14-3-2013

Παραδείγματα Στοιχειωδών Κλάσεων

1. Κλάση Γραφημάτων.

Γλώσσα.

E διθέσιο κατ-σύμβολο.

$$\forall x \left(\neg E(x,x) \right)$$

$$\forall x \forall y \left(E(x,y) \to E(y,x) \right)$$

$$\forall x (\neg E(x,x)) \wedge \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow E(y,x))$$

$$\Downarrow$$ Μεταγλωσσικό "έπεται"

Κλάση Γραφημάτων Στοιχειώδης.

Έστω $\mathcal{K}$ κλάση που αποτελείται από τα γραφήματα. Έστω τ η παραπάνω πρόταση

$$\mathcal{K} = Mod\, \tau$$

Ορισμός

Στοιχειώδης καλείται μία $\mathcal{K}$ αν

$\exists$ πρόταση τ: $\underline{\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\, \tau}$.

Παράδειγμα 2

Οι Αβελιανές ομάδες αποτελούν ΣΙΣ

Γλώσσα Διθέσιο Συναρ. Σύμβολο $+$

$\bar{\sigma}$

$$\exists e\, \forall x\ x+e = x$$

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\ (z+x+y = z)$$

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ ((x+y)+z = x+(y+z))$$

$$\forall x\, \forall y\ (x+y = y+x)$$

$$\underbrace{\Sigma}_{\text{σύνολο τύπων}} \models \underbrace{\varphi}_{\text{τύπος}}$$

(Δομή(-ές) & αποτιμήσεις)

Σ έχει ως λογική συνέπεια τον φ

$$\underbrace{\mathcal{A}}_{\text{Δομή}} \models \underbrace{\varphi}_{\text{τύπος}}\underbrace{[s]}_{\text{αποτίμηση.}}$$

Συντακτικό Πρωτοτάξιας λογικής.

Τυπικές Αποδείξεις

. Συναγωγές

Deductions

Formal Proofs

Αξιωματικό Σύστημα

Ένα Αξιωματικό Σύστημα
σε μία Πρωτοτάξια Γλώσσα
αποτελείται από:

1. Λογικά Αξιώματα (θα δούμε ποια είναι)
2. Μη λογ. Αξιώματα (ποικίλλουν)
3. Κανόνες συμπερασμού

$$\frac{\overbrace{\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n}^{\text{υποθέσεις}}}{\sigma} \quad \text{συμπέρασμα.}$$

Modus $\dfrac{\text{Ponens}}{\text{θέση.}}$ (modus τρόπω)

$$\frac{\alpha, \ \alpha \to \beta}{\beta}$$

Λογικά Αξιώματα.

Αξιωματικά Σχήματα

1. Ταυτολογίες

$(\phi \vee \neg \phi)$ $\qquad A \vee \neg A$,

2. $\forall x \phi \longrightarrow \phi^x_t$ $\qquad$ x μεταβλητή

t όρος

t αυθαίρετο?

$$\exists y (\neg x = y)$$

$$\phi$$

$$\forall x \phi \longrightarrow \phi^{x}_{y}$$

$$\forall x \phi \longrightarrow \exists y (\neg y = y)$$

$$\forall x \exists y (\neg x = y) \longrightarrow \exists y (\neg y = y)$$

$$\forall x \exists y (\neg x = y) \rightarrow \exists y (\neg y = y)$$

3. $\forall x(\phi \to \psi) \longrightarrow (\forall x \phi \to \forall x \psi)$

4. $\phi \longrightarrow \forall x \phi$ $\quad x$ ΟΧΙ ελεύθ. στον ϕ.

5. $x = x$

6. $x = y \longrightarrow (\phi \to \phi')$

ϕ' προκύπτει από τον ϕ με αντικατάσταση κάποιων ελ. εμφ. του x με y.

Τελευταία κινέζικα.

ϕ

$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \phi$ } Γενίκευση του ϕ

Οι γενικεύσεις των προηγ. αξιωμάτων είναι επίσης αξιώματα.

Τυπική Απόδειξη

$\phi_1, \ldots, \phi_n$

~~κ~~ κάθε όρος $\begin{cases} \text{αξίωμα} \\ \\ \text{Προκύπτα από MP} \end{cases}$

$\mathcal{A} \vdash \phi$ $\qquad$ $\phi_1, \ldots, \phi_n = \phi$

αξίωμα σύστημα

Τυπικές Αποδείξεις.

Μεταθεωρήματα

Προγράμματα που μας επιτρέπουν να βγάζουμε τυπικά θεωρήματα.

$$\mathcal{A} \vdash \phi$$

$\mathcal{A}_0$ Μόνο λογικά αξιώ

$\mathcal{A}_0 \vdash \phi$

$\vdash \phi$ $\quad$ ϕ είναι τυπικό θεώρημα του Αξ. Συσ. $\mathcal{A}_0$.

$\Sigma \vdash \phi$.

σύνολο τύπων

Μεταθεώρημα Γενίκευσης

Αν $\Sigma \vdash \varphi$ & x ΔΕΝ εμφαν. ελεύθερα σε στοιχείο του Σ

τότε

$$\Sigma \vdash \forall x \varphi$$

Απόδειξη

Επαγωγικά στον ϕ.

Επαγωγικά στο μήκος της τυπικής απόδειξης.

Επαγ. στην απόδειξη (μήκος). Σ

$\phi_1, \ldots, \phi_n$ τυπική απόδειξη στο Σ

Έστω ότι $\forall j < i \quad \Sigma \vdash \forall x \phi_j$

τότε $\Sigma \vdash \forall x \phi_i$

Θα εξετάσω τι είναι το ϕ_i

1. ϕ_i λογικό αξίωμα.

   $\forall x \phi_i$ επίσης Λ. Α.

   Άρα $\Sigma \vdash \forall x \phi_i$

2. $\phi_i \in \Sigma$.

   $\phi_i \to \forall x \phi_i$ Α. Σ. (4) ✓

$$\frac{\phi_j \ , \ \phi_j \to \phi_i}{\phi_i}$$

$$\frac{\forall x \phi_j \ , \ \forall x (\phi_j \to \phi_i)}{\forall x \phi_i}$$

$$\forall x (\phi_j \to \phi_i)$$

$$\downarrow$$

$$(\forall x \phi_j \to \forall x \phi_i)$$