Στρατηγική: $\vdash \phi \to \psi$ : Μεταθεώρημα απαγωγής
$\vdash \forall x \phi$ : Μεταθεώρημα Γενίκευσης
$\vdash \neg\psi$ : Αν $\vdash \neg(\chi \to \psi)$ τότε $\vdash \chi$ & $\vdash \neg\psi$
Αν $\vdash \neg\neg\phi$ τότε $\vdash \phi$
Αν $\vdash \neg\forall x \phi$ τότε Βρίσκουμε $t$ τ.ω. $\vdash \neg\phi^x_t$

Μεταθεώρημα Γενίκευσης Σταθερών
Αν $\Sigma \vdash \phi$ & $c$ σταθερά που δεν εμφανίζεται στο $\Sigma$, τότε $\Sigma \vdash \forall y \phi^c_y$ για κάποια μεταβλητή $y$.

Μεταθεώρημα Ύπαρξης: $\Sigma, \phi^x_c \vdash \psi$, $c$ δεν εμφανίζεται στο $\Sigma \cup \{\phi, \psi\}$ τότε $\Sigma, \exists x \phi \vdash \psi$.

Deduction: Συναγωγή (Μεταθ. Απαγωγής $\rightsquigarrow$ Μεταθ. Συναγωγής)
Reduction: Απαγωγή

Μεταθεωρήματα: Γενίκευσης
$\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \Sigma \vdash \forall x \phi$, $x$ όχι ελεύθερο στο $\Sigma$
Αποφαντικής Λογικής
- Αν $\Sigma \vdash \phi_1, \ldots, \phi_n$ & $\phi$ ταυτολογική συνέπεια των $\phi_1, \ldots, \phi_n$ τότε $\Sigma \vdash \phi$.
- Συναγωγής
- Αντιθετοαντιστροφής
- Απαγωγής σε Άτοπο
- Διπλής Άρνησης

## Ασκήσεις

1) $\vdash \forall x\phi \leftrightarrow \forall y \phi^x_y$ ($\int f(x)dx = \int f(y)dy$ στην ανάλυση) με y ΔΕΝ εμφανίζεται στον $\phi$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι

A) $\vdash \forall x\phi \rightarrow \forall y \phi^x_y$

B) $\vdash \forall y \phi^x_y \rightarrow \forall x\phi$

Τότε, από μεταθ. ταυτολογικής συνέπειας έχουμε το ζητούμενο

A) Αρκεί (από Μεταθ. Συναγωγής) $\forall x\phi \vdash \forall y \phi^x_y$

Αρκεί (από Μεταθ. Γενίκευσης) $\forall x\phi \vdash \phi^x_y$ [πληρούνται οι προϋποθέσεις του ΜΘΓ]. Ισχύει από το ΛΑ.2, όπου ισχύουν πάλι οι προϋποθέσεις.

B) Αρκεί $\forall y \phi^x_y \vdash \forall x\phi$. Αρκεί $\forall y\phi^x_y \vdash \phi$. Ισχύει από Λ.Α.2.

Παρατήρηση: $y=y \rightarrow \forall y(x=y)$. Με αντικατάσταση τις ελεύθερες εμφανίσεις του x με y: $y=y \rightarrow \forall y(y=y)$. Με αντικατάσταση τις ελεύθερες εμφανίσεις του y με x: $x=x \rightarrow \forall y(y=y)$ διαφορετικός τύπος από τον αρχικό. Άρα στο τελευταίο Θεώρημα πρέπει y να μην εμφανίζεται ελεύθερο στον $\phi$, που το έχουμε.

2) $\vdash a \rightarrow \forall x\beta \leftrightarrow \forall x(a \rightarrow \beta)$, όπου x ΟΧΙ ελεύθερο στο a.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι

A) $\vdash (a \rightarrow \forall x\beta) \rightarrow \forall x(a \rightarrow \beta)$

B) $\vdash \forall x(a\rightarrow \beta) \rightarrow (a \rightarrow \forall x\beta)$

A) Αρκεί (ΜΘΣ) $a \rightarrow \forall x\beta \vdash \forall x(a \rightarrow \beta)$. Αρκεί (ΜΘΓ) $a \rightarrow \forall x\beta \vdash a \rightarrow \beta$. Αρκεί (ΜΘΣ) $a \rightarrow \forall x\beta, a \vdash \beta$ ...

3) Αν $\phi$ τύπος και $t$ όρος τότε υπάρχει τύπος $\phi'$ έτσι ώστε $\vdash \phi \leftrightarrow \phi'$ & x αντικαταστάσιμη από τον $t$ στον $\phi'$ (x μεταβλητή)

Εξήγηση: $\forall y(x=y) \rightarrow \forall z(x=z)$ τύπος.

Τότε, η μεταβλητή x ΔΕΝ είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο z σε αυτόν τον τύπο. Το ίδιο ισχύει και

για τον όρο $fwz$ ή $fwy$.
Η $x$ είναι αντικαταστάσιμη από αυτούς τους όρους στον ισοδύναμο τύπο $\forall y'(x=y') \to \forall z'(x=z')$.

Άλλα Μεταθεωρήματα:

- $\vdash \forall x(x=x)$
- $\vdash \forall x \forall y(x=y \to y=x)$
- $\vdash \forall x \forall y \forall z\ (x=y \land y=z \to x=z)$

## Θεώρημα Εγκυρότητας και Πληρότητας

$\Sigma \vdash \phi$ ανν $\Sigma \models \phi$

Απόδειξη

A) Ευθύ: $\Sigma \vdash \phi$ τότε $\Sigma \models \phi$ (εγκυρότητα)

1) Όλα τα λογικά αξιώματα είναι έγκυροι τύποι.

Σημείωση: Ο τύπος $\phi$ καλείται έγκυρος ανν για κάθε $\mathfrak{A}$ και για κάθε $s$, $\mathfrak{A} \models \phi[s]$.

Θα κάνουμε σχηματική απόδειξη για το λογικό αξίωμα $\forall x\phi \to \phi^x_y$. Θεωρώ ως $\phi$ το $Px$. Πρέπει να αποδείξω ότι είναι έγκυρος ο τύπος $\forall x Px \to Px^x_t$. Δηλαδή πρέπει να αποδείξω την εγκυρότητα του $\forall x Px \to Pt$. Έστω $\mathfrak{A}$ δομή και $s$ απονομή. Πρέπει να αποδείξω ότι $\mathfrak{A} \models \forall x Px \to Pt[s]$. Δέχομαι ότι $\mathfrak{A} \models \forall x Px[s]$ και πρέπει να αποδείξω ότι $\mathfrak{A} \models Pt[s]$. Το τελευταίο σημαίνει ότι $t^{\mathfrak{A}}[s] \in P^{\mathfrak{A}}$. Υπόθεση λέει $\mathfrak{A} \models \forall x Px[s]$, δηλαδή $\forall d \in |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} \models Px[s(x|d)]$. Δηλαδή $\forall d \in |\mathfrak{A}|$, $d \in P^{\mathfrak{A}}$. Άρα και $t^{\mathfrak{A}}[s] \in P^{\mathfrak{A}}$.