$ είναι $\varphi_x^{\#}$ στο stalk x

και 0 σε όλα τα άλλα stalks. $(\varphi, \varphi^{\#})$ είναι μορφισμός σχημ. k.

$$E : y^2 = 4x^3 - \frac{27j}{j-1728}x - \frac{27j}{j-1728}$$

x-coordinates of torsion points $\Longleftrightarrow$ $f_{r,s}(z) = \frac{g_2(z)}{g_3(z)} \wp\left(\frac{r+sz}{N}; L_z\right)$

Σε κάθε αλγεβρική κλειστότητα του $\mathbb{C}(j)$ που τις πε.

$$\mathbb{C}(j, E[N]) = \mathbb{C}(j, \{f_{r,s}\})$$

<u>Συμπλήρωση της αποδ.</u>

$M(\Gamma(N)) = \mathbb{C}(j, \{f_{r,s}\})$

(i) $f_{(r,s)} \circ \gamma = f_{(r,s)\gamma}$ $\quad \gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$

(ii) Υπάρχει μερομορφική στο D που επεκτείνει την $F_{r,s}$ στο D^0

op. $f_{r,s}(z) = F_{r,s}(e^{2\pi i z/N})$

$M(\Gamma(1))$ παράγεται από j invariant συνάρτηση του lattice L

$$E: y^2 = 4x^3 - \frac{27j}{j-1728}x - \frac{27j}{j-1728} \qquad \mathbb{C}(j, E[N]/\pm) \sim M(\Gamma(N))$$

$$\mathcal{E}^{wst}: Y^2 = 4X^3 - g_2(L)X - g_3(L)$$

$$\wp(u, L) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{\omega \in L \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{(u+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

$$\mathcal{E}: y^2 = 4x^3 - \frac{27j(L)}{j(L)-1728}x - \frac{27j(L)}{j(L)-1728}.$$

$\left(\frac{g_2(L)}{g_3(L)}\right)^{3/2}$ fixed sq. root. $\qquad j(L) = \frac{1728\, g_2(L)^3}{g_2(L)^3 - 27 g_3(L)^2}$

$$\frac{g_2(L)^3}{g_3(L)^2} = \frac{27j(L)}{j(L)-1728}$$

$$X = \frac{g_3}{g_2}x \qquad Y = \left(\frac{g_3}{g_2}\right)^{3/2} y \qquad \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{wst}$$

$$u + L \longrightarrow \left(\frac{g_2}{g_3}\wp(u, L), \left(\frac{g_2}{g_3}\right)^{3/2} \wp'(u, L)\right) \qquad \mathbb{C}/L \longrightarrow \mathcal{E}(X)$$

ω_1, ω_2 βάση του L

$x_{r,s}(L) = \frac{g_2}{g_3}\wp\left(\frac{r\omega_1 + s\omega_2}{N}; L\right)$ είναι οι x-coord των N-άλγ. t.p.

Συνάρτηση του u, $\wp(u, L)$ περιοδική, even, βαθμού 2

$x_{r,s}(L) = x_{r',s'}(L) \Leftrightarrow (r,s) \equiv \pm(r', s') \bmod N$

$P(w; A, B)$ N-division polynomial : $P(w_0, A, B) = 0$ w_0 affine coordinat. affine N. diviso. $y^2 = 4x^3 + Ax + B$

$$P\left(x_{r,s}; \frac{27j}{j-1728}, \frac{27j}{j-1728}\right) = 0 \qquad j(L) \neq 0, 1728$$

$$f_{r,s}(z) = \frac{g_2(z)}{g_3(z)}\wp\left(\frac{r+sz}{N}; L_z\right)$$

$P(f_{r,s}, A, B) = 0$ $\quad \forall z$ ώστε $j(z) \neq 0, 1728$ ισχύει πάντα

$P(f_{r,s}; -, -) = 0$ στο ~~Ф~~ $M(\mathbb{H})$

$f_{r,s}$ x συντεταγμένες των affine φ. $\mathbb{C}(j)$ από την οποία βεν.

Modular Functions

Αποδειξη

$Gal(\mathbb{C}(t, E[N])/\mathbb{C}(t)) \cong SL(2,\mathbb{Z})$.

Αρκει να δειξουμε ότι: υπάρχει E υπερ $\mathbb{C}(t)$ με invariant t ώστε

$$[(\mathbb{C}(t, E[N])/\pm) : \mathbb{C}(t)] = (SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\pm 1)$$

E' ~~διαφερετε~~ $j(E') = j(E)$ με twist

$(\mathbb{C}(t, E[N]/\pm) = \mathbb{C}(t, E'[N]/\pm)$

και οι δυο έχουν ομαδα Galois τάξη $|SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\pm 1|$

$$Gal(\mathbb{C}[t, E[N])\pm : \mathbb{C}(t))/\pm \longrightarrow SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\pm \quad \text{είναι ισομορφ.}$$

$$\uparrow$$

$$Gal(\mathbb{C}[t, E'[N]) : \mathbb{C}(t) \xrightarrow[\text{υπαρχει}]{} SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

περιέχει coset representatives για το $SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/(\pm I)$

$SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = h_1(\pm I) \cup h_2(\pm I), \dots$

αρα περιεχει το $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ η το $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\exists\, g : \rho(g) =$ ή $=$

$\rho(g^2) = -I$ αρα η εικόνα είναι όλο το $SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$

Modular functions

$GL^+(2,\mathbb{R})$ πινακες θετικης ορι?. γ δρα στο $\mathbb{H}$ $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$

$\Gamma < GL^+(2,\mathbb{R})$ finite index $SL(2,\mathbb{Z})$

(1) $f \circ \gamma = f$. (ii) $\delta \in SL(2,\mathbb{Z})$ $(f \circ \delta)(z + M) = (f + \delta)\mathbb{Z}$ μερομορφη στα cusps

$F(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha(n) q^n$ $\quad \Gamma(N)$ $\quad \Gamma(1)/(\pm I)\Gamma(N) \cong SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\{\pm I\}$

Δρα στο $M(\Gamma(N))$

$|$ Δρα

$M(\Gamma(1))$

$$\theta : SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})/\pm I \longrightarrow Gal(M(\Gamma(N))/M(\Gamma(1)))$$

$$\theta([\gamma] f) = f \circ \gamma^{t}$$

Representable Functors and fibre products

Γενίκευση του direct product

Representable functors : γενικεύει την universal mapping property

α) Rep. $W \in Ob(\mathcal{C})$

$h_W(X) = Hom_{\mathcal{C}}(X, W)$ $\quad X \in Ob(\mathcal{C})$ $\quad W$ fixed

$f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ $\quad a \in h_W(Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, W)$

$h_W(f)(a) = a \circ f$

$a \circ f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, W) = h_W(X)$

$h_W(f) : h_W(Y) \to h_W(X)$

contravarient functor : $\mathcal{C} \to (Set)$

($h_W^{(0)}(X) = Hom_{\mathcal{C}}(W, X)$ covariant)

Θεμελιώδης ερώτηση:

Ποτε ένας contravarient functor $F : \mathcal{C} \to (Set)$

είναι representable : $\exists\, W \in Ob(\mathcal{C})$ ωστε $h_W \cong F$ ισομορφοι ως fun

Δηλ. $\forall\, X \in Ob(\mathcal{C})$, $\exists\, W$

$\varphi_X : F(X) \xrightarrow{\cong} h_W(X) = Hom(X, W)$ ισομορφισμος συνολων.

$f : X_1 \to X_2$ $\quad (f \in Hom(X_1, X_2))$

$$\begin{array}{ccc} F(X_2) & \xrightarrow{\varphi_{X_2}} & h_W(X_2) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & // & \downarrow{\scriptstyle h_W(f)} \\ F(X_1) & \xrightarrow[\varphi_{X_1}]{} & h_W(X_1) \end{array}$$

Αν υπαρχει τέτοιο W τοτε $\varphi_W : F(W) \xrightarrow{\sim} h_W(W) = Hom(W, W)$

και έχουμε μοναδικο $\psi \in F(W)$ ωστε

$\varphi_W(\psi) = id_W \in h_W(W)$

Το (W, ψ) καθορίζει τον F οταν F, h_W ισομορφοι

Για $X \in Ob(\mathcal{C})$ τυχαιο

Διαλεγουμε $h \in h_W(X) = Hom(X, W)$ τοτε

$F(h)(\psi) \in F(X)$ $\quad h : X \to W \to$

$F(h) : F(W) \to F(X)$ $\quad , \psi \in F(W)$

$$\begin{array}{ccc} F(W) & \xrightarrow{\varphi_W} & h_W(W) \\ {\scriptstyle F(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_W(h)} \\ F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & h_W(X) \end{array}$$

$h = h_W(h)(id_W)$ $\qquad$ h διαλέγουμε $h_W(X) = Hom(X,W)$

$h_W(h)(id_W) = id_W \circ h$

$\Downarrow$

$(\varphi_X\, F(h))(\varphi) = h$ $\qquad$ φ universal el. $\varphi_W(\varphi) = id_W$

$\underbrace{\qquad}$ " $h_W(h)\,\underbrace{\varphi_W(\varphi)}_{(id_W)}$

Όμως φ_X ισομορφισμός (sets)

$\varphi_X(F(h)(\varphi)) = h$ $\qquad$ $\varphi_X : F(X) \cong h_W(X)$

$F(X) = \{F(h)(\varphi) \mid h \in h_W(\cancel{X})\}$

Δηλαδή αν $F \cong h_W$, F αναπαρ. από (W,φ), και είναι repre.

<u>Λήμμα</u> $F : \mathcal{C} \to (Set)$ contravariant και representable τότε το (W,φ) είναι μοναδικό $(W \in Ob(\mathcal{C}),\ \varphi \in F(W))$ μέχρι ισομορφισμού

<u>Αποδ.</u>

$(\tilde W, \tilde\varphi)$ αναπαράσταση του F.

$\exists\ \varphi : F \to h_W$ $\qquad$ $\tilde\varphi : F \to h_{\tilde W}$

$\varphi_W(\varphi) = id_W$ $\qquad$ $\tilde\varphi_{\tilde W}(\tilde\varphi) = id_{\tilde W}$

Τότε

$\varphi_{\tilde W} : F(\tilde W) \xrightarrow{\sim} h_W(\tilde W)$: $\quad \tilde\varphi_W : F(W) \xrightarrow{\sim} h_{\tilde W}(W)$

καθορίζουν

$\eta = \varphi_{\tilde W}(\tilde\varphi) : \tilde W \to W$, $\quad \tilde\eta = \tilde\varphi_W(\varphi) : W \to \tilde W$.

Θα δείξουμε ότι $\eta \circ \tilde\eta = id_W$, $\tilde\eta \circ \eta = id_{\tilde W}$ $\qquad$ $F(\eta)(\varphi) = \tilde\varphi$

$F(\tilde\eta)(\tilde\varphi) = \varphi$

$$\begin{tikzcd}
F(W) \arrow[rr, "\varphi_W"] \arrow[dd, "F(\eta)"'] & & h_W(W) \arrow[dd, "h_W(\eta)"] \\
\varphi \arrow[r, mapsto] & id_W \arrow[d, mapsto] & \\
\tilde\varphi \arrow[r, mapsto] & \eta & \\
F(\tilde W) \arrow[rr, "\varphi_{\tilde W}"'] & & h_W(\tilde W)
\end{tikzcd}$$

$F(\eta)(\varphi) = \tilde\varphi$ $\qquad$ $F \underset{\text{ισομ.}}{\cong} h_{\tilde W}$ $\qquad$ δίνει $F(\tilde\eta)(\tilde\varphi) = \varphi$

Άρα $\quad F(\eta \circ \tilde\eta)(\varphi) = F(\tilde\eta)\,F(\eta)(\varphi) = \varphi$

$\qquad F(\tilde\eta \circ \eta)(\tilde\varphi) = F(\eta)\,F(\tilde\eta)(\tilde\varphi) = \tilde\varphi$

Άρα έχουμε

$$\begin{tikzcd}
F(W) \arrow[r, "\varphi_W"] \arrow[d, "F(\eta\circ\tilde{\eta})"'] & h_W(W) \arrow[d, "h_W(\eta\circ\tilde{\eta})"] \\
F(W) \arrow[r, "\varphi_W"'] & h_W(W)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & id_W \\
\varphi \arrow[r, mapsto] & id_W
\end{tikzcd}$$

$h_W(\eta\circ\tilde{\eta})(id_W) = id_W \Rightarrow \eta\circ\tilde{\eta} = id_W$.

όμοια $\tilde{\eta}\circ\eta = id_{\tilde{W}}$.

Product $X\times Y$ σε κατηγορία.

$F: \mathcal{C} \to (Set)$ $\quad Z\in Ob(\mathcal{C})$

$F(Z) = Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)\times Hom_{\mathcal{C}}(Z,Y)$

$f\in Hom_{\mathcal{C}}(Z_1,Z_2)$ $\quad a\in Hom_{\mathcal{C}}(Z_2,X)$, $b\in Hom_{\mathcal{C}}(Z_2,Y)$

$F(f)(a,b) = (f\circ a, f\circ b)\in F(Z_1)$

contravariant functor

Αν είναι representable ~~τοτε το~~ $F = h_W$, $W\in Ob(\mathcal{C})$ τότε W είναι το γινόμενο και το γράφουμε $X\times Y$.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d] \arrow[ddl, bend right, "a"'] \arrow[ddr, bend left, "b"] & \\
 & W \arrow[dl, "pr_1"] \arrow[dr, "pr_2"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

28/5/2012

Representable functors

book phi.

$h_W(X) = Hom_{\mathcal{C}}(X, W)$

Contravariant functor είναι representable.

$\varphi_X : F(X) \xrightarrow{\sim} Hom(X, W)$ συμβατός με τις συναρτήσεις

Γινόμενο $F : \mathcal{C} \to Sets$

$F(Z) = Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) \overset{set.}{\times} Hom_{\mathcal{C}}(Z, Y)$

$f : Z_1 \to Z_2$ $(\alpha, \beta) \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) \times Hom_{\mathcal{C}}(Z, Y)$

$F(f)(\alpha, \beta) = (f \circ \alpha, f \circ b) \in F(Z_1)$

$(\alpha \circ f, \beta \circ f)$.

$$\begin{tikzcd} & Z_1 \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & Z_2 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Representable: $F = h_W$ $F(Z) \xrightarrow{\text{αντιστοιχεί}} Hom(Z, W)$

κάθε ζευγάρι $(\alpha, \beta) \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) \times Hom_{\mathcal{C}}(Z, Y)$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "f"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\ & W \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Έστω ότι σε κατηγορία $X \times Y$ υπάρχει τότε

$\exists$ $p_1 : Hom_{\mathcal{C}}(X \times Y, X)$ $p_2 : Hom_{\mathcal{C}}(X \times Y, Y)$

ώστε

$f \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, X)$ $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z, X)$ $\exists!$ $Hom_{\mathcal{C}}(Z, X \times Y)$

$f = p_1 \circ h$, $g = p_2 \circ h$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & X \times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

$(X \times Y, (p_1, p_2)) = W$.

Αν $F = h_{X,Y}$

$F(X \times Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X \times Y, X) \times Hom_{\mathcal{C}}(X \times Y, Y)$

$h_{X \times Y}(X \times Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X \times Y, X \times Y)$

$F(X\times Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\times Y, X\times Y)$

$\mathrm{Id}: X\times Y \to X\times Y$

άρα $\exists\; p_1, p_2 \in F(X\times X) = \mathrm{Hom}(X\times Y, X)\times \mathrm{Hom}(X\times Y, Y)$

Τα p_1, p_2 έχουν την ιδιότητα P. Έστω $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, $\quad g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y)$

$(f,g) \in F(Z)$

$F(Z) = h_{X\times Y}(Z) \quad \exists!\, h \in h_{X,Y}(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X\times Y)$ που αντ.
στο (f,g)

$(f,g) \in F'(Z) = \mathrm{Hom}(Z,X)\times\mathrm{Hom}(Z,Y) \rightsquigarrow h \in \mathrm{Hom}(Z, X\times Y)$

$h: Z \to X\times Y \qquad F(h): F(X\times Y) \to F(Z)$

αντιστοιχεί ο $h_{X\times Y}(h) \in \mathrm{Hom}(h_{X\times Y}(X\times Y), h_{X\times Y}(Z))$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (f,g)\in F(Z) \arrow[r] & h \in h_{X\times Y}(Z) \ni h: Z\to X\times Y \\ F(X\times Y) \arrow[u, "F(h)"] \arrow[r] & h_{X\times Y}(X\times Y) \arrow[u, "h_{X\times Y}(h)"'] \\ (p_1,p_2) \arrow[r] \arrow[uu, bend left] & I_d \end{tikzcd}$$

$(p_1, p_2) \in F(X\times Y) \rightsquigarrow h_{X\times Y}(h)(id_{X\times Y})$

$F(h)(p_1,p_2) \rightsquigarrow h_{X\times Y}(h)(id_{X\times Y})$ ✓

$F(h)(p_1,p_2) = (p_1\circ h, p_2\circ h)$ ✓

$h_{X,Y}(h)(id_{X,Y}) = h$

$(f,g) \longrightarrow h$ θα πρέπει $(f,g) = (p_1\circ h, p_2\circ h)$

Αντιστροφως εστω οτι $(X\times Y,(p_1,p_2))$ έχει την (P)

Θα δείξουμε οτι αναπαριστά το γινόμενο

$Z\in Ob(\mathcal{C})$

$\varphi_Z : h_{X\times Y}(Z)=Hom_{\mathcal{C}}(Z,X\times Y)\longrightarrow F(Z)=Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)\times Hom_{\mathcal{C}}(Z,Y)$

$h:Z\to X,Y \longmapsto (p_1\circ h,p_2\circ h)$.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "h"] & \\ & X\times Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Αν $(f,g)\in F(Z)$ $\overset{(P)}{\exists}$ $h\in Hom_{\mathcal{C}}(Z,X\times Y)$ $\quad f=p_1\circ h$, $g=p_2\circ h$.

Αρα η φ_Z είναι <u>surjective</u>

Επίσης αν

$(p_1\circ h,p_2\circ h)=(p_1\circ h',p_2\circ h')$ τοτε η (P) επιάγει την μοναδικότητα της $\tilde{h}\in Hom(Z,X\times Y)$ $\Rightarrow \tilde{h}=h=h'$

Τέλος αν $\alpha\in Hom_{\mathcal{C}}(Z_1,Z_2)$

$$\begin{tikzcd} h_{X\times Y}(Z_2) \arrow[r, "\varphi_{Z_2}"] \arrow[d, "h_{X\times Y}(\alpha)"'] & F(Z_2) \arrow[d, "F(\alpha)"] & h \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & (p_1\circ h,p_2\circ h) \arrow[d, bend left, "F(\alpha)"] \\ h_{X\times Y}(Z_1) \arrow[r, "\varphi_{Z_1}"'] & F(Z_1) & h\circ\alpha \arrow[r, mapsto] & (p_1\circ h\circ\alpha,\ p_2\circ h\circ\alpha) \end{tikzcd}$$

(6) Fibre product

$\varphi_1 : X\longrightarrow Z$

$\varphi_2 : X\longrightarrow Z \qquad G:\mathcal{C}\longrightarrow Set$

$G(T)=\{(f,g)\in Hom_{\mathcal{C}}(T,X)\times Hom_{\mathcal{C}}(T,Y)\mid \varphi_1\circ f=\varphi_2\circ g \quad T\in Ob\,\mathcal{C}\}$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & Y \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

$G(h)(\alpha,\beta)=(\alpha\circ h,\beta\circ h)$

$G(h) \in Hom_{set}(G(T_2), G(T_1))$

Αν (W, p_1, p_2) αναπαριστά τον συναρτητή το W λέγεται το fibre product $X \times_Z Y$

<u>Πρόταση</u> $q_1 : X \to Z$, $q_2 : Y \to Z$ το fibre product ισ
αν $\exists\, W \in Ob(C)$, $p_1 : W \to X$, $p_2 : W \to Y$
ώστε

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & W \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr, "q_1"'] & & Y \arrow[dl, "q_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθ

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "g"] & \\ X & W \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \arrow[dl, "q_2"] \\ & Z \arrow[from=2-1, "q_1"'] & \end{tikzcd}$$

Θεώρημα: Στην κατηγορία των ~~fibre~~ schemes υπάρχουν fibre products

Λήμμα. $X = Spec A$, $Y = Spec B$, $Z = Spec C$
$q_1 : X \to Z$, $q_2 : Y \to Z$

$X \times_Z Y = Spec(A \otimes_C B)$
$\varphi_1 : A \to A \otimes_C B$ $\qquad$ $\varphi_2 : B \to A \otimes_C B$
$a \longmapsto a \otimes 1$ $\qquad$ $b \longmapsto 1 \otimes b$

<u>Απόδ.</u> $f : T \to X$ $\quad g : T \to Y$ καθορίζονται μονοσήμαντα
αφού $\varphi : A \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$
$\psi : B \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \cong R$

q_1, q_2 $\quad v_1 : C \to A$ $\quad$ A, B γίνονται C-άλγεβρες
$v_2 : C \to B$

$\varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ g \iff \varphi \circ v_1 : C \to R$
$\varphi \circ v_2 : C \to R$ ταυτίζονται

$G(T) = \{ (f,g) \in Hom(T,X) \times Hom(T,Y) : \varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ g \}$
$\cong \{ (\phi, \psi) \in Hom(A,R) \times Hom(B,R) : \varphi \circ v_1 = \psi \circ v_2 \}$

A, B είναι μέσω του v_1, v_2 C-άλγεβρα
$\phi \circ v_1 = \psi \circ v_2$ $\quad \alpha \in A, b \in B \quad c \in C$
$\phi(\cancel{c} \cdot \alpha) = c\phi(\alpha), \quad \psi(cb) = c\,\psi(b)$

$\Phi : A \times B \to R$ (*)
$(\alpha, b) \mapsto \phi(\alpha)\psi(b)$

Φ διγραμμική ώστε $\Phi(c\alpha, b) = \Phi(\alpha, cb) = c\,\Phi(\alpha, b)$
$\Phi(\alpha_1\alpha_2, b_1 b_2) = \Phi(\alpha_1, b_1)\,\Phi(\alpha_2, b_2)$.

Αντιστρόφως αν έχουμε μια Φ όπως (*)
τότε ορίζουμε
$\phi(\alpha) = \Phi(\alpha, 1_B)$, $\psi(b) = \Phi(1_A, b)$.
$\phi : A \to R$, $\psi : B \to R$ ομορ.
$\Phi(\alpha, b) = \phi(\alpha)\psi(b)$.

$G(T) \cong \{ \Phi : A \times B \to R \mid \Phi$ διγραμμ. ικανοποιεί τις (ιδιοτ.$) \}$

$G(T) \cong Hom(A \otimes_C B, R)$ universal ιδιότητα του τανυστικού γινομένου
$\varphi_T : G(T) \cong Hom(Z, Spec\, A \otimes_C B)$

Γενική περίπτωση: Αναγωγή στο κάλυμμα αφινικών περιοχών

$X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} Y = X \times Y$

<u>Ορισμος</u>

$f: X \to Y$ μορφισμος σχηματων

$y \in Y$

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y \{pt\} & \to & X \\ & & \downarrow \\ \{p_t\} & \to & Y \end{array}$$

$X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}\, k(y)$

<u>Παράδειγμα</u>

$k[t] \to k[x, y, t]/_{xy-t}$

Επαγει

$f: X = \mathrm{Spec}\, k[x,y,t]/_{(xy-t)} \to Y = \mathrm{Spec}\, k[t]$

$\{pt\} = (x-\alpha)^{=\alpha}$ prime ideal.

$X_\alpha = \mathrm{Spek}\, k[x,y]/_{(xy-\alpha)}$.

$k[t]/_{t-\alpha}$

$k[x,y,t]\cancel{/}_{(xy-t)} \otimes_{k[t]} k[t]/_{t-\alpha} \cong k[x,y]/_{-\alpha}$.

$\alpha \neq 0$ X_α αναγωγο.

$X_0 = \mathrm{Spek}\, k[x,y]/_{xy}$.

Generic point $\mathrm{Spec}\, k(t)$

$k[x,y,t]/_{(xy-t)} \otimes_{k[t]} k(t) = k(t)[x,y]/_{xy-t}$

$f, g: A^\cdot \to B^\cdot$ homotopic $f \sim g$

$$\begin{tikzcd} & A^i \arrow[r, "d"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "k^i"'] & A^{i+1} \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "k"'] \\ B^{i-1} \arrow[r, "d"'] & B^i \arrow[r, "d"'] & B^{i+1} \end{tikzcd}$$

$k^i: A^i \to B^{i-1}$ $\qquad f - g = dk + kd$

$f \sim g \Rightarrow$ ίδιος ομομορφισμός.

Covariant functor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ additive

$\mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Hom}(FA, FA')$ homom.

Left exact $\qquad$ (χρειάζ. injective objects)

$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$

$0 \to FA' \to FA \to FA'' \to R^1 FA' \to R^1 FA' \to$

Injective $\mathrm{Hom}(\cdot, I)$ exact. $\uparrow$ fixed object

$F \cong R^0 F$.

$\longleftrightarrow$

~~Ab~~ G-mod $\to$ $\mathbb{Z}$-Mod

$A \to A^G$ group invariants

$0 \to A^G \to B^G \to C^G \to H^1(G, A) \to H^1(G, B) \to H^1(G, C) \to$

$\Gamma(X, \cdot)$ Global section functor

$\mathcal{F}$ sheaves $\quad H^i(X, \mathcal{F})$

Flasque: $V \subseteq U \quad \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ surjective [κάθε συνάρτηση στο μικρό είναι περιορισμός από R]

$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$

$\mathrm{Hom}(A, \cdot)$ covariant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "i"'] \arrow[dr] & \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}(\cdot, I)$ injective

$\mathrm{Hom}(\cdot, A)$ contra $\qquad$ Exact functor

Injective resolution: complex $I^\cdot \quad i \geq 0$

$0 \to A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \to I^1 \to$

Αρκετά injectives:

$A \hookrightarrow I$ injective τότε έχει injective resolution

Injective $\mathcal{O}_X$-mod. είναι flasque. $\qquad$ Sheaves από αβελιανές ομάδες έχουν

$U \subseteq X \quad \mathcal{O}_U$ είναι $j_!(\mathcal{O}_X|_U)$ $\quad \mathcal{O}_X|_U$ extended to zero out si U

X είναι ~~variety~~ separated αν για κάθε Y

$$Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$$

$\{y \in Y : f(y) = g(y)$ είναι κλειστό$\}$. $\Delta : Y = XX$

$\Delta : X \xrightarrow[(id_X, id_X)]{} X \times X$ $\quad \Delta(X) = \{z \in X \times X ;\ p_1(z) = p_2(z)\}$.

$\Delta(X)$ closed $\quad Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X \quad Y \to X \times X$

$$\{f(y) = g(y) : (f,g)^{-1} \cdot \Delta(X)\}$$

$\Delta(X)$ closed $\Rightarrow (f,g)^{-1} \Delta(X)$ closed.

$\mathbb{A}^1 \to U_1 \subset X$, $\mathbb{A}^1 \to U_2 \subset X$ $\qquad \{y \in \mathbb{A}^1 \mid i_1(y) = i_2(y)\} = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ όχι κλειστό

Συνομολογία

Derived functors

Ορισμός Abelian Category

A, B, $Hom(A,B)$ αβελιανή ομάδα, σύνθεση γραμμική,
Finite direct sums exist, μορφισμοί έχουν πυρήνα, συμπυρήνα
επιμορφισμός είναι ο συμπυρήνας του πυρήνα
Μορφισμός: επί και 1-1. $\qquad A \to B$, $A \to A/\ker\varphi \to B$

Abelian groups, Modules over ring, Sheaves of $\mathcal{O}_X$-modules

Complex $A^\bullet$

$d^i : A^i \to A^{i+1} \qquad d^{i+1} \circ d^i = 0 \qquad f : A^\bullet \to B^\bullet$ μορφισμοί αντιμετάθεση

$h^i(A^\bullet) \quad \ker d^i / \operatorname{im} d^{i-1}$

$f : A^\bullet \to B^\bullet$ απο com. f επάγει

$$h^i(f) : h^i(A^\bullet) \to h^i(B^\bullet)$$

$0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ ses.

$\delta^i : h^i(C^\bullet) \to h^{i+1}(A^\bullet)$ long exact

$$\to h^i(A^\bullet) \to h^i(B^\bullet) \to h^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\bullet) \to$$

$X = \mathbb{P}^1_k$ $\quad\mathcal{F}$ είναι το sheaf των diff.

$U = \mathbb{A}^1, \quad V = \mathbb{A}^1$

$x \circ \qquad y = \frac{1}{x}$

$C^0 = \Gamma(U,\Omega) \times \Gamma(V,\Omega)$

$C^1 = \Gamma(U\cap V,\Omega)$

$\Gamma(U,\Omega) = k[x]dx \qquad$ 1-forms

$\Gamma(V,\Omega) = k[y]dy$

$\Gamma(U\cap V,\Omega) = k[x,\frac{1}{x}]dx$

$d: C^0 \to C^1$

$x \mapsto x$

$y \mapsto \frac{1}{x}$

$dy \mapsto -\frac{1}{x^2}dx$

ker d : $(f(x)dx, \ g(y)dy) \qquad f(x) = -\frac{1}{x^2}g(\frac{1}{x}) \Rightarrow f = g = 0$

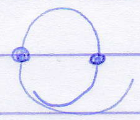
$\frac{1}{x}$ $\quad \frac{1}{x}$ χωρίς αυτό. $\quad$ αφού f, g πολ.

$\check{H}^0(\mathcal{U},\Omega) = 0 \qquad \frac{\ker d}{\operatorname{Im} d}$

H^1 im d. $\quad (f(x) + \frac{1}{x^2}g(\frac{1}{x})dx)$

υποχώρ. $x^n dx, \ n \in \mathbb{Z}, \qquad n \neq -1$

$\check{H}^1(\mathcal{U},\Omega) \cong k$

$S^1, \mathbb{Z}. \qquad C^0 =$ 

$\mathbb{Z}$ constant sheaf

$C^0 = \Gamma(U,\mathbb{Z}) \times \Gamma(V,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$C^1 = \Gamma(U\cap V,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$d: C^0 \to C^1 \qquad \langle a,b\rangle \mapsto \langle b-a, b-a\rangle$

$H^0(\mathcal{U},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

$H^1(\mathcal{U},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

Ταυτίση με την Čech αρκεί να είναι αρκετά λεπτή.

~~Z closed subset~~

$\mathcal{F}$ flasque $H^i(X,\mathcal{F})$ $\quad V \subseteq U \quad \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ επι

injective είναι (flasque)

flasque

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0$

$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{I}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}) \to 0$ ακριβης

$H^1(X,\mathcal{F})$, $H^i(X,\mathcal{F}) = H^{i-1}(X,\mathcal{G})$

Vanishing theorem of Grot.

X noetherian top space διαστασης n.

$i > n$ $\quad \mathcal{F}$ sheaf abel. $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$

1) ~~$\Gamma(X,\mathcal{F})$~~ $\mathcal{I}$ injective,

$\mathcal{I}_x \to \mathcal{G}_x$ επι, με πυρηνα $\mathcal{F}_x$.

$\exists$ U αρκετα μικρο $\quad \Gamma(U,\mathcal{I}) \xrightarrow{\text{επι}} \Gamma(U,\mathcal{G})$

$\Gamma(X,\mathcal{I}) \to \Gamma(X,\mathcal{G})$ rest.

flasque

Injective $H^i(X,\mathcal{I}) = 0 \quad i > 0$

$0 \to H^{i-1}(X,\mathcal{G}) \to H^i(X,\mathcal{F}) \to 0$. induction

Noetherian affine scheme $= 0$.

Chech $\mathcal{F}$ sheaf αβελιανών ομάδων X.

$C^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ complex

$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(U_{i_0,\dots,i_p}) \qquad U_{i_0 \dots} = \bigcap$

Ενα στοιχειο $\alpha \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ καθορίζεται απο $\alpha_{i_0,\dots,i_p}$ για καθε $i_0 < \dots < i_p$ ολα. (I έχει καλη διαταξη)

$d: C^p \to C^{p+1}$

$(d\alpha)_{i_0,\dots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0 \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}} \big|_{U_{i_0,\dots,i_{p+1}}}$

$d^2 = 0$ complex $\to$ συνομολογία

Separated morphisms

"Hausdorff"

$f : X \to Y$ μορφισμός $\quad (X \times_Y X, (p_1, p_2))$ fibre product.

$\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ ώστε $p_1 \circ \Delta_{X/Y} = id_X \qquad p_2 \circ \Delta_{X/Y} = id_X$.

$\Delta_{X/Y}$ είναι η διαγώνιος.

$x \to (x, x) \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} x$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "id"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & X \times_Y X \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & X \arrow[dl, "f"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Αν η $\Delta_{X/Y}$ είναι closed immersion τότε ο f λέγεται separated. $Y = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ και $f : X \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ είναι separated τότε ο X λέγεται separated.

$Y \xrightarrow{(i, i^{\#})} X$
Y closed subspace
i embeding
$i^{\#} : \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_Y$
surjective hom of sheaves

(Hausdorff: Κλειστή διαγώνιος)

separeted + $\overset{\text{prev}}{\text{sheeme}}$ = schem.

Τα affine schemes είναι separated.

$(\mathrm{Spec}\,R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,R}) \qquad X \times X = \mathrm{Spec}(R \otimes_{\mathbb{Z}} R)$

$\Delta : \quad R \otimes_{\mathbb{Z}} R \to R$

$\qquad a \otimes b \to ab$

$p_1 : \quad X \xleftrightarrow{\pi} X \times_{\mathbb{Z}} Y \qquad \mathrm{Spec} \otimes \quad A \otimes_C B \longleftrightarrow A$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \otimes a \leftarrow a$

$p_2 \circ \Delta_{X/Y} \qquad \Delta_{X/Y} : \cancel{R R \otimes} \xrightarrow{\pi_1} R \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\pi_1} a$

$\qquad a \xrightarrow{\pi_1} 1 \otimes a$

η : surjective $\quad R \otimes_{\mathbb{Z}} R \to R \Rightarrow X \to X \times X$ closed. subme

$R \otimes_{\mathbb{Z}} R / I \cong R \qquad \mathrm{Spec}\,R \sim V(I)$

$f : X = \mathrm{Spec}\,A \to Y = \mathrm{Spec}\,B$ είναι separated

$\varphi : B \to A, \quad {}_B A$

$X \times_Y X = \mathrm{Spec}(A \otimes_B A)$

$\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$

$\varphi : A \otimes_B A \to A$

$a \otimes a' \to a a'$

Προταση

$f: X \to Y$ είναι separated $\Delta_{X/Y}(X)$ είναι κλειστο του $X \times_Y X$

Αποδ. separated $\Rightarrow \Delta_{X/Y}(X)$ κλειστο.

Θα δειξουμε $\Delta_{X/Y}(X)$ κλειστο $\Rightarrow$ separated.

$p_1 : X \times_Y X \to X$, $p_1 \circ \Delta_{X/Y} = id_X$

$X \xrightarrow{\Delta} \Delta_{X/Y}(X)$ είναι ομοιομορφισμος

Θα δειξουμε οτι ο $\Delta^{\#}_{X/Y} : \mathcal{O}_{X \times_Y X} \to \Delta_{X/Y *} \mathcal{O}_X$ είναι surjective.

$X \xrightarrow{\Delta_{XX}} X \times_Y X \leftarrow$ οριζεται το $\Delta_{X/Y *} \mathcal{O}_X$ push forward

$x \in X$ τυχαιο U open affine ωστε το $f(U)$ περιεχεται σε open affine του Y τοτε σε περιοχη του x

$\Delta_{X \times_Y X}$ είναι $\Delta_U : U \to U \times_V U$ αλλα affine : closed im.

$\Delta^{\#}_U : \mathcal{O}_{U \times_V U} \to \Delta_{U *} \mathcal{O}_U$ surjective.

$U \times_V U$ ανοιχτο στο $X \times_Y X$ $\Delta^{\#}_{X \times_Y X}$ surjective.

Δηλαδη $\Delta_{X/Y}(X)$ είναι locally closed $U \supset \Delta_{X/Y}(X)$ ωστε $\Delta_{X/Y}(X)$ closed.

Παραδειγμα

$X = \operatorname{Spec} k[x]$ $\qquad Y = \operatorname{Spec} k[y]$

$U = X \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} k[x, 1/x]$

$V = Y \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} k[y, 1/y]$

$Z : \varphi U \to V$ $\qquad k[x, 1/x] \to k[y, 1/y]$

$\qquad f(x, 1/x) \mapsto f(y, 1/y)$

Z οχι separated

$Z \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} Z$ προκυπτει απο κολλημα 4 affine.

$X_1 = \operatorname{Spec} k[x] \otimes_k k[x]$ $\qquad X_2 = \operatorname{Spec} k[y] \otimes_k k[x]$

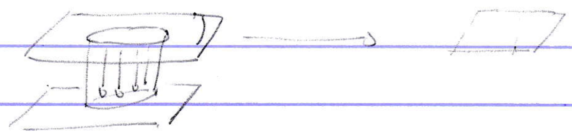
$X_3 = \operatorname{Spec} k[x] \otimes_k k[y]$ $\qquad X_2 = \operatorname{Spec} k[y] \otimes_k k[y]$

ανοδοιχ. τη. $\varphi : U \to$

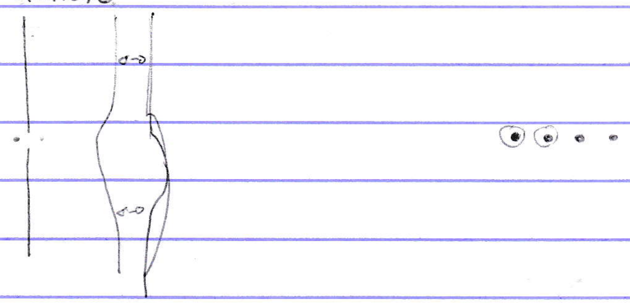
$\varphi \times id_U : U \times_{Spec\, k} U \longrightarrow V \times_{Spec\, k} U$
$id_U \times \varphi : U \times_{Spec\, k} U \longrightarrow U \times V$
$\varphi \times \varphi : U \times U \longrightarrow V \times V$

$k[x,y]$ ταυτίζονται εκτος του $(0,0)$. και στο $(0,0)$ εχουμε 4 σημεία.

$\Delta : Z \longrightarrow Z \times Z$ ταυτίζεται
$\Delta_1 : X \longrightarrow X_1 = X \times_{Spec\, k} X$
$\Delta_4 \; Y \longrightarrow Y \times_{Spec\, k} Y$

X 

$\Delta(Z)$ = διαγώνιος εκτος την $(0,0)$ και τα δυο σημεια των αρχων των X_1, X_4. Αλλα η κλειστοτητα έχει και τα 4 συνεπως $\Delta(Z)$ δεν είναι κλειστο



Θεώρημα (i) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ separated $g \circ f$ είναι
(ii) $j : Z \to X$ closed or open immersion j separated
(iii) $f : X \to S$ $f_T : X \times_S T \longrightarrow T$ είναι
(iv) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ αν $g \circ f$ separated τοτε και η f είναι

Αποδ

i: $\Delta_{X/Y} : X \to X\times_Y X$ είναι closed immersions

$\Delta_{Y/Z} : Y \to Y\times_Z Y$

X είναι scheme over Z μέσω $\overbrace{X \to Y \to Z}^{g\circ f}$

$(f,f)_Z : \underset{\text{Τανυστικό γινόμενο υπεράνω Z}}{X\times_Z X} \to Y\times_Z Y$

Base change $\Delta_{Y/Z}$ υπερ $(f,f)_Z$

$h: \Delta_{Y/Z} \times_{Y\times_Z Y} (f,f)_Z : Y\times_{Y\times_Z Y} X\times_Z X \to X\times_Z X$ closed imersion

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "\Delta_{Y,Z}"'] & & X\times_Z X \arrow[dl, "(f,f)_Z"] \\ & Y\times_Z Y & \end{tikzcd}$$

[Γενικά για Base change

X, Y schemes over S $\quad f: X\to Y$, $g: T\to S$

$X\times_S T$ $\qquad$ $Y\times_S T$

$$\begin{tikzcd} X\times_S T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

universality of fibre prod

$$\begin{tikzcd} Y\times_S T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & X\times_S T \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[ddl, bend right, "g\circ f"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ & Y\times_S T \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d] & \\ Y & & T \end{tikzcd}$$
]

$S = Y\times_Z Y \leftarrow T = X\times_Z X$

$\Delta_{Y,Z} : Y \xrightarrow{\Delta_{Y,Z}} Y\times_Z Y$

$Y\times_S T \to Y\times_Z Y\times_S T$

$Y\times_{Y\times_Z Y} X\times X \to Y\times_Z Y\times_{Y\times_Z Y} X\times_Z X$

~~$X\otimes X$~~ $\quad A\times_A B \cong B \qquad (A\otimes_A B \cong B)$

$\mathrm{Hom}(S,B) \to \mathrm{Hom}(S, A\times_A B)$

$S \to B \to A$

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[d] \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ A & A\times_A B \arrow[l] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

$h: \cancel{\Delta} \quad X \times_{Y \times_Z Y} X \times_Z X \longrightarrow X \times_Z X$ closed imersion.