30/6/2013

Επαναληπτικές Ασκήσεις.

L_S $\quad$ T_S, A_S

L $\quad$ T, A_E

$A_S \vdash \varphi$ $\quad$ $A_S \models \varphi$

Ασκήσεις Enderton

σελ 193, #4.

Αποδείξτε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ είναι ορίσιμο στην $\mathfrak{N}_S$ αν A πεπερασμένο ή A^c (συμπλήρωμα A) πεπερ.

$$a \in A \text{ αν } \mathfrak{N}_S \models \phi(a).$$

Υπάρχει ψ χωρίς ποσοδείκτες

$$a \in A \text{ αν } \mathfrak{N}_S \models \psi(a)$$

$$\psi(x) \Longleftrightarrow \overbrace{(\vee \cdots \vee)}^{\sigma_1} \wedge (\vee \cdots \vee) \wedge \cdots \wedge \overbrace{(\vee \cdots)}^{\sigma_k}$$

Ατομικός τύπος ή άρνηση ατομ. τύπου.

Έστω $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ τα σύνολα που ορίζουν οι $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$.

$$A = \Sigma_1 \cap \cdots \cap \Sigma_k$$

$$\sigma = \Theta \vee \cdots \vee \Theta_j$$

$$\tilde{\Theta}_1, \ldots, \tilde{\Theta}_j.$$

$$\Sigma = \underline{\tilde{\Theta}_1} \vee \cdots \vee \Theta_j.$$

#5

Να αποδειχθεί ότι η σχέση $<$

ΔΕΝ είναι ορίσιμη.

Έστω $R(x,y)$ διμελής

ορίσιμη στην $\mathfrak{N}_S$ σχέση.

Διαγραφημα Απόδειξης

$x < S^k y$

#6.

$Th\,\mathbb{Z}_5$ ΔΕΝ είναι πεπ.-αξιωματικό.

Ένα πεπ. υποσύνολο A του A_5 δεν είναι ισοδύναμο σε το A_5.

$Sx \neq x, \dots, SSSx \neq x.$

$\{0,1,2,3,4\}$ $Sx \neq x$

A_E Τσ

σελ. 223

$(\mathbb{N}, \cdot, E)$

$$a^x \cdot a^y = a^z$$

$$\phi(x,y,z)$$

$$(\exists a)(a \neq 0 \wedge a \neq 1 \wedge a^x a^y = a^z)$$

Να αποδείξετε ότι η $+$ είναι ορίσιμη.

$(\forall y)(yx = x)$ ορίζει το 0

$(\forall y)(yx = y)$ ορίζει το 1.

3

T καλείται ω-complete

$\varphi_n^x \in T, \forall n \in \mathbb{N}$ τότε

$\forall x \varphi \in T.$

T συνεπής & ω-πλήρης

$A_E \subseteq T$ τότε $T = Th(\mathfrak{N})$.

$T \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{M}$ άσκηση.

$\mathrm{Th}\,\mathfrak{M} \subseteq T$ απόδειξη.

Έστω $\varphi \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{M}$.

Πρέπει να αποδείξω ότι $\varphi \in T$.

Με επαγωγή στον αριθμό των ποσοδ.

(φ σε κανονική προδεσμευτική (μορφή))

φ είναι $\exists y\, \psi(y)$

Υπάρχει φυσικός n έτσι ώστε

$$\psi(n) \in Th(\mathfrak{N}).$$

Άρα $\psi(n) \in T$.

Άρα $\exists y\, \psi(y) \in T$.

φ είναι $\forall y\, \psi(y)$.

Άρα $\psi(n) \in Th(\Sigma)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα από επ-υπ- $\psi(n) \in T$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

από ω-πληρ. βγαίνει.

$\psi(n)$ αποδείξιμο τότε $\exists y\, \psi(y)$ αποδείξι

$\psi(n)$ αποδ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad T \cancel{\Sigma} \vdash \forall y\, \psi(y)$

Αντιπροσωπευσιμότητα.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$G_f = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$ αντιπροσωπ. σχέση στο ΑΕ.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τύπος $\phi(x,y)$ τέτοιος ώστε

Αν $f(n)=m$ τότε

$A_E \vdash \phi(n,m)$ & $\forall n \in \mathbb{N}$

$A_E \vdash \exists! y\, \phi(n,y)$

Γνωρίζω από την αντιπροσώπευση του

G_f ότι υπάρχει $\psi(x,y)$

$\phi(x,y)$ ορίζεται

Προσοχή: Για την ψ που αντιπροσωπεύει πάλι το G_f ισχύει

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\quad A_E \vdash \psi(n,m)$$

Αλλά εν γένει ΔΕΝ ισχύει ότι $\forall n \in \mathbb{N}$

$$A_E \vdash \exists y\, \psi(n,y)$$

Πώς θα ορίσω τη φ; ;

$\phi(x,y)$ είναι

$\psi(x,y) \ \& \ \forall z < y \ \neg\psi(x,z)$

Πρέπει να αποδείξω

$f(n)=m$ τότε $A_E \vdash \phi(n,m)$

$A_E \vdash \exists! y\, \phi(n,y)$ $\quad y_1 < y_2$

Κοιτάξτε Δημητρακόπουλο

στην αντιπροσωπευτικότητα.

αναπαραστασιμότητα.