29/3/2013

Σ αλφάβητο (πεπερ. ή αριθμ.)

Σ^* λέξεις από στοιχεία του Σ

$L \subseteq \Sigma^*$

αναδρομική, αποτελεσματική, αλγοριθμική

Recursive, effective, decidable (διαγνώσιμος)

Αναδρομική Αριθμησιμότητα

Αριθμήσιμο: Μπορούν τα στοιχεία του να γραφούν σε λίστα (πεπερ. ή απειρ.)

Αναδρομικά Αριθμήσιμα: Αν υπάρχει αλγοριθμική λίστα.

Πρωτοτάξια Λογική

Αλγόριθμος Συντακτικής Ανάλυσης (Parsing) για όρους

Πως θα ελέγξουμε αν μια έκφραση είναι όρος;

Ορίζουμε K : Εκφράσεις $\to \mathbb{Z}$.

$$K\begin{pmatrix} \text{μεταβλητή} \\ \text{σταθερά} \end{pmatrix} = 1$$

$K(s_1, \dots, s_n) = K(s_1) + \dots + K(s_n)$.

$K(f) = 1 - n$ όπου f n-θέσιο συναρτησιακό σύμβολο

Θεώρημα: Αν t όρος αν $K(t) = 1$.

Απόδ.

(ευθύ) Προφανές

Αντίστροφο

1) Αν α' αρχικό τμήμα ενός όρου τότε $K(\alpha') < 1$

Έστω $t = f t_1 \cdots t_n$

2) Αν α' τερματικό τμήμα ενός όρου τότε α' συναρμογή ενός ή περισσότερων όρων

Απόδ. με επαγωγή.

Αλγόριθμος ελέγχου αν t όρος

1. Αν η συμβολοσειρά αποτελείται μόνο από ένα γράμμα και αυτό είναι μεταβλητή ή σταθερά αποδεχόμαστε

2. Αν η συμβολοσειρά ξεκινά με ένα n-θέσιο f. βρίσκουμε την πρώτη υπακ t_1 μετά το f για την οποία $K(t_1) = 1$. Ελέγχουμε αν t_1 όρος. Πρέπει να γίνει n φορές.

Με παραπλήσιο τρόπο μπορούμε να φτιάξουμε αλγόριθμο να εξετάζει αν φ είναι ΚΣΤ.

Αλγόριθμος να εξετάζει αν φ λογικό αξίωμα

Υπάρχει αλγόριθμος που να εξετάζει

αν κάτι είναι τυπικό θεώρημα; <u>ΟΧΙ</u>

Τα τυπικά θεωρήματα αποτελούν αναδρομικά αριθμήσιμα σύνολα.
Πράγματι καταγράφονται σε λίστα με βάση το μήκος της απόδειξής τους (άθροισμα μηκών των ΚΣΤ που την αποτελούν)

Το σύνολο των έγκυρων τύπων είναι αναδρομικά αριθμήσιμο
Πράγματι άμεσο συμπέρασμα Θ. Αξιοπ και Πληροτ.

Εισαγωγή στη Θεωρία Δομών (Model Theory)

Sentence: Formula without free vars
Απόφανση: Τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλ.
(~~Πρόταση~~)

EC Στοιχειώδης Κλάση
K = Mod Σ

Έστω γλώσσα με διμ. κατηγ σύμβολο <
Σ η απόφανση που αποτελείται από τη σύζευξη
1) Αξιώματα Γνήσιας Διάταξης
2) $\forall x \exists y \; x<y$

Τότε οποιαδήποτε δομή στην Mod Σ έχει

άπειρα στοιχεία
Υπάρχαν δομές άπειρες που δεν ανήκαν στο Modσ

! Θεώρημα
Εάν Σ σύνολο αποφάνσεων το οποίο έχει πεπερασμένα μοντέλα οσοδήποτε μεγάλα, τότε Σ έχει άπειρο μοντέλο.
Απόδ
Με Θ. Συμπάγειας.
Θεωρώ Σ' που αποτελείται από
1) Σ
2) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$
λ_1 $\exists x \quad x = x$
λ_2: $\exists x_1 \exists x_2 \quad x_1 \neq x_2$
λ_3 : $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \quad x_1 \neq x_2$ ......

Είναι Σ' ικανοποιήσιμο
Ένα πεπερ. υποσύνολο του Σ' είναι υποσύνολο $\Sigma \cup \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ για κάποιο k.
Αλλά από την υπόθεση $\Sigma \cup \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ ικανοποιήσιμο. Άρα Θ.Σ, Σ' ικανοποιήσιμο.
Άρα, υπάρχει μοντέλο του Σ με άπειρο πλη-

! Άσκηση

Η κλάση των δομών με άπειρα σύμπαντα ΔΕΝ είναι FC. Δηλαδή $\nexists$ απόφανση τ έτσι ώστε $\mathcal{A} = Mod\,\tau$

κλάση δομών με άπειρο σύμπαν

Λύση.

Έστω ότι $\mathcal{A} = Mod\,\tau$.

Τότε $Mod(\neg\tau)$ = κλάση των πεπερ. δομών

Άτοπο με βάση το προηγούμενο

$\mathfrak{A}$ είναι δομή

$Th\,\mathfrak{A} = \{\sigma \mid \sigma$ απόφανση & $\mathfrak{A} \models \sigma\}$

$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{L}$ καλούνται στοιχειωδώς ισοδύναμες εάν $Th\,\mathfrak{A} = Th\,\mathfrak{L}$

Ας πάρουμε τη $\mathfrak{N}$

$\mathfrak{N}^*$

Έστω Σ' το σύνολο των αποφάνσεων που αποτελείται (c νέο σύμβολο σταθεράς)

1) $Th\,\mathfrak{N}$

2) $c > 0$, $c > 0'$, $c > 0''$, ...

$s(0)$ (διάδοχος 0)

$Th\,\mathfrak{N}^* = Th\,\mathfrak{N}$ $\qquad c^{\mathfrak{N}^*} > 0$.

$C^{n^*} > 1$, $C^{n^*} > 2$, ...

Πρόοδος : 13-4-2013 Σάββατο.