12-4-2013

Ασκήσεις.

Α Μέρος <u>Σύνταξη</u>.

Προπτυχιακές Σημειώσεις Ζώρος-Καρβέλας.

Άσκηση 3.5.5

$\forall z\, \phi^y_z \vdash \forall y\, \phi$ αν y αντικαταστάσιμη για z.

Απόδειξη (Λανθασμένη)

Διόρθωση If z δεν εμφανίζεται στη φ.

$\forall z \varphi^y_z \vdash \forall y \varphi.$

$$\forall z \varphi^y_z \to \underbrace{\left(\varphi^y_z\right)^z_y}_{\varphi} \quad \text{ΑΣ ; αντικατάστασης.}$$

σωστό

$\forall z \varphi^y_z \vdash \varphi$

Μεταθεώρημα Γενίκευσης

$\forall z \varphi^y_z \vdash \forall y \varphi$ QED.

Αντιπαράδειγμα για την προηγούμενη «απόδειξη»

$\varphi \qquad z = y$

$\forall z \, \varphi^{y}_{z} \qquad \forall z (z = z)$

$\forall y \, \varphi \qquad \forall y \, (y = z).$

Άσκηση 3.5.6.

$\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \exists y\, f(x_1, \dots x_n) = y$, όπου f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο

Απόδειξη.

Από το μεταθεώρημα Γενίκευσης αρκεί να αποδείξω ότι

$$\vdash \exists y\, f(x_1, \dots, x_n) = y.$$

Από ορισμό του $\exists$ & Μετ. Αναγ. σε Άτοπο αρκεί να αποδείξω ότι

$\forall y\ f(x_1 \ldots x_n) \neq y$ ασυνεπές.

Αλλά από το αξι αντίκα.

Προκύπτει

$\forall y\ f(x_1, \ldots, x_n) \neq y \vdash f(x_1, \ldots, x_n) \neq f(x_1, \ldots, x_n)$

Άρα πράγματι $\forall y\ f(x_1, \ldots, x_n) \neq y$ ασυνεπής

Β Μέρος

Θέμα 1.1. Πρόοδος Μαιος 2012.

$\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$

$\Sigma_i,\ i=1,\dots$ ακολουθία από σύνολα τύπων.

Τα Σ_i είναι συντακτικά ανεξάρτητα.

Δηλαδή $\forall \varphi \in \Sigma_i \quad \Sigma_i \setminus \{\varphi\} \not\vdash \varphi$.

Να αποδειχθεί ότι συντακτικά ανεξάρτητο είναι και το $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$

Απόδειξη.

Έστω ότι Σ όχι ΣA. Έστω $\varphi \in \Sigma$

$$\Sigma \setminus \{\varphi\} \vdash \varphi.$$

Τότε $\varphi \in \Sigma_i$ για κάποιο i. ✓

Άρα $\Sigma_i - \{\varphi\} \vdash \varphi$ ✓

Επειδή οι τυπικ. αποδ. είναι πεπ.

$\exists\ \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma \setminus \{\varphi\}$ έτσι ώστε $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

$\exists k \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi \in \Sigma_k$ Άρα $\Sigma_k - \{\varphi\} \vdash \varphi$ Άτοπο.

Σημασιολογική Ανεξαρτησία

$$\Sigma \setminus \{\varphi\} \not\models \varphi.$$

Να αποδείξετε ότι αν Σ_i είναι σημ. ανεξάρτητα, το ίδιο ισχύει γιά το Σ. (χωρίς Εγκυρότητα-Πληρότητα αλλά με συμπάγεια).

Μη Συμβατική Απάντηση

(Δυσπροσάρμοστη Άσκηση)

Θέμα 2 (από 2) Σεπτέμβριος 12

$A \subseteq \mathbb{R}$. Τότε το A έχει μέγιστο στοιχείο αν το A ως υποσύνολο του $^*\mathbb{R}$ έχει <u>ελάχιστο</u> άνω φράγμα.

Απόδειξη. Έστω m το $\sup_{^*\mathbb{R}} A$.

Αν $m \in A$ τελειώσαμε.

$m = st(m) + dm.$

Θεωρώ το $st(m)$

1. Θα αποδείξω ότι $\forall x \in A \; st(m) \geq x.$

Έστω $x_0 > st(m)$. Τότε

$-st(m) + x_0 > 0$ & $-st(m) + x_0 \in \mathbb{R}.$

Άρα $dm < x_0 - st(m)$ Άρα

$dm + st(m) < x_0$ ΑΤΟΠΟ.

2. Θα αποδείξω ότι $st(m) \in A$.

Έστω ε θετικό απειροστό

Τότε $m - \varepsilon$ ΔΕΝ είναι άνω φράγμα

Άρα υπάρχει $x \in A$

$$m \geq x > m - \varepsilon$$

Άρα $x \simeq m$ Άρα από μοναδικότητα του

$st\, m$, $x = st\, m$ ΟΕΔ.

Σεπτέμβρης 2012

L χωρίς σύμβολα συναρτήσεων
(πρωτοτάξια πεπερασμένη γλώσσα)
ϕ τύπος
$\mathfrak{A} \models \phi$ έστω $\mathfrak{A}'$ πεπερασμένη υποδομή της $\mathfrak{A}$. Αληθεύει πάντα ότι $\mathfrak{A}' \models \phi$
Θεωρούμε $<$ διμέσιο σύμβολο κατηγ.
ϕ σύζευξη των εξής:
Αξιώματα Γνήσιας διάταξης $\forall x \exists y\ x<y$

Αν $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$

$\mathfrak{A} \models \phi$.

Αλλά $\mathfrak{A}' \not\models \phi$ για οποιαδήποτε πεπ. υποδ.

Ισχύει ότι αν για κάθε πεπ. $\mathfrak{A}'$

$\mathfrak{A}' \models \phi$ τότε $\mathfrak{A} \models \phi$.

$\phi \qquad \exists y \forall x (y > x$ ή $y = x)$

Έστω ότι φ έχει μόνο καθολικούς ποσοδείκτες & είναι σε ΠΚΜ

1) $\mathfrak{A} \models \varphi$ τότε $\mathfrak{A}' \models \varphi$ για κάθε υποδομή $\mathfrak{A}'$ του $\mathfrak{A}$

Θα αποδείξω ότι

$\mathfrak{A} \models \varphi[[a_1, \ldots, a_n]]$ τότε

$a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}'|$.

$\mathfrak{A}' \models \varphi[[a_1, \ldots, a_n]]$.

Έστω φ ατομικός τύπος.

εύκολο.

Έστω ότι φ $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$.

$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi [a_1, \ldots, a_n]$

$\forall a \in |\mathfrak{A}|, \ \mathfrak{A} \models \forall x_2 \ldots \forall x_n \psi [a, a_1, \ldots, a_n]$

Με επαγωγή

$\forall a \in |\mathfrak{A}'| \ \ \mathfrak{A}' \models \forall x_2 \ldots \forall x_n \psi (a, a_1, \ldots, a_n).$

Έστω ότι $\mathfrak{A}' \models \varphi$ για κάθε πεπερασμένη υποδομή $\mathfrak{A}'$ της $\mathfrak{A}$.

Υπόδειξη.

Επεκτείνουμε τη γλώσσα περιλαμβάνοντας ένα σύμβολο σταθεράς c_a, $\forall a \in |\mathfrak{A}|$

Σ σύνολο προτάσεων που περιλαμβάνει φ & όλες τις ατομικές αποφάνσεις στην επεκτεινόμενη γλώσσα. που επαληθεύονται στην $\mathfrak{A}$.