$C^{n^*} > 1$, $C^{n^*} > 2$, ...

Πρόοδος : 13-4-2013 Σάββατο.

4/4/2013

$K(x) = 1$, αν x μεταβλητή.
$K(c) = 1$, αν c σταθερά
$K(f) = 1$, αν f n-θέσιο σύμβολο συνάρτησης.
$K(S_1 \cdots S_n) = K(S_1) + K(S_2) + \cdots + K(S_n)$

1) Αν t όρος τότε $K(t) = 1$
2) Είναι δυνατόν $K(a) = 1$, χωρίς να είναι το a όρος, π.χ. xxf
3) Αν t όρος και a γνήσιο αρχικό τμήμα του t, τότε $K(a) < 1$ και a δεν είναι όρος.

Αλγόριθμος ελέγχου αν δεδομένη έκφραση t είναι όρος.

1) Ελέγχουμε αν t είναι μεταβλ. ή σταθ.
2) Έστω $t = f \cdots$ με f n-θέσιο.
3) Εντοπίζουμε το μικρότερο S έτσι ώστε $t = fS$ & $K(S) = 1$ και ελέγχουμε αναδρομικά αν S όρος. Επαναλαμβάνουμε για άλλες $n-1$ φορές μετά το S.

? Άσκηση.

Έστω t έκφραση έτσι ώστε

A) $K(t)=1$

B) $\forall$ γνήσιο αρχικό τμήμα a του t. $K(a)<1$.

Να αποδειχθεί ότι t όρος

Λύση

Αν αποτελείται από ένα μόνο σύμβολο τότε t είναι όρος.

Αν το t αποτελείται από περισσότερα του ενός σύμβολα τότε το πρώτο σύμβολό του

Είναι συναρτησιακό σύμβολο, διότι αλλιώς

θα παραβιαζόταν η (B)

Έστω ότι $t=f\ldots$, f n-θέσιο

Θα υπάρχουν $u_1,\ldots,u_n$ με $K(u_1)=1,\ldots,K(u_n)=1$

& $t=fu_1\ldots u_n$ & για κάθε i & για κάθε

γνήσιο αρχικό τμήμα a του u_i $K(a)<1$

Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι u_i είναι όροι

Άρα, t όρος.

Νέος αλγόριθμος ελέγχου αν t όρος

1) Αν t ένα μόνο σύμβολο ✓

2) Αν t περισσότερα σύμβολα, ελέγχουμε:

A) $K(t)=1$

B) $\forall$ γνήσιο αρχικό τμήμα a του t
$K(a)<1$

Ο αλγόριθμος δεν δίνει συντακτική ανάλυση

Αντίστοιχα αποτελέσματα για ΚΣΤ.

Θεωρία Μοντέλων (Συνέχεια)

Σ σύνολο αποφάνσεων σε μια αριθμήσιμη γλώσσα.

Αν το Σ είναι ικανοποιήσιμο, τότε έχει αριθμήσιμο μοντέλο.

Θ. Löwenheim-Skolem

Από το Θεώρημα Αξιοπιστίας Σ συνεπές

Άρα, από την απόδειξη του Θεωρήματος Πληρότητας Σ έχει αριθμήσιμο μοντέλο.

Φαινομενικό Παράδοξο του Skolem

Θεωρούμε τη γλώσσα της Θ. Συνόλων

$\in$ διθέσιο

$\emptyset$ σταθερά.

Αξιώματα Θεωρίας Συνόλων αποτελούν Σ αποφάνσεων.

Δεχόμαστε ότι Σ είναι ικανοποιήσιμο.

Άρα, υπάρχει $\mathfrak{A} = \langle A, \in^{\mathfrak{a}}, \emptyset^{\mathfrak{a}} \rangle$ με A αριθμήσιμο και $\mathfrak{A} \models \Sigma$

Υπάρχει απόφανση σ που εκφράζει ότι υπάρχουν μη αριθμήσιμα στο πλήθος σύνολα.

$(\forall f)(f$ συνάρτηση και $\mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{N}$ & f αμφ.

$\longrightarrow (\exists x)(x \notin \mathrm{range}\, f))$

Αλλά $\mathfrak{A} \models \sigma$

Όμως A αριθμήσιμο Φαινομενικό Παράδοξο

Είναι φαινομενικό διότι η αριθμησιμότητα του A δεν επαληθεύεται στην $\mathfrak{A}$.

Βασικά Πράγματα για άπειρους πληθαρίθμους

Πεπερασμένοι πληθάριθμοι : Φυσικοί Αριθμοί

(άλεφ) $\aleph_0$: πληθάριθμος του $\mathbb{N}$

$\aleph_1, \aleph_2, \ldots$

c = πληθάριθμος του $\mathbb{R}$ $\quad 2^{\aleph_0}$

$c > \aleph_0$

Υπόθεση συνεχούς $2^{\aleph_0} \overset{?}{=} c = \aleph_1$

Αν κ και λ άπειροι πληθάριθμοι

$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$

Πόρισμα

Αν κ άπειρος $\quad \kappa \aleph_0 = \kappa + \aleph_0 = \kappa$

Έστω πρωτοτάξια γλώσσα πληθαρίθμου (άπειρου) κ (Τότε οποιοδήποτε σύνολο Σ από αποφάνσεις έχει πληθάριθμο κ).

Θεώρημα Löwenheim - Skolem

Αν Σ ικανοποιήσιμο, τότε Σ έχει μοντέλο πληθαρίθμου $\lambda \leq \kappa$.

Θεώρημα LST (Löwenheim Skolem & Tarski)

Έστω πρωτοτάξια γλώσσα πληθαρίθμου (άπειρα) κ & Σ σύνολο αποφάνσεων

Αν Σ έχει άπειρο μοντέλο, τότε έχει μοντέλο πληθαρίθμου λ για $\lambda \geq \kappa$

Θεωρίες

Σ σύνολο αποφάνσεων. Σ καλείται Θεωρία αν $\forall \sigma \ (\Sigma \models \sigma$ έχουμε ότι $\sigma \in \Sigma)$

Σ καλείται πλήρης Θεωρία αν για κάθε απόφανση σ, $\sigma \in \Sigma$ ή $\neg\sigma \in \Sigma$

Μερικά Αποτελέσματα για Θεωρίες

Σ σύνολο αποφάνσεων.

K κλάση μοντέλων.

$$Mod\,\Sigma = \{ \mathfrak{A} \ \forall \sigma \in \Sigma \ \ \mathfrak{A} \models \sigma \}$$

(Είναι εκείνα τα μοντέλα που ικανοποιούν όλα τα Σ)

σύνολο από δομές

$$Th\,K = \{ \sigma : \forall \mathfrak{A} \in K \ \ \mathfrak{A} \models \sigma \}$$

(Είναι εκείνες οι αποφάνσεις που ικανοποιούνται από το K)

Θεωρία ενός συνόλου από μοντέλα:

$Th\,Mod\,\Sigma = Cn\,\Sigma$ συνεπαγόμενα του Σ

Ασκήσεις

1) $\Sigma \subseteq Cn\Sigma$

Απόδ.

Έστω $\sigma \in \Sigma$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\sigma \in Cn\Sigma$,
$Cn\Sigma = ThMod\Sigma$.
Έστω $\alpha \in Mod\Sigma$. Αρκεί να δείξουμε ότι
$\alpha \models \sigma$. Προφανώς ισχύει.

2) $\Sigma = ThMod\Sigma$ ανν Σ θεωρία.

Απόδ.

2α) Έστω ότι $\Sigma = ThMod\Sigma$. Πρέπει να δείξω
ότι Σ θεωρία.
Θεωρώ σ τ.ω. $\Sigma \models \sigma$. Πρέπει ν.δ.ο. $\sigma \in \Sigma$.
Αρκεί ν.δ.ο. $\sigma \in ThMod\Sigma$.
Αρκεί ν.δ.ο. $\forall \alpha \in Mod\Sigma$. $\alpha \models \sigma$. Προφανές
διότι $\Sigma \models \sigma$

2β) Αν Σ θεωρία τότε $\Sigma = ThMod\Sigma$.
Αρκεί ν.δ.ο. $ThMod\Sigma \subseteq \Sigma$.
Έστω $\sigma \in ThMod\Sigma$
Τότε $\Sigma \models \sigma$ και επειδή υπόθεσα για το Σ ότι
είναι θεωρία, $\sigma \in \Sigma$. οεδ.

Αν K σύνολο μοντέλων, $Mod\,ThK$
Ορισμός K καλείται κλειστό ως προς τη στοιχειώδη
ισοδυναμία αν οποιαδήποτε δομή $\mathcal{A}$ που είναι
στοιχειωδώς ισοδύναμη με στοιχείο του K ανήκει στο K.

Υπενθύμιση:
$\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ στοιχειωδώς ισοδύναμες αν
$Th\mathfrak{A} = Th\mathfrak{B}$
$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

1) $K \subseteq Mod\,Th\,K$ Άσκηση
2) $K = Mod\,Th\,K$ αν K κλειστό ως προς τη στοιχειώδη ισοδυναμία Άσκηση

5/4/2013

Τελευταία άσκηση προηγούμενης φοράς **Λάθος**

K σύνολο από δομές

1) Mod Th K $\supseteq$ K

2) Mod Th K = K αν $\mathfrak{a} \models$ Th K τότε $\mathfrak{a} \in K$

2β) Αν $\mathfrak{a} \models$ Th K $\Rightarrow \mathfrak{a} \in K$ τότε Άσκηση.

Mod Th K = K.

Αρκεί να αποδείξω ότι Mod Th K $\subseteq$ K.

Ελαφρώς ενδιαφέρουσα Άσκηση

Έστω T, Σ σύνολα αποφάνσεων που δεν έχουν κοινό μοντέλο. Να αποδειχθεί ότι $\exists$ απόφανση σ

$$T \vdash \sigma \ \& \ \Sigma \vdash \neg\sigma$$

Λύση

Από την υπόθεση έχω $T \cup \Sigma$ μη ικανοποιήσιμο.

Από Θ. Αξ & Πληρ. $T \cup \Sigma$ ασυνεπές.

Άρα, υπάρχουν $\tau_1, \dots, \tau_n \in T$ & $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Sigma$ έτσι ώστε $\{\tau_1, \dots, \tau_n, \sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ ασυνεπές

Άρα, $\{\tau_1, \dots, \tau_n, \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k\}$ ασυνεπές

Άρα, $\{\tau_1, \dots, \tau_n\} \vdash \neg(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k)$

Άρα, $T \vdash \neg(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k)$ Θέτω σ να είναι $\neg(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k)$

Οπότε $T \vdash \sigma$

Όμως $\neg\sigma \equiv \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k$

Τότε όμως $\Sigma \vdash \neg\sigma$ <u>ΟΕΔ.</u>

<u>Παραλλαγή</u> ←

Αν T, Σ, Φ, φ δεν έχουν κοινό μοντέλο

τότε $\exists\, \sigma$ έτσι ώστε

$$T \vdash \Phi \to \sigma$$
$$\Sigma \vdash \varphi \to \neg\sigma$$

Προδεσμευτική Κανονική Μορφή (Προτακτική)

Prenex Normal Form

nexus

plexus :

Φ έχει τη μορφή $Qx_1, \dots, Qx_n \varphi$ όπου Q είναι $\forall$ ή $\exists$ & το φ δεν έχει ποσοδείκτες.

Κάθε τύπος είναι λογ. ισοδύναμος με τύπο σε προδεσμευτική κανονική μορφή.

<u>Απόδ</u> (σκιαγράφηση)

1) Έστω ότι Φ είναι $\neg X$

"Σπρώχνω" την άρνηση πέρα από τα Q

2) $X_1 \to X_2$

Αρκεί να καλύψω τις εξής περιπτώσεις:

$a \to \exists x b$ με το x να μην εμφανίζεται ελεύθερο στην a.

$a \to \forall x b$ — —

$\exists x a \to b$

$\forall x a \to b$

Παρατηρούμε ότι

$a \to \exists x b \equiv \exists x (a \to b)$

$a \to \forall x b \equiv \forall x (a \to b)$

Έστω ότι $a \to \exists x b$ θα αποδείξω ότι $\exists x (a \to b)$. Έστω ότι $\neg \exists x (a \to b)$.

Άρα, για κάθε x $a \wedge \neg b(x)$

Από την υπόθεση έχω $\exists x b$ άτοπο.

$\forall x a \to b$. $\overset{\Leftarrow}{\not\equiv}$ $\forall x (a \to b)$

$\forall x a \to b \equiv \exists x (a \to b)$.

$\exists x a \to b \equiv \forall x (a \to b)$.

Μη Συμβατική Ανάλυση

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to a} f(x) = b$

Πρωτοτάξια γλώσσα για τους πραγματικούς

1) Για κάθε σχέση R στο ℝ έχω κατηγορηματικό σύμβολο P_R

2) συνάρτηση f στο ℝ ——— σύμβολο συνάρτ. F_f

3) $\forall r \in \mathbb{R}$ έχω σύμβολο σταθεράς C_r

ΠΛΗΘΟΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ $2^{2^{\aleph_0}}$

Σύνολο τύπων ~~αποφάνσεων~~

R η δομή για την οποία

$|R| = \mathbb{R}$

$P_R^R = R$ $\quad C_r^R = r$

$f_F^R = F$

ThR

ThR $\{ C_r \; P_{<} \; V_1 \mid r \in \mathbb{R} \}$

Είναι ικανοποιήσιμο;

NAI, Από Θ. Συμπάγειας.

$\mathcal{A}$, b δομή και στοιχείο του $|\mathcal{A}|$ έτσι ώστε η $\mathcal{A}$ με την αποτίμηση $s(v_j) = b$ να ικανοποιεί τους τύπους στο προηγούμενο σύνολο.

Θα αποδείξω ότι R εμφυτεύεται στην $\mathcal{A}$.

Θα ορίσω μορφισμό 1-1 του h

$h(r) = C_r^{\alpha}$

Αποδ. ότι h είναι μορφισμός 1-1

A) 1-1 $r_1 \neq r_2$ Πρέπει να αποδείξω

$C_{r_1}^{\alpha} \neq C_{r_2}^{\alpha}$. Δηλ. $\alpha \models C_{r_1} \neq C_{r_2}$

Αλλά $C_{r_1} \neq C_{r_2} \in ThR$

Άρα, πράγματι $\alpha \models C_{r_1} \neq C_{r_2}$ $(\alpha \models ThR)$

B) Διατηρούνται οι σχέσεις

$R(r,s)$ ανν $R^{\alpha}(h(r), h(s))$.

$R(r,s) \Leftrightarrow R \models P_R(C_r, C_s)$

Άρα, $\alpha \models P_R(C_r, C_s)$.

Άρα, $R^{\alpha}(C_r^{\alpha}, C_s^{\alpha})$ <u>οεδ</u>

Συμβολισμός

R σχέση στην R

$^*R$ σχέση στην $^*R$

f συναρτ.

$^*r = r$

<u>Π.χ.</u>

$^*|x|$, $x \in {}^*R$

$x \,^*\!< y$

Θα ξεχνώ τα αστέρια.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

$^*\mathbb{R}$, $^*\mathbb{R}$

$F = \{ x \in {}^*\mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} ,\ |x| < y \}$

$I = \{ x \in {}^*\mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}$ με $y > 0$ $\ |x| < y \}$

(Άσκηση, η αντίστροφη των απείρων είναι απείρως αθροισ.. κλειστή: $+$, $\cdot$, ...)

Ιδεώδες

I είναι ιδεώδες

Λέμε για $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ ότι $x \simeq y$ αν $x - y \in I$ απείρως κοντά.

Αν $x \in {}^*\mathbb{R}$ & $x \in F$. $\quad x = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{st(x)}} + \underset{I}{\underset{\cap}{dx}}$

Ορισμός

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \lim\limits_{x \to a} F(x) = b$

Αν $y \simeq x$ τότε $^*F(y) \simeq b$