15-3-2013

Συνέχεια Τυπικών Αποδείξεων

ϕ τύπος

$\mathcal{A} \vdash \phi \qquad \Sigma \vdash \phi$

$\mathcal{A}_0 \vdash \phi \qquad \vdash \phi$

Ταυτολογίες:

$\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi$ $\quad$ ϕ είναι ταυτ. συνεπ. των $\phi_1, \ldots, \phi_n$

$(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \to \phi$ είναι ταυτ

$$\phi_1 \to (\phi_2 \to \cdots (\phi_n \to \phi) \cdots)$$

Είναι ταυτολογία.

Μεταθεώρημα Γενίκευσης

$\Sigma \vdash \phi$ & x όχι ελεύθερη στο Σ τότε

$\Sigma \vdash \forall x \phi$.

Μεταθεώρημα Αναγωγής.

$\Sigma, \phi \vdash \psi$ ανν $\Sigma \vdash \phi \to \psi$.

Απόδειξη.

Αντίστροφο (κανό).

$$\left.\begin{array}{l} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n = \phi \to \psi \end{array}\right\} \Sigma$$

ϕ

ψ.

Ενδι (Αναγκαίο)

$\Sigma, \varphi \vdash \psi$ τότε $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Έστω $\chi_1, \ldots, \chi_n$ απόδειξη στο Σ, φ

Θα αποδείξουμε ότι $\varphi \to \chi_1, \ldots, \varphi \to \chi_n$ είναι απόδειξη στο Σ.

A. χ_i είναι στοιχείο του Σ

$\chi_i \to (\varphi \to \chi_i)$ Επειδή $\chi_i \in \Sigma$ από MP

$\Sigma \vdash \varphi \to \chi_i$

Β. το χ_i είναι το ϕ ✓

Γ. Το χ_i προέκυψε ως $\dfrac{\chi_k,\ \chi_k \to \chi_i}{\chi_i}$

Άρα επαγωγικά $\Sigma \vdash \phi \to \chi_k$

κ $\Sigma \vdash \phi \to (\chi_k \to \chi_i)$

Όμως $\big(\phi \to (\chi_k \to \chi_i)\big) \to \big((\phi \to \chi_k) \to (\phi \to \chi_i)\big)$

είναι ταυτολογία.

$\Sigma \vdash \alpha_1$ & $\Sigma \vdash \alpha_2$ ανν $\Sigma \vdash \alpha_1 \wedge \alpha_2$

$\Leftarrow$ $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \alpha_1$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \alpha_2$

$\Rightarrow$ $\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \alpha_1 \wedge \alpha_2)$

$\Sigma \vdash \alpha_1 \vee \alpha_2$ ~~ανν~~ $\Sigma \vdash \alpha_1$ ή $\Sigma \vdash \alpha_2$

Άσκηση

$\Sigma, \alpha_1 \vee \alpha_2 \vdash \phi$ ανν $\Sigma, \alpha_1 \vdash \phi$ & $\Sigma, \alpha_2 \vdash \phi$

Μεταθεώρημα Διπλής Αρν.

$\Sigma \vdash \phi$ ανν $\Sigma \vdash \neg\neg\phi$. άσκηση.

Μεταθεώρημα Αντιθετοαντιστροφής

$\Sigma, \phi \vdash \psi$ ανν $\Sigma, \neg\psi \vdash \neg\phi$

$\Sigma, \phi \vdash \psi$ $\underset{\text{απαγωγή}}{\text{ανν}}$ $\Sigma \vdash \phi \to \psi$ ανν $\Sigma \vdash \neg\psi \to \neg\phi$

$\underset{\text{απαγω}}{\text{ανν}}$ $\Sigma, \neg\psi \vdash \neg\phi$.

Μεταθεώρημα Ταυτολογικής Συνέπειας.

Αν ϕ ταυτ. συνεπ. των $\phi_1, \ldots, \phi_n$ &

$\Sigma \vdash \phi_1$ & $\Sigma \vdash \phi_2$ & ... & $\Sigma \vdash \phi_n$ τότε

$\Sigma \vdash \phi$.

Απαγωγή σε Άτοπο.

Σ καλείται <u>ασυνεπές</u> αν υπάρχει ψ

$$\frac{\Sigma \vdash \psi \wedge \neg\psi}{\Sigma \vdash \phi}$$

$\Sigma \vdash \phi$ ανν $\Sigma, \neg\phi$ ασυνεπές.

$\Longrightarrow$ Έστω $\Sigma \vdash \phi$

Τότε $\Sigma, \neg\phi \vdash \neg\phi$ & $\Sigma, \neg\phi \vdash \phi$

Τότε $\Sigma, \neg\phi \vdash \phi \wedge \neg\phi$, άρα $\Sigma, \neg\phi$ ασυνεπές

$\Longleftarrow$ Έστω $\Sigma, \neg\phi$ ασυνεπές

$\Sigma, \neg\phi \vdash \psi \wedge \neg\psi$

$\Sigma, \neg(\psi \wedge \neg\psi) \vdash \neg\neg\phi$ Απο Μεταθέσεως.

$\Sigma, \neg(\psi \wedge \neg\psi) \vdash \varphi$. Αλλα $\neg(\psi \wedge \neg\psi)$ ταυτολογια...

$\vdash \exists x \forall y \phi \to \forall y \exists x \phi$

Αρκει

$\exists x \forall y \phi \vdash \forall y \exists x \phi$

αρκει (Μ. Γενικευσης)

$\exists x \forall y \phi \vdash \exists x \phi$

αρκει

$\forall x \neg \phi \vdash \forall x (\neg \forall y \phi)$

αρκεί

$\forall x \neg \phi \vdash \neg \forall y \phi$

αρκεί

$\{\forall x \neg \phi, \forall y \phi\}$ ασυνεπές.

Θα χρησιμοποιήσω το αξίωμα

$\forall x \neg \phi \to \neg \phi$.

Άρα $\{\forall x \neg \phi, \forall y \phi\} \vdash \neg \phi$

με τον ίδιο τρόπο

$$\{\forall x \neg\phi,\ \forall y\, \varphi\} \vdash \phi$$

Στρατηγική.

$\vdash \psi \to \chi$ Μετα Θεώρημα απαγωγής.

$\vdash \forall x \phi$ Μεταθεώρημα Γενίκ.

$\vdash \neg\psi$

$\vdash \neg(\chi \to \psi)$

$\vdash \chi$ & $\vdash \neg\psi$.

$\vdash \neg\neg\phi$, $\vdash \phi$

$\vdash \neg\forall x \phi$ Βρίσκουμε t $\vdash \neg\phi^{x}_{t}$

Μεταθεώρημα Γενίκευσης Σταθερών.

Αν $\Sigma \vdash \varphi$ & c σταθερά που δεν εμφανίζεται στο Σ, τότε

$$\Sigma \vdash \forall y \, \varphi^{c}_{y}$$ για κάποια μετ. y

Μεταθεώρημα Ύπαρξης.

$\Sigma, \phi_c^x \vdash \psi$, c δεν εμφανίζεται

στο $\Sigma \cup \{\phi, \psi\}$, τότε

$$\Sigma, \exists x \phi \vdash \psi.$$