18-4-2013

$$\mathfrak{N}_S = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}_S}, S^{\mathfrak{N}_S} \rangle$$

successor

Φυσικοί Αριθμοί με διάδοχο

$$Th\mathfrak{N}_S = \{\sigma \mid \sigma \text{ απόφανση } \& \ \mathfrak{N}_S \models \sigma\}$$

Θα αποδείξουμε ότι $Th\mathfrak{N}_S$ είναι αξιωματικοποιήσιμη & $Th\mathfrak{N}_S$ διαγνώσιμη.

Ας τα ακόλουθα αξιώματα

S1. $\forall x \; Sx \neq 0$

S2 $\forall x \forall y \left(Sx = Sy \rightarrow x = y \right)$

S3 $\forall y \left(y \neq 0 \rightarrow \exists x \; Sx = y \right)$

S4 1 $\forall x \left(Sx \neq x \right)$

S4 2 $\forall x \left(SSx \neq x \right)$

S4 3

⋮

$Cn\, A_5$

Προφανώς $Cn\, A_5 \subseteq Th\, \mathbb{Z}_5$

Θα αποδείξουμε ότι

$$Cn\, A_5 = Th\, \mathbb{Z}_5 .$$

Πόρισμα $Th\, \mathbb{Z}_5$ διαγνώσιμο σύνολο.

Υπενθύμιση

$T \subseteq \Sigma$, Σ συνεπής, T πλήρης

Θεωρίες

Τότε

$T = \Sigma$.

Έχουμε $\mathrm{Cn}\,A_S \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}_S$

Για να δείξουμε την ισότητα, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Cn}\,A_S$ πλήρης.

Η πληρότητα θα δειχθεί με βάση το «test» Łoś-Vaught.

Πρέπει να δείξουμε

$C_n A_s$ 1) Δεν έχει πεπερασμένα μοντέλα.

2) $\exists \kappa$ άπειρος πληθάριθμος ώστε οποιαδήποτε δύο μοντέλα του $C_n A_s$ πληθαρίθμου κ ισόμορφα.

Αν $\mathfrak{A} \models \mathrm{CnAs}$, τότε $|\mathfrak{A}|$ δεν είναι πεπερασμένο.

Έστω $\mathfrak{A} \models \mathrm{CnAs}$

Θα προσπαθήσω να καταλάβω πως είναι $|\mathfrak{A}|$

$$0^{\mathfrak{A}} \longrightarrow S^{\mathfrak{A}}0^{\mathfrak{A}} \longrightarrow \dots \qquad Z\text{-chain}$$

$$* \longrightarrow * \longrightarrow a \longrightarrow Sa \longrightarrow SSa \dots$$

Συμπέρασμα

$|\mathcal{A}|$ αποτελείται από ένα «συμπαγικό» μέρος & από αριθμό $\Sigma\Gamma$-chains.

Εάν δύο δομές έχουν ίδιο αριθμό $\Sigma\Gamma$-chain είναι ισομορφικές.

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις Łoś–Vaught

Άρα $T_{h}A_{S}$ πλήρης. Ο.Ε.Δ.

Έστω $a, b \in C_n A_5$

Έστω $|a| = |b| = \kappa$ υπεραριθμήσιμος.

Έστω ότι $|a|$ περιέχει λ $\mathbb{Z}$ chain.

$|a| = \lambda \cdot \aleph_0 + \aleph_0$

Άρα $\lambda = \kappa$

$\mathrm{Cn}\,A_S = \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}_S$.

Απαλοιφή Ποσοδεικτών.

$\mathfrak{A}$ επιδέχεται απαλοιφή ποσοδεικτών αν για κάθε τύπο φ υπάρχει ψ χωρίς ποσοδείκτες, έτσι ώστε

$$\mathfrak{A} \models \varphi \leftrightarrow \psi\,[s]$$

για οποιαδήποτε αποτίμηση

Θα αποδείξουμε ότι $\mathfrak{N}_S$ επιδέχεται

απαλοιφή ποσοδεικτών

ϕ

1) ϕ είναι της μορφής $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \psi$

όπου ψ χωρίς ποσοδείκτες.

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \psi \underset{\mathfrak{N}_S}{\equiv} \exists x_1 \cdots \exists x_n \left((\quad) \vee \cdots \vee (\quad) \right)$$

Μπορώ να υποθέσω

$\exists x_1 \dots \exists x_n$ (σύζευξη ατομικών ή αρνήσεων)

Μπορώ να υποθέσω

$\exists x$ (σύζευξη . . .)

Μπορώ να υποθέσω ότι όλοι οι συζευκταίοι έχουν x.

$\exists x \; \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$

Κάθε σ_i

$$S^m x = S^k y$$

ή η μεταβλητή.

$$S^n x \neq S^k y.$$

Αν όλοι οι ατομικοί τύποι <u>αρνήσεις</u>

τότε εύκολο.

Άρα κάποιος τουλάχιστον τύπος

$$S^{m}_{x} = t.$$

Οι άλλοι $S^{\lambda}_{x} = S^{\rho}_{y}$

$$\neq$$

$$S^{\lambda+m}_{x} = S^{\rho+m}_{y}$$

$$\neq$$

Άσκηση.

Να γράψετε έναν τύπο (λίγο περίπλοκο) σε αυτή τη γλώσσα και να βρείτε ισοδύναμο χωρίς ποσοδείκτες.