11-4-2013.

Μη συμβατική ανάλυση

$\mathbb{R}$

$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, \text{σύμβολα} \rangle$

$\mathrm{Th}\mathcal{R}$

${}^*\mathcal{R}$ μη συμβατική δομή

R υποδομή της ${}^{*}R$

$|{}^{*}R| = {}^{*}\mathbb{R}$

${}^{*}\mathbb{R}$ περιέχει στοιχεία που είναι άπειρα σε μέγεθος.

περιέχει απειροστά.

Πεπερασμένοι.

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} F(x) = b.$$

Ορισμός. Αν $x \simeq a$ & $x \neq a$, τότε $F(x) \simeq b$.

Άσκηση. Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον ϵ-δ ορισμό.

Α. Έστω ότι $\lim_{x \to a} F(x) = b$ με τη συνήθη έννοια

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$\forall x \left(0 < |x - a| < \delta \text{ τότε } |F(x) - b| < \varepsilon \right)$

ϕ

$^{*}\mathcal{R} \models \phi.$

Συμπεραίνω ότι αν $x \simeq a$ & $x \neq a$.

Τότε $0 < |x - a| < \delta$

(διότι δ θετικός συμβατικός)

άρα $|F(x) - b| < \varepsilon$

Άρα $F(x) \simeq b$.

B Έστω $\lim_{x\to a} F(x)=b$ με το

μη συμβατικό ορισμό.

Πρέπει να αποδείξω

$\forall \varepsilon>0$

$\exists \delta \ \forall x \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |F(x)-b|<\varepsilon.$

ϕ

Πρέπει να δείξω ότι $*)\ \{\ \} = \phi.$

Για να αποδείξω ότι ${}^{*}\mathbb{R} \models \phi$

θεωρώ ως δ ένα απειροστό.

Κάθε φραγμένο σύνολο έχει sup.

Πρωτοπάξια λογικών.

ΔΕΝ είναι απόφανση

Ο παραπάνω ισχυρισμός ΔΕΝ

ισχύει στο ${}^*\mathbb{R}$

Θα βρω $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ φραγμένο & χωρίς

sup. Παίρνουμε $A = \mathbb{R}$.

Πράγματι αν $M \subseteq^* \mathbb{R}$ & M

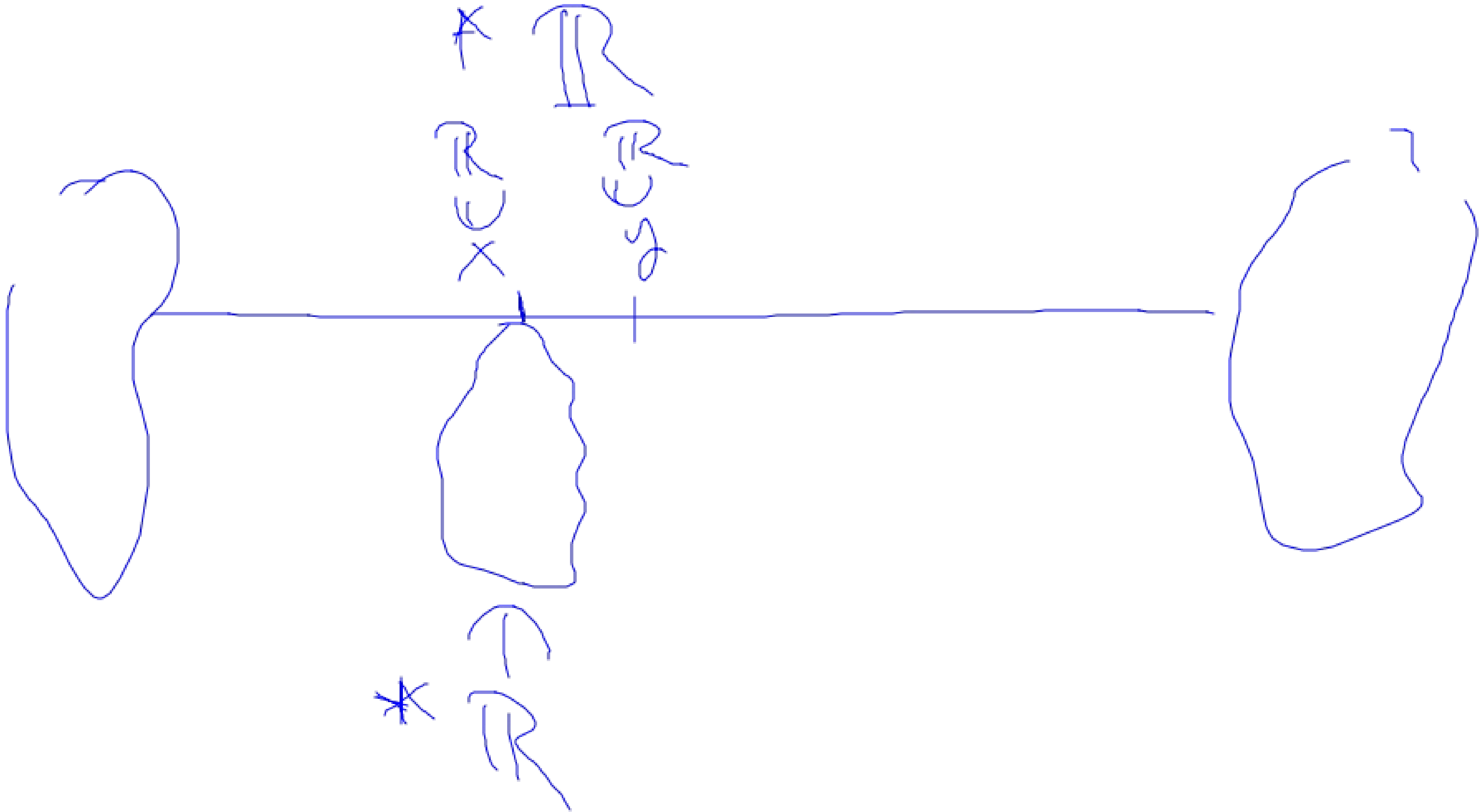
ολικώ άπειρο, τότε M φράγμα του $\mathbb{R}$.

Έστω M' ένα sup

Τότε M' άπειρο.

Αλλά $M'-100$ επίσης άπειρο.

Τότε $M'-100$ επίσης άνω φράγμα.


*ℝ
ℝ ∪ x
ℝ ∪ y
*ℝ

Θεώρημα Κατηγορικότητας Łos-Vaught

Categoricity Test

Άσκηση 1

S, T θεωρίες.

$S \subseteq T$ & T συνεπής.

& S πλήρης. Τότε $S = T$.

Θα αποδείξω ότι $T \subseteq S$.

Εστω $\tau \in T$. Θα δ.ο. $\tau \in S$.

Εστω $\tau \notin S$. Τότε $\tau \in S$.

Αρα $\tau \in T$. Αρα T ασυνεπής. Ατοπο.

Άσκηση 2. Έστω S θεωρία & έστω ότι αν $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models S$ τότε $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Τότε S πλήρης.

1η περίπτωση S δεν είναι συνεπής. Τότε προφανώς πλήρης.

2η S συνεπής. Έστω $\sigma \notin S$.
Πρέπει ν.δ. $\neg\sigma \in S$. Αρκεί $S \models \neg\sigma$.

Επειδή $\sigma \notin S$, συμπεραίνω ότι $S \not\models \sigma$. Άρα $\exists \mathcal{A}$ $\mathcal{A} \models S$ & $\mathcal{A} \not\models \sigma$. Άρα $\mathcal{A} \models \neg\sigma$.

Για να δείξω $S \models \neg\sigma$ θεωρώ $\mathcal{A} \models S$. Με βάση την υπόθεση $\mathcal{A} \models \neg\sigma$.

Περιληπτικά

$S \subseteq T$

συνεπής

$a \vdash b$

$\Downarrow$

$a \equiv b$

Θεώρημα Łoś-Vaught.

Έστω S μια θεωρία χωρίς πεπερασμένα μοντέλα, & S συνεπής.
& έστω ότι για κάποιον άπειρο πληθάριθμο κ, οποιαδήποτε δύο μοντέλα $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ της S πληθαρίθμου κ είναι ισόμορφα. Τότε S
οποιαδήποτε $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}\, S$ είναι στοιχειωδώς ισοδ

Σκιαγράφηση Απόδειξης.

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ μοντέλα της S

$\exists\, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ τέτοια ώστε $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}'$

κ. $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}'$ & $|\mathfrak{a}'| = |\mathfrak{b}'| = \kappa$.

(Θ. Löwenheim Skolem)

$\mathfrak{a}' \simeq \mathfrak{b}'$ άρα $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$.

Να δείξετε.

Αν S θεωρία

1) Χωρίς πεπε. μοντέλα

2) $\exists$ κ άπειρος ώστε αν a, b μοντέλα της S πληθαρ. κ τότε $a \cong b$.

Τότε οποιαδήποτε δύο μοντέλα της S είναι στοιχειωδώς ισοδύναμα.

Λέξη "Φιλοσοφία"

Έγκυρες = Αποδείξιμες

Gödel.

Θ

Μπορώ να βρω αξιώματα ώστε οι αληθείς στην Θ προτάσεις να είναι οι αποδείξιμες;

ΟΧΙ