$H(b)$ αν όχι (ο b είναι αριθμός Gödel ενός τύπου $\alpha(v_1)$ &
$\mathfrak{N} \models \alpha(S^b 0)$)

Θεώρημα

$\{ \underbrace{H(\tau)}_{\text{αριθ. Gödel}} \mid \mathfrak{N} \models \tau \}$ δεν είναι ορίσιμη

25-4-2013

$(\forall x \phi \to \psi) \to \exists x (\phi \to \psi)$

Από το Μεταθεώρημα Συναγωγής

$(\forall x \phi \to \psi) \vdash \exists x (\phi \to \psi)$

Από το Μεταθεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο

$\forall x \phi \to \psi \ , \ \neg \exists x (\phi \to \psi)$ ασυνεπές

$\forall x \phi \to \psi \ , \ \forall x \neg (\phi \to \psi)$ ασυνεπές

~~$\forall x \phi \to \psi \ , \ \neg (\phi \to \psi)$ ασυνεπές~~

$\forall x \neg (\phi \to \psi) \vdash \phi, \neg \psi$

$\forall x \neg (\phi \to \psi) \vdash \forall x \phi, \neg \psi$

$\forall x \phi \to \psi \ , \ \forall x \neg (\phi \to \psi)$ έπρεπε να δειχθεί ασυνεπές

Πράγματι δείχθηκε

Γλώσσα $0, S, <, +, \cdot, E$

Η δομή των φυσικών Αριθμών

$Th\mathfrak{N}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{N}_S$

A_E $\qquad\qquad\qquad\qquad A_S$

$Cn A_S = Th\mathfrak{N}_S$

$$\underset{S_1}{Sx \neq 0}, \quad \underset{S_2}{Sx = Sy \to x = y}$$

$$\underset{L_1}{x < Sy \leftrightarrow x \leq y}$$

$$\underset{L_2}{x \not< 0} \qquad \underset{L_3}{x < y \vee x = y \vee y < x}$$

$$\underset{A_1}{x + 0 = x}, \quad \underset{A_2}{x + Sy = S(x+y)}$$

M_1, M_2, E_1, E_2.

Λήμμα 33Α

1) $A_E \vdash x \not< 0$ Αξίωμα

2) $A_E \vdash x < S^{k+1}0 \leftrightarrow x = S^0 0 \vee \cdots \vee x = S^k 0$

$A_E \vdash x < k+1 \leftrightarrow x = 0 \vee \cdots \vee x = k$

Αποδ του (2)

$x < S^{k+1}0 \leftrightarrow x \leq S^k 0 \leftrightarrow x < S^k 0 \vee x = S^k 0$

Επαγωγικά συνεχίζω

Προσοχή στην Επαγ. Βάση

$x < S0 \leftrightarrow x = 0$: Πράγματι

από αξιώματα

$x < S0 \leftrightarrow x < 0 \vee x = 0$

αλλά από αξίωμα $x \not< 0$. Άρα

$x < S0 \leftrightarrow x = 0$

Λήμμα 33Β

Αν t όρος χωρίς μεταβλητές τότε

$\exists k, A_E \vdash t = S^k 0$

26/4/2013

A_E (αξιώματα πεπερασμένα)

$A_E \subseteq Th\mathfrak{N}$

$\underbrace{Cn A_E}_{\text{υπενθύμιση}} \overset{\neq}{\subseteq} Th\mathfrak{N}$

$A_E \vdash t = S^k 0$

Θεώρημα

Αν τ απόφανση χωρίς ποσοδείκτες $\in Th\mathfrak{N}$ $A_E \vdash \tau$

Απόδειξη

Επαγωγή στο τ (μερικές περιπτώσεις)

1) $t_1 = t_2$. Από το προηγούμενο $\exists n_1, n_2$

$A_E \vdash t_1 = S^{n_1} 0$ & $A_E \vdash t_2 = S^{n_2} 0$.

Λόγω της αλήθειας των
$t_1 = S^{n_1}0$, $t_2 = S^{n_2}0$, $t_1 = t_2$
συμπεραίνω ότι $n_1 = n_2$.
Άρα, $A_E \vdash t_1 = t_2$

2) $t_1 \not< t_2$ Έστω ότι $t_1 \not< t_2 \in Th\mathcal{N}$
Ξέρω ότι $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$
$A_E \vdash t_1 = S^{n_1}0$, $A_E \vdash t_2 = S^{n_2}0$
Επειδή $t_1 = S^{n_1}0$, $t_2 = S^{n_2}0$
και $t_1 \not< t_2 \in Th\mathcal{N}$
συμπεραίναμε ότι $n_2 \leq n_1$
Θέλω να δείξω $A_E \vdash t_1 \not< t_2$
Αρκεί να δείξω A_E, $t_1 < t_2$ ασυνεπές
Αρκεί να δείξω ότι για $n_2 \leq n_1$
τότε A_E, $S^{n_1} < S^{n_2}$ είναι ασυνεπές
Με βάση τα αξιώματα.
Π.χ. Πως αποδεικνύω ότι A_E, $S0 < 0$
ασυνεπές.

Πόρισμα.
Οποιαδήποτε απόφανση αληθής ($\in Th\mathcal{N}$)
της μορφής $\exists v_1 \ldots \exists v_n \, \tau(v_1, \ldots, v_n)$, όπου
τ χωρίς ποσοδείκτες είναι αποδείξιμη
($A_E \vdash \exists v_1, \ldots \exists v_n \, \tau$)
Απόδειξη $\exists k_1, \ldots k_n$ έτσι ώστε
$\tau(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0) \in Th\mathcal{N}$

Από το προηγούμενο

$A_E \vdash \tau(S^{k_1}0, \dots, S^{k_n}0)$ Άρα,

$A_E \vdash \exists v_1 \cdots \exists v_n \, \tau(v_1, \dots, v_n)$

Δεν ισχύει το αντίστοιχο για καθολικούς ποσοδείκτες.

Άσκηση / Θεωρία.

Ένα σύνολο Σ ΚΣΤ καλείται αριθμητικά πλήρες αν για κάθε $\phi(v_1, \dots, v_n) \in \Sigma$ και για κάθε ακολουθία από φυσικούς αριθμούς $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, αν $\phi(S^{k_1}0, \dots, S^{k_n}0)$ αληθής τότε $\phi(S^{k_1}0, \dots, S^{k_n}0)$ αποδείξιμη

π.χ.

Σ = τύπος / χωρίς ποσοδείκτες

Ένα σύνολο από ΚΣΤ Σ καλείται αριθμητικά προσδιορισμένο (λέμε ότι προσδιορίζεται αριθμητικά) αν για κάθε $\phi(v_1, \dots, v_n) \in \Sigma$ & $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$

$A_E \vdash \phi(S^{k_1}0, \dots, S^{k_n}0)$ ή

$A_E \vdash \neg\phi(S^{k_1}0, \dots, S^{k_n}0)$

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι ένα α προσδιορισμένο Σ είναι και α πλήρες

Απόδ

Έστω Σ α. προσδ.

Θ.δ.ο. είναι α πλ. Έστω $\phi(v_1, \ldots, v_n) \in \Sigma$ & $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$. Έστω ακόμη

$\phi(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0) \vdash$ Την

Από την υπόθεση μας όμως

$A_E \vdash \phi(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0)$

$A_E \vdash \neg\phi(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0)$.

Έστω ότι $A_E \vdash \neg\phi(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0)$

Τότε, $\mathfrak{N} \models \neg\phi(S^{k_1}0, \ldots, S^{k_n}0)$,

Άτοπο.

Αντίστροφα, Έστω Σ α. πλήρες, είναι κατ' ανάγκη α. προσδ.; <u>ΟΧΙ</u>

Θεωρώ Σ = υπαρξιακοί τύποι

(μόνο υπαρξιακοί ποσοδείκτες)

Άσκηση

Αν Σ κλειστό ως προς τις αρνήσεις ($\phi \in \Sigma$ τότε $\neg\phi \in \Sigma$).

τότε ισχύει αντίστροφο

Αναπαρασταση

Να θυμηθούμε ορισμό οριστότητας

$R \subseteq \mathbb{N}^k$

Υπάρχει τύπος $\phi(v_1, \ldots, v_k)$ έτσι ώστε

$(a_1,\dots,a_k) \in R$ ανν $\mathfrak{N} \models \phi(S^{a_1}0,\dots,S^{a_k}0)$
$\phi[a_1,\dots,a_k]$

$R \subseteq \mathbb{N}^k$ καλείται αντιπροσωπεύσιμη στον ΣηΑΕ αν υπάρχει τύπος $\phi(v_1,\dots,v_k)$ έτσι ώστε $\forall a_1,\dots,a_k \in \mathbb{N}$
Αν $R(a_1,\dots,a_k)$ τότε $A_E \vdash \phi(S^{a_1}0,\dots,S^{a_k}0)$
Αν $\neg R(a_1,\dots,a_k)$ τότε $A_E \vdash \neg\phi(S^{a_1}0,\dots,S^{a_k}0)$

Ασκηση
R αντιπροσωπ. μέσω ϕ ανν
1) ϕ αριθμητικά προσδ.
2) κ ορίσιμη μέσω ϕ.
Αποδ
Έστω R αντιπροσωπεύσιμη μέσω ϕ.
$\forall a_1,\dots,a_k$ $(a_1,\dots,a_k) \in R$ τότε $A_E \vdash \phi(a_1,\dots,a_k)$
$(a_1,\dots,a_k) \notin R$ τότε $A_E \vdash \neg\phi(a_1,\dots,a_k)$
Απόδειξη του 2
Έστω ότι $R(a_1,\dots,a_k)$ πρέπει ν.δο.
$\mathfrak{N} \models \phi(a_1,\dots,a_k)$ & το αντίστροφο.

(Αντίστροφο Άσκηση)